

一类特殊连通图的最大亏格的下界*

盛秀艳

(聊城大学 数学科学学院, 山东 聊城 252059)

摘要 主要考虑了一些特殊连通图(即含有 O -型点或 Π -型对点的连通图)的最大亏格的下界,得到了 $\frac{1}{3}\beta(G)$ 是一些特殊连通图的最大亏格的下界。

关键词 连通图; Betti 亏数; 最大亏格; 上可嵌入性

中图分类号: O157.5

文献标识码: A

文章编号: 1672-6693(2006)03-0040-02

The Lower Bounds of the Maximum Genus of a Class of Special 1-connected Graphs

SHENG Xiu-yan

(College of Mathematics Science, Liaocheng University, Liaocheng Shandong 252059, China)

Abstract It is focussed in this paper the lower bounds of the maximum genus of some special connected graphs(that is, the connected graphs with O -vertex or of Π -vertex) and comes to the conclusion that $\frac{1}{3}\beta(G)$ is the lower bound of the maximum genus of the graphs mentioned above.

Key words 1-connected graph; Betti deficiency number; maximum genus; upper embeddable

1 预备知识

设 $G=(V, E)$ 是一个连通图, $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示 G 的点集和边集, G 的最大亏格记为 $\gamma_M(G)$, 是指 G 所有可 2-胞腔嵌入的定向曲面的最大者。这里曲面是指一个连通紧致的二维闭流形。由 Euler 公式易得 $\gamma_M(G) \leq \lfloor \frac{\beta(G)}{2} \rfloor$ 。这里 $\beta(G) = |E(G)| - |V(G)| + 1$ 称为 G 的圈秩数(或 Betti 数) $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数。如果 $\gamma_M(G) = \lfloor \frac{\beta(G)}{2} \rfloor$ 则图 G 称为上可嵌入。令 T 是连通图 G 的一棵生成树, 如果 K 有奇数条边, $G - E(T)$ 的一个连通分支 K 称为奇度分支, 否则 K 称为偶度分支。记号 $\zeta(G, T)$ 表示 $G - E(T)$ 中所有奇度分支的个数, 称 $\zeta(G) = \min_T \zeta(G, T)$ 为 G 的 Betti 亏数, 这里 \min 取遍 G 的所有生成树, 若 $\zeta(G, T) = \zeta(G)$, 则称 T 为最优生成树。由定义, 对 G 的任意支撑树 T , 均有 $\beta(G) \equiv$

$\zeta(G, T) \equiv \zeta(G) \pmod{2}$ 。又设 $A \subseteq E(G)$ 为图 G 的一个边子集, 记号 $G - A$ 表示从 G 中去掉边子集 A 后所得到的图, 记号 $\alpha(G - A)$ 及 $\kappa(G - A)$ 分别表示 $G - A$ 的所有连通分支数及 $G - A$ 的具有 Betti 数为奇数的所有连通分支数。

文献 [1][2] 用 $\zeta(G)$ 和 $\beta(G)$ 给出了一个图的最大亏格表达式。

引理 1^[1,2] 设 G 为图, 则 (i) $\gamma_M(G) = \frac{\beta(G) - \zeta(G)}{2}$ (ii) G 是上可嵌入的当且仅当 $\zeta(G) \leq 1$ 。

定理 1^[3] 设 G 为图, 则 $\zeta(G) = \max_{A \subseteq E(G)} \{ \alpha(G - A) + \kappa(G - A) - |A| - 1 \}$ 。

在图的最大亏格的研究中, 一个重要的问题是给出最大亏格的较好下界。文献 [4][5] 中利用边连通度和点连通度给出了最大亏格的下界。

引理 2^[4,5] 设 G 为 2-边连通或 3-边连通简单图, 且图 G 的最小度 $\delta(G) \geq 3$, 则 $\gamma_M(G) \geq$

* 收稿日期 2005-12-19

作者简介 盛秀艳(1978-), 女, 山东临清人, 助教, 硕士, 研究方向为图论及组合最优化。

$$\frac{1}{3}\beta(G).$$

Huang 在文献 [6] ~ [8] 中证明了 3-边连通图(可以含有重边或环)的下界,从而解决了 Chen 在 1996 年提出的问题. 本文对特殊的连通图(即含有 O-型点或 II-型对点的连通图)的最大亏格进行了研究. 下面先介绍两种运算:从图 G 中删去 O-型点 w 及其关联的边,然后连接 xy,称为删去 O-型点 w;从图 G 中删去 II-型对点(u, v)及其关联的边,然后连接 xy,称为删去 II-型对点(u, v).

在删去 O-型点 w 的运算中,由于 G 的任意一棵最优生成树都含有边 xw, yw, 因此 $\frac{G}{\{e\}}$ 的所有连通分支数恰好比 $\frac{\{e\}}{E(T)}$ 多 1, 即 $\zeta(G) = \zeta\left(\frac{G}{\{e\}}\right) + 1$, 又

$$\beta(G) = \beta\left(\frac{G}{\{e\}}\right) + 1, \text{从而由 Euler 公式 } \gamma_M(G) = \gamma_M\left(\frac{G}{\{e\}}\right).$$

同理,从图 G 中删去 II-型对点(u, v)的运算,也不改变图的最大亏格.

由上可以看出,如果把 II-型对点(u, v)看成一个新的顶点,则它是 E 二度顶点. 若把 O-型点 w 上的环去掉,则得到一个二度顶点. 删去 O-型点 w 和 II-型对点(u, v)的运算与删去二度点的运算类似,称为广义的删去二度点的运算.

2 主要结论及其证明

定理 2 设 G 为连通图, w 为 G 的 O-型点, G* 为由 G 去掉 w 所得图, 则 $\gamma_M(G) - 1 \leq \gamma_M(G^*) \leq \gamma_M(G)$.

证明 设 T 是 G 的最优生成树, 见如图 1. 则有 $xw \in T, wy \notin T$ (或 $wy \in T, xw \notin T$) 和 $xw \in T, wy \in T$ 两种情况:

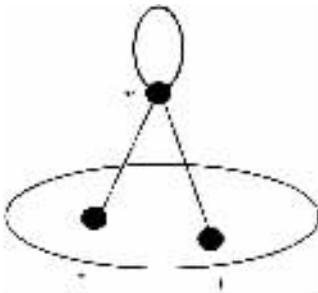


图 1 O-型点 w

F, 显然 F 与 $\frac{F}{\{e, wy\}}$ 的奇偶性相同, 故 $\zeta(G) = \zeta(G^*)$, 又 $\beta(G^*) = \beta(G) - 2$, 从而 $\gamma_M(G^*) = \gamma_M(G) - 1$;

2) 设 $xw \in T, wy \in T$, 则树 $T^* = \frac{T}{\{xw, wy\}}$ 不是 G* 的生成树, 但 T* 包含在 G* 的某最优生成树中, 因为 x, y 中必然有一点不在 T* 中, 不妨设 $y \notin V(T^*)$, 故 $N_{G^*}y$ 必有一条边 e 与 T* 共同构成 G* 的最优生成树, 设 $N_{G^*}y$ 在 $\frac{G}{T}$ 的连通分支 F 中, 若 F 为偶, 则 $\frac{F}{e}$ 为 G* 的奇连通分支, 所以此时有 $\zeta(G) = \zeta(G^*)$, 又 $\beta(G^*) = \beta(G) - 2$, 从而 $\gamma_M(G^*) = \gamma_M(G) - 1$. 若 F 为奇的, 则 $\frac{F}{e}$ 为 G* 的偶连通分支, 此时 $\zeta(G^*) = \zeta(G) - 2$, 又 $\beta(G^*) = \beta(G) - 2$, 从而 $\gamma_M(G^*) = \gamma_M(G)$. 证毕

推论 1 设 G 为连通图, w 为 G 的 O-型点, G* 为由 G 去掉 w 所得图, 且 G* 为 2-连通不含 O-型点和 II-型对点的图, 则 $\gamma_M(G) \geq \gamma_M(G^*) \geq \frac{1}{3}\beta(G) - \frac{2}{3}$.

定理 3 设 G 为连通图, {u, v} 为 G 的 II-型对点, G* 为由 G 去掉 {u, v} 所得图, 则 $\gamma_M(G) - 1 \leq \gamma_M(G^*) \leq \gamma_M(G)$.

证明 设 T 是 G 的最优生成树, 如图 2. 则有 $ux, \rho_1 \in T, \rho_2 \notin T$ 或者 $ux, \rho_2 \in T, \rho_1 \notin T$ 或者 $ux, \rho_1, \rho_2 \in T$ 这 3 种情况:

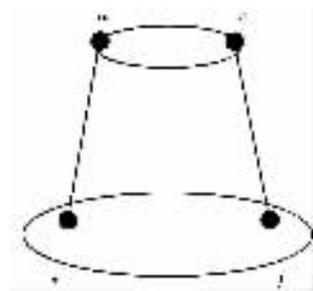


图 2 II-对点 {u, v}

1) 若 $ux, \rho_1 \in T, \rho_2 \notin T$, 则 vy, ρ_2 在 $\frac{G}{T}$ 的连通分支 F 中, 显然 F 与 $\frac{F}{vy, \rho_2}$ 的奇偶性相同, 从而 $\zeta(G) = \zeta(G^*)$, 又 $\beta(G^*) = \beta(G) - 2$, 从而 $\gamma_M(G^*) = \gamma_M(G) - 1$.

1) 设 $xw \in T, wy \notin T$, 则 e, wy 在 $\frac{G}{T}$ 的连通分支

基于初值修正的非等距灰色预测模型*

王丰效

(陕西理工学院 数学系, 陕西 汉中 723000)

摘要 对非等间距灰色模型的预测精度进行了分析,表明初值的选取对模型的精度有重要的影响,进而提出了两种修正初值的方法来提高模型预测精度,得到了一类改进的灰色预测模型。最后给出了一个应用实例,结果表明,该改进模型具有较高的预测精度。

关键词 灰色模型;初值;预测精度;非等间距

中图分类号:O159

文献标识码:A

文章编号:1672-6693(2006)03-0042-03

Unequal Interval Grey Forecast Models Based on the Modificatory Initial-Value

WANG Feng-xiao

(Dept. of Mathematics, Shanxi University of Technology, Hanzhong Shanxi 723000, China)

Abstract The forecast precision of unequal interval grey model is analyzed. It shows that the selection of initial value has an important effect on the model's precision. Then the improvement of unequal interval grey forecast models are put forward based upon the methods of modificatory initial value for advancing the degrees of forecasting accuracy. Finally an application example is presented, the application results show that the improved model possesses higher degree of forecasting accuracy.

Key words grey model; initial value; prediction precision; unequal interval

灰色系统是指部分信息已知部分信息未知的系统。社会经济、工业、农业、生态等系统中广泛存在着灰色系统。自1982年邓聚龙教授创立灰色系统理论以来,灰色系统理论得到了广泛应用,并取得了显著效果。在灰色系统理论的应用中预报或预测已成为灰色系统理论的一个最活跃领域。对于等间距的GM(1,1)模型已经进行了广泛深入的探讨,取得了丰富的成果。然而,在实际应用时所获取的原始数据可能是不完备的,可能缺少部分原始数据,因而出现非等距的情况。文献[1]提出了一种非等距的灰色预测方法,该方法利用原始数据序列拟合一条比较理想的逼近曲线,据此建立离散预测模型。文献[2]通过对原始数据序列的一次累加生成时将序列的间距作为乘子,采用和GM(1,1)模型相同的方法建立了非等间距灰色预测模型。由于背景值构造方法是影响预测精度和适应性的关键因素,文献[3]给出了关于背景值的一个新的计算公式,进而

提出了一类改进的非等间距灰色预测模型。

本文首先对非等间距灰色预测模型的预测精度进行了分析,说明模型初值的选择对模型的预测精度也有着重要影响,进而提出了可以提高预测精度的修正初值的方法。最后,给出了一个应用实例,结果表明通过初值的修正能够提高预测模型的预测精度。

1 非等间距灰色预测模型精度分析

假定非等间距原始数据序列为 $X^{(0)}(k_i) = \{x^{(0)}(k_1), x^{(0)}(k_2), \dots, x^{(0)}(k_n)\}$, 其一次累加生成序列 $X^{(1)}(k_i) = \{x^{(1)}(k_1), x^{(1)}(k_2), \dots, x^{(1)}(k_n)\}$, 其中 $x^{(1)}(k_i) = \sum_{j=1}^i x^{(0)}(k_j) \Delta k_j$, $\Delta k_j = k_j - k_{j-1} (j=1, 2, \dots, n)$ 。

定理1^[2] 非等间距数据序列 $X^{(0)}(k_i)$ 的一次累加生成序列 $X^{(1)}(k_i)$ 建立白化微分方程:

* 收稿日期 2006-02-13

资助项目 陕西理工学院科研基金项目(No. XY0108, SLG0422)

作者简介 王丰效(1965-)男,陕西礼泉人,副教授,博士研究生,研究方向为保险精算、金融数学。

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + ax^{(1)}(t) = u, t \in [0, \infty) \quad (1)$$

若规定 $t = k_i$ 时 $x^{(1)}(k_i) = x^{(0)}(k_i)$ 则响应函数为

$$\hat{x}^{(1)}(k_i) = \left(x^{(0)}(k_1) - \frac{u}{a} \right) e^{-\alpha(k_i - k_1)} + \frac{u}{a}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (2)$$

还原后模型表达式为

$$\hat{x}^{(0)}(k_{i+1}) = \frac{1}{\Delta k_{i+1}} (1 - e^{-\alpha \Delta k_{i+1}}) \cdot \left(x^{(0)}(k_1) - \frac{u}{a} \right) e^{-\alpha(k_{i+1} - k_1)} + \frac{u}{a}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (3)$$

上述模型中参数 a 和 u 可由下式得到 $[a, \mu]^T = (B^T B)^{-1} B^T Y$ 其中

$$B = \begin{bmatrix} -\bar{y}(k_2) & 1 \\ -\bar{y}(k_3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -\bar{y}(k_n) & 1 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} x^{(0)}(k_2) \\ x^{(0)}(k_3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(k_n) \end{bmatrix}$$

注意到 $\bar{y}(k_{i+1})$ 为 $x^{(1)}(t)$ 在区间 $[k_i, k_{i+1}]$ 的背景值。背景值可以采用文献[3]的计算公式,也可以采用传统的背景值计算公式。

从公式(2)或(3)中可以看出:非等间距灰色预测模型拟合和预测的精度除了取决于常数 a 和 u 之外,初值的选择对该模型的预测精度也有一定影响。因此,合理选择初值可以提高模型的拟合和预测精度。传统的初值选用原始数据序列的第一个数据值没有理论依据,在运用中会降低模型的建模精度和预测精度。本文在平方误差最小化的原则下提出了两种修正初值的方法。

2 初值修正方法

2.1 修正方法1

假定初值为 $\alpha x^{(0)}(k_1)$ (α 为待识别参数),代入(2)可得时间响应函数为

$$\hat{x}^{(1)}(k_i) = \left(\alpha x^{(0)}(k_1) - \frac{u}{a} \right) e^{-\alpha(k_i - k_1)} + \frac{u}{a},$$

表1 钛合金疲劳强度与温度的关系

温度	100	130	170	210	240	270	310	340	380
疲劳强度	560.00	557.54	536.10	516.10	505.60	486.10	467.40	453.80	436.40

这是一个非等间距原始数据序列,由 $[a, \mu]^T = (B^T B)^{-1} B^T Y$, 利用数学软件 Matlab 可得计算结果为 $\hat{a} = 0.00098$, $\hat{\mu} = 566.0334$ 。

首先,初值修正方法1(即预测模型(4)),由公式(6)可得辨识参数 α 的估计值为 $\hat{\alpha} = 0.999375$,

$$i = 1, 2, \dots \quad (4)$$

还原后模型表达式为

$$\hat{x}^{(0)}(k_{i+1}) = \frac{1}{\Delta k_{i+1}} (1 - e^{-\alpha \Delta k_{i+1}}) \cdot$$

$$\left(\alpha x^{(0)}(k_1) - \frac{u}{a} \right) e^{-\alpha(k_{i+1} - k_1)}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (5)$$

定义如下指标函数

$$J = \sum_{i=1}^n (x^{(0)}(k_i) - \hat{x}^{(0)}(k_i))^2$$

为了确定辨识参数 α , 利用指标函数最小化(即误差平方和达到最小)。令 $\frac{dJ}{d\alpha} = 0$ 可得参数 α 的估计值,有了辨识参数的估计值表达式(6),代入(4)和(5)就得到了改进的非等间距灰色预测模型。

2.2 修正方法2

考虑到原始数据序列与时间序列之间具有很强的相依性,因此在选择初值时,添加时间项 k_i , 即假定初值为 $x^{(0)}(k_1) + \alpha_1 k_1 + \alpha_2$ (α_1 和 α_2 为待识别参数),代入(2)可得时间响应函数为

$$\hat{x}^{(1)}(k_i) = \left(x^{(0)}(k_1) + \alpha_1 k_1 + \alpha_2 - \frac{u}{a} \right) e^{-\alpha(k_i - k_1)} + \frac{u}{a}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (6)$$

同样利用指标函数 $J = \sum_{i=1}^n (x^{(0)}(k_i) - \hat{x}^{(0)}(k_i))^2$ 达到最小确定参数 α_1 和 α_2 的估计值 $\hat{\alpha}_1$ 和 $\hat{\alpha}_2$ (具体计算公式略),从而得到了另外一种改进的非等间距灰色预测模型(6)。

3 应用实例

为了说明本文所建立的灰色组合预测模型的预测精度,进一步检验对原始数据序列的预测特性和预测精度,这里选择文献[2]中的一个共同例子,算例中给出了钛合金疲劳强度随温度的变化数据见表1。

代入(4)和(5)可得计算拟合结果见表2。

利用初值修正方法2(即预测模型(6)),辨识参数 α_1 和 α_2 的估计值 $\hat{\alpha}_1 = 0.012$ 和 $\hat{\alpha}_2 = -1.214$, 代入(6)可得拟合结果见表2。

下面讨论模型的检验,假定 $x(k_i) = x^{(0)}(k_i) -$

表2 几种方法的拟合估计值

温度	100	130	170	210	240	270	310	340	380
原始数据	560.00	557.54	536.10	516.10	505.60	486.10	467.40	453.80	436.40
文献[2]结果	560.00	557.21	538.35	517.55	500.01	485.45	469.02	453.11	437.78
模型(4)结果	560.27	557.62	536.49	516.28	499.20	485.02	469.01	453.49	437.52
模型(7)结果	560.18	557.45	536.14	516.41	499.92	485.40	469.02	453.37	437.50

$x^{(0)}(k_i)$ 为模型残差, $X^{(0)}(k)$ 的均值和方差分别为 $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x^{(0)}(k_i)$ 和 $s_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x^{(0)}(k_i) - \bar{x})^2$, 而残差的均值和方差分别为 $\bar{e} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e(k_i)$ 和 $s_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (e(k_i) - \bar{e})^2$ 。称 $C = \frac{s_2}{s_1}$ 为均方差比值, $p = P(|e(k) - \bar{e}| < 0.6745s_1)$ 称为小误差概率。关于模型精度检验等级见文献[2]的表2。

为了比较组合预测模型的预测精度和单项预测模型之间的好坏, 分别计算各种预测方法的平均相对误差、均方差比值、小误差概率, 计算结果为: 文献[2]方法的平均相对误差、均方差比值、小误差概率为0.0031、0.35、0.95, 模型(4)方法的平均相对误差、均方差比值、小误差概率为0.0027、0.33、0.96, 模型(7)方法的平均相对误差、均方差比值、小误差概率为0.0028、0.34、0.96, 结果表明初值修正方法能够提高预测精度, 这两种修正初值模型的精度检验等级均为一级。

4 结论

首先对非等间距灰色预测模型的预测精度进行了分析, 说明模型初值的选择对模型的预测精度也有着重要影响, 进而提出了可以提高预测精度的修正初值的方法。最后给出了一个应用实例, 结果表明通过初值的修正能够提高预测模型的预测精度。

参考文献:

- [1] 胡斌, 曾学贵. 不等时距灰色预测模型[J]. 北方交通大学学报, 1998, 22(1): 34-37.
- [2] 王钟羨, 吴春笃, 史雪荣. 非等间距序列的灰色模型[J]. 数学的实践与认识, 2003(10): 16-20.
- [3] WANG F X. Improvement on Unequal Interval Gray Forecast Model[J]. Proceedings of the Second Conference on Fuzzy Information and Engineering 2006, 6(1): 118-123.

(责任编辑 游中胜)