

广义拟补问题的迭代算法及其收敛性分析*

黄建蓉

(重庆师范大学 数学与计算机科学学院, 重庆 400047)

摘要 通过改变变量法建立了一类广义拟补问题与 Wiener-Hopf 方程的等价关系。运用该等价关系,研究了广义相补问题的迭代算法以及收敛性分析,推广了文献中的相应结果。

关键词 广义拟补问题; Wiener-Hopf 方程; 改变变量法; 迭代算法; 收敛性分析; 不动点; 强单调; Lipschitz 连续

中图分类号 O177.92

文献标识码 A

文章编号 1672-6693(2006)03-0023-03

An Iterative Algorithm and the Convergence Analysis of Generalized Complementarity Problems

HUANG Jian-rong

(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract In this paper, we have established an equivalence between the generalized complementarity problems and the Wiener-Hopf equations by using a change of variable technique. This equivalence is used to suggest a more general iterative algorithm and the convergence analysis of the iterative method. These results improve the corresponding results of Noor in ref.

Key words generalized complementarity problems; the Wiener-Hopf equations; change of the variables; iterative algorithm; the convergence analysis; fixed points; strongly monotone; Lipschitz continuous

众所周知,相补问题在数学、物理、优化理论、控制论、工程学的不同领域有着广泛的应用。许多新的方法、技巧用于讨论的相补问题的解的问题,譬如投影算法、改变变量法(Wiener-Hopf 方程法),Splitting 法等^[1~5]。不过实践表明,用改变变量技巧的迭代算法比其他技巧更有效。本文就是运用 Wiener-Hopf 方程法改变变量的技巧来研究相补问题,该思想可追溯到 Von Bokhoven^[6],后来 Zrae and Noor^[7,8]修正了该方法并且讨论了一些相补问题的迭代算法。本文通过改变变量法建立了一类广义相补问题与 Wiener-Hopf 方程的等价关系。运用该等价关系,研究了广义相补问题的迭代算法以及收敛性分析,推广了文献[1~3]中 Noor 的某些结果。

1 预备知识

令 H 为实 Hilbert 空间, $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\| \cdot \|$ 分别表示 H 的内积和范数。设 $K \subset H$ 为一闭锥, K^* 表 K 的

共轭锥,即 $K^* = \{u \in H: \langle u, v \rangle \geq 0, \forall v \in K\}$ 。

定义 1 给定非线性映象 $T, A, g: H \rightarrow H$, 考虑下面问题: 求 $u \in H$, 使得

$$g(u) \in K, Tu + Au \in K^*, \langle g(u), Tu + Au \rangle = 0 \quad (1)$$

问题(1)式称为广义非线性拟补问题。

若 $g = I$ (恒等映象), 则问题(1)式退化为: 求 $u \in K$, 使得

$$Tu + Au \in K^*, \langle u, Tu + Au \rangle = 0 \quad (2)$$

问题(2)式称为广义非线性相补问题, Noor 在文献[2]中讨论过。

若 $A = 0$, 则问题(1)式退化为: 求 $u \in H$, 使得

$$g(u) \in K, Tu \in K^*, \langle g(u), Tu \rangle = 0 \quad (3)$$

问题(3)式称为非线性隐补问题, Noor 在文献[1, 3]中讨论过。

若 $g = I, A = 0$, 则问题(1)退化为: 求 $u \in K$, 使

* 收稿日期 2005-11-25

资助项目 重庆市教委资助项目

作者简介 黄建蓉(1980-), 女, 重庆人, 硕士研究生, 研究方向为最优化理论及算法。

得

$$Tu \in K^*, \langle u, Tu \rangle = 0 \quad (4)$$

问题(4) 式称为非线性相补问题。该问题及应用在很多文献均讨论过^[4,5,8~10]。

定义 2^[12,13] 给定非线性映象 $T, A, g: H \rightarrow H$, 考虑下面问题 求 $z \in H$, 使得

$$\rho(Tg^{-1}P_K z + Ag^{-1}P_K z) + Q_K z = 0 \quad (5)$$

即 $z = P_K z - \rho(Tg^{-1}P_K z + Ag^{-1}P_K z)$, 则方程(5) 式称为广义 Wiener-Hopf 方程。

其中 $Q_K z = I - P_K z, g^{-1}$ 存在, I 为恒等映象, $P_K z$ 为 H 到 K 上的投影。

若 $g = I, A = 0$, 求 $z \in H$, 使得

$$\rho TP_K z + Q_K z = 0 \quad (6)$$

则方程(6) 式称为 Wiener-Hopf 方程^[14]。

定义 3^[2] $\forall u_1, u_2 \in H, T: H \rightarrow H$ 被称之为强单调, 如果存在常数 $\alpha > 0$, 使得 $\langle Tu_1 - Tu_2, u_1 - u_2 \rangle \geq \alpha \|u_1 - u_2\|^2$ 。

定义 4^[2] $\forall u_1, u_2 \in H, T: H \rightarrow H$ 被称之为 Lipschitz 连续, 如果存在常数 $\beta > 0$, 使得

$$\|Tu_1 - Tu_2\| \leq \beta \|u_1 - u_2\|。$$

下面通过改变变量的技巧讨论相补问题(1) 式与不动点问题的关系。该技巧是借助于 Noor^[8,11] 的思想。

首先, 问题(1) 式可改写为如下形式 求

$$u \in H, w = g(u) \in K, w = Tu + Au \in K^*, \langle w, w \rangle = 0 \quad (7)$$

其次, 定义 u 的绝对值 $|u| = u^+ + u^-$ 其中 $u^+ = \sup(0, u), u^- = -\inf(0, u)$ 由此有

$$u = u^+ - u^-, \langle u^+, u^- \rangle = 0 \quad (8)$$

因此 $u^+ = \frac{|u| + u}{2}, u^- = \frac{|u| - u}{2}$, 接下来考虑变量的改变

$$w = g(u) = \frac{|z| + z}{2} = z^+ = P_K z \quad (9)$$

$$v = \frac{|z| - z}{2\rho} = \rho^{-1}z^- = \rho^{-1}(z^+ - z) = \rho^{-1}(P_K z - z) \quad (10)$$

其中, 常数 $\rho > 0$ 。可以证明问题(1) 等价于不动点问题(即广义 Wiener-Hopf 方程), 求 $z \in H$, 使得 $z = P_K z - \rho(Tg^{-1}P_K z + Ag^{-1}P_K z)$, 令

$$F(z) = P_K z - \rho(Tg^{-1}P_K z + Ag^{-1}P_K z),$$

则 $z = F(z)$ 为不动点问题。其中

$$g(u) = P_K z, u = g^{-1}(P_K z)$$

于是有如下引理。

引理 1 设 K 为 Hilbert 空间中的闭凸锥, g 是非奇异的, 广义拟补问题(1) 式有解 $u \in H$, 当且仅当

Wiener-Hopf 方程(5) 式有解 $z \in H$, 其中 $g(u) = P_K z, z = g(u) - \rho(Tu + Au)$ 。

证明 必要性。由(9)、(10) 式立即可以得出。

充分性。令 $u \in H$ 是问题(1) 式的解, 即问题(7) 式的解, 由于 $g(u) = P_K z$, 因此,

$$v = Tu + Au = Tg^{-1}P_K z + Ag^{-1}P_K z。$$

由(10) 式知 $v = \rho^{-1}(P_K z - z)$, 所以, $z = P_K z - \rho(Tg^{-1}P_K z + Ag^{-1}P_K z)$, 即

$$z = P_K z - \rho(Tu + Au),$$

所以 $z \in H$ 是 Wiener-Hopf 方程(5) 的解。 证毕

2 主要结论

在引理 1 中, 借助改变变量的技巧, 得到相补问题(1) 式与不动点问题, 即 Wiener-Hopf 方程(5) 式的等价关系

$$g(u) = P_K(z), z = g(u) - \rho(Tu + Au)$$

该等价关系是非常有用的, 利用它可以讨论迭代序列解的逼近问题。于是, 得到下列算法。

算法 1 给定 $z_0 \in H$, 由下列迭代算法计算序列 $\{z_n\}$

$$g(u_n) = P_K(z_n)$$

$$z_{n+1} = g(u_n) - \rho(Tu_n + Au_n), n = 0, 1, 2, \dots。$$

若 $g = I$, 即 $w = u = z^+$, 则算法 1 退化为算法 2。

算法 2 给定 $z_0 \in H$, 由下列迭代算法计算序列 $\{z_n\}$

$$z_n^+ = P_K(z_n)$$

$$z_{n+1} = z_n^+ - \rho(Tz_n^+ + Az_n^+), n = 0, 1, 2, \dots。$$

若 $A = 0$, 则算法 1 退化为算法 3。

算法 3 给定 $z_0 \in H$, 由下列迭代算法计算序列 $\{z_n\}$

$$g(u_n) = P_K(z_n)$$

$$z_{n+1} = g(u_n) - \rho Tu_n, n = 0, 1, 2, \dots。$$

若 $A = 0, g = I$, 则算法 1 退化为算法 4。

算法 4 给定 $z_0 \in H$, 由下列迭代算法计算序列 $\{z_n\}$

$$z_n^+ = P_K(z_n)$$

$$z_{n+1} = z_n^+ - \rho Tz_n^+, n = 0, 1, 2, \dots。$$

注 Noor 在文献[2] 中讨论过算法 2, 在文献[3] 中讨论过算法 3, 在文献[8] 中讨论过算法 4, 所以算法 1 是以上各种算法的推广。

下面讨论算法 1 的收敛性分析。

定理 1 令映射 $T, g: H \rightarrow H$ 均为强单调(单调常数分别为 $\alpha > 0, \sigma > 0$) 和 Lipschitz 连续(Lips-

chitz 常数 分别为 $\beta > 0, \delta > 0$), $A: H \rightarrow H$ 为 Lipschitz 连续 (Lipschitz 常数为 $\gamma > 0$), 如果满足

$$\left| \rho - \frac{\alpha - \gamma + k\gamma}{\beta^2 - \gamma^2} \right| \leq \frac{\sqrt{(\alpha - \gamma + k\gamma)^2 - (\beta^2 - \gamma^2)(2k - k^2)}}{\beta^2 - \gamma^2}$$

$$\alpha - \gamma + k\gamma > \sqrt{(\beta^2 - \gamma^2)(2k - k^2)} \quad (11)$$

其中 $\frac{k}{2} = \sqrt{1 - 2\sigma + \delta^2} < 1$, 则存在 $z \in H$ 满足

Wiener-Hopf 方程 (5) 式, 且由算法 1 产生的序列 $\{z_n\}$ 强收敛于 z_0 .

证明 由算法 1, 有

$$\|z_{n+1} - z_n\| = \|g(u_n) - g(u_{n-1}) - \rho(Tu_n - Tu_{n-1}) - \rho(Au_n - Au_{n-1})\| \leq \|u_n - u_{n-1} - (g(u_n) - g(u_{n-1}))\| + \|u_n - u_{n-1} - \rho(Tu_n - Tu_{n-1})\| + \rho\|Au_n - Au_{n-1}\|.$$

由于 T 是强单调和 Lipschitz 连续的, 则

$$\|u_n - u_{n-1} - \rho(Tu_n - Tu_{n-1})\|^2 \leq \|u_n - u_{n-1}\|^2 - 2\rho\langle Tu_n - Tu_{n-1}, u_n - u_{n-1} \rangle + \rho^2\|Tu_n - Tu_{n-1}\|^2 \leq (1 - 2\rho\alpha + \rho^2\beta^2)\|u_n - u_{n-1}\|^2 \quad (12)$$

同理, 有

$$\|u_n - u_{n-1} - (g(u_n) - g(u_{n-1}))\|^2 \leq (1 - 2\sigma + \delta^2)\|u_n - u_{n-1}\|^2 \quad (13)$$

由于 A 是 Lipschitz 连续的, 则

$$\|Au_n - Au_{n-1}\| \leq \gamma\|u_n - u_{n-1}\| \quad (14)$$

由 (12) ~ (14) 式, 有

$$\|z_n - z_{n-1}\| \leq (\sqrt{1 - 2\rho\alpha + \rho^2\beta^2} + \sqrt{1 - 2\sigma + \delta^2} + \rho\gamma)\|u_n - u_{n-1}\| \quad (15)$$

令 $\frac{k}{2} = \sqrt{1 - 2\sigma + \delta^2}$, 由 $g(u_n) = P_K(z_n)$ 以及

P_K 是非扩张映象, 有

$$\begin{aligned} & \|u_n - u_{n-1}\| = \\ & \|u_n - u_{n-1} - (g(u_n) - g(u_{n-1})) + (P_K(z_n) - P_K(z_{n-1}))\| \leq \|u_n - u_{n-1} - (g(u_n) - g(u_{n-1}))\| + \|(P_K(z_n) - P_K(z_{n-1}))\| \leq \\ & \frac{k}{2}\|u_n - u_{n-1}\| + \|z_n - z_{n-1}\| \end{aligned}$$

因此, $\|u_n - u_{n-1}\| \leq \frac{1}{1 - \frac{k}{2}}\|z_n - z_{n-1}\| \quad (16)$

由 (15), (16) 式, 有

$$\|z_{n+1} - z_n\| \leq \frac{\frac{k}{2} + \sqrt{1 - 2\rho\alpha + \rho^2\beta^2} + \rho\gamma}{1 - \frac{k}{2}}.$$

$$\|z_n - z_{n-1}\| = \theta\|z_n - z_{n-1}\| \quad (17)$$

$$\text{其中 } \theta = \frac{\frac{k}{2} + \sqrt{1 - 2\rho\alpha + \rho^2\beta^2} + \rho\gamma}{1 - \frac{k}{2}}, \text{ 由条件}$$

(11) 式知 $0 < \theta < 1$, 由 (17) 式可知 $\{z_n\}$ 是一柯西序列, 即 $\exists z \in H$, 当 $n \rightarrow \infty$, 有 $z_n \rightarrow z_0$.

由于 T, A, g, P_K 是连续的, 以及算法 1, 有

$$z = P_K z - \rho(Tu + Au) = P_K z - \rho(Tg^{-1}P_K z + Ag^{-1}P_K z) \in H_0.$$

于是满足 Wiener-Hopf 方程 (5) 式, 且 $z_n \rightarrow z_0$ 该定理得证。证毕

关于算法 2、算法 3、算法 4 的收敛性分析类似讨论。

参考文献:

- [1] NOOR M A. Some Developments in General Variational Inequalities [J]. Applied Mathematics and Computation, 2004, 152: 199-277.
- [2] NOOR M A. An Iterative Technique for Generalized Strongly Nonlinear Complementarity Problems [J]. Applied Mathematics Letters, 1999 (12): 75-79.
- [3] NOOR M A. Change of Variable Method for Generalized Complementarity Problems [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1999, 100: 389-395.
- [4] NOOR M A. Some Recent Advances in Variational Inequalities, Part 1, Basic Concepts [J]. New Zealand J Math, 1997, 26: 53-80.
- [5] NOOR M A. Some Recent Advances in Variational Inequalities, Part 2, Other Concepts [J]. New Zealand J Math, 1997, 26: 229-225.
- [6] VAN BOKHOVEN W M. A Class of Linear Complementarity Problems is Solvable in Polynomial Time [C]. Tech Report, Department of Electrical Engineering, Eindhoven, Holland: Technical University, 1980.
- [7] NOOR M A. Iterative Methods for a Class of Complementarity Problems [J]. J Math Anal Appl, 1988, 133: 366-382.
- [8] ZARAE S, NOOR M A. An Iterative Scheme for Complementarity Problems [J]. Engineering Analysis, 1986 (3): 221-224.
- [9] COTTLE R W, PENG J S, STONE R E. The Linear Complementarity Problem [M]. New York: Academic Press, 1992.
- [10] GIANNESI F, MAUGERI A. Variational Inequalities and Network Equilibrium Problems [M]. New York: Plenum Press, 1995.

[11] NOOR M A. Fixed Points Approach for Complementarity Problems[J]. J Math Anal Appl, 1988,133 437-448.

[12] NOOR M A. Generalized Wiener-Hopf Equations and Nonlinear Quasi Variational Inequalities [J]. Pan Amer Math J, 1992,2 (4) 51-70.

[13] NOOR M A. Wiener-Hopf Equations and Variational Inequalities[J]. J Optim Theory Appl, 1993,79 197- 206.

[14] ROBINSON S M. Normal Maps Induced by Linear Transformations[J]. Math Oper Res,1992,17 691-714.

(责任编辑 黄 颖)