库仑修饰势在原子散射中的引用分析*

胡先权[1],欧红叶[1],殷 霖[1],李芳昱[2]
(1. 重庆师范大学 物理学与信息技术学院,重庆 400047;2. 重庆大学 数理学院,重庆 400044)

摘 要:对弱外光场条件下修饰势的引入进行分析、推导,得到仅当自由电子的颤动半径小于原子尺度时,才能引入分数形式修饰势的结论。

关键词:散射;库仑势;修饰势;颤动半径
中图分类号:O562;O413 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-6693(2006)04-0001-05

Analysis of the Introducing of the Coulomb Dressed Potential in Atom Scattering

HU Xian-quan[1], *OU Hong-ye*[1], *YIN Lin*[1], *LI Fang-yu*[2]
(1. College of Physics and Information Technology, Chongqing Normal University, Chongqing 400047;
2. College of Physics and Mathematics, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: Through the introduction of the coulomb dressed potential in weak laser field, it is analysed and deduced that only when the quiver radius of the free electron is smaller than atomic scale, the conclusion of introducing fractional dressed potential can be true.

Key words: scattering; coulomb potential; dressed potential; quiver radius

1 修饰势的引入与当前存在的问题

1968 年 W. Henneberger 提出有效束缚势模型[1],用于求解原子受激光场作用在束缚态之间的跃迁;1973 年 M. Faisal 进一步数学化[2]。80 年代末期 L. Dimou 进一步发展为库仑修饰势模型[3],并且采用 FCC 耦合方法用于研究带电粒子与原子的库仑散射。L. Dimou 等人的库仑修饰势模型都是在电偶极近似下获得,而散射问题必须考虑电多极矩展开[4]。本文对包含电矢势作为相因子的指数函数作高于电偶极近似展开,对库仑修饰势的引入进行比较严谨的分析与推导,并对采用 FCC 耦合法求解径向波函数所满足的二阶线性微分方程组时仍然存在问题的连接条件进行了分析。

当类氢原子或者离子与单色激光场存在相互作用时,对激光场引入横波条件并采用 Hartree 原子单位,其 Schrödinger 方程为

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\boldsymbol{r},t) = \left(1 - \frac{1}{2}\Delta - \frac{Z}{r} + \frac{\mathrm{i}}{c}\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{A}(t) + \frac{A^2(t)}{2c^2}\right)\Psi(\boldsymbol{r},t) \tag{1}$$

$\hat{\boldsymbol{p}} = -\mathrm{i}\nabla$ 为动量算符,矢势 $\boldsymbol{A}(t)$ 为圆极化形式辐射场

$$\boldsymbol{A}(t) = A_0(\boldsymbol{\varepsilon}_x\cos(\omega t + \delta) - \boldsymbol{\varepsilon}_y\sin(\omega t + \delta)) \tag{2}$$

ω 为频率,δ 为初相位,$\boldsymbol{\varepsilon}_x$,$\boldsymbol{\varepsilon}_y$ 为 x,y 方向单位矢量,A_0 为弱矢势振幅。为了对哈密顿中的相互作用项进行分离,对波函数进行幺正变换

* 收稿日期:2006-08-15
资助项目:国家自然科学基金(No. 10575140);重庆市科委自然科学基金项目(2005BB8267);重庆市教育委员会科学技术研究项目(KJ060813)
作者简介:胡先权(1944-),男,四川双流人,教授,理论物理领衔硕士导师,研究方向为数学物理、理论物理。

$$\Psi(\boldsymbol{r},t) = \exp\left(-\mathrm{i}\int^t \mathrm{d}\tau\left(-\frac{\boldsymbol{A}(\tau)}{c}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} + \frac{1}{2c^2}A^2(\tau)\right)\right)\Phi(\boldsymbol{r},t) \tag{3}$$

文献[1] ~ [3] 均采用电偶极近似,由(3)式得出与(1)式等价的 Schrödinger 方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\boldsymbol{r},t) = \left(-\frac{1}{2}\Delta - \frac{Z}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\alpha}_0(t)|}\right)\Phi(\boldsymbol{r},t) \tag{4}$$

式中 $\boldsymbol{\alpha}_0(t) = \int^t \mathrm{d}\tau \frac{\boldsymbol{A}(\tau)}{c}$,$|\boldsymbol{\alpha}_0(t)| = \frac{A_0}{c\omega} = a$;$a$ 称为电子的颤动半径(quiver radius)。再对波函数 $\Phi(\boldsymbol{r},t)$ 作 Floquet 分波展开

$$\Phi(\boldsymbol{r},t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{LM}\exp[-\mathrm{i}Et + \mathrm{i}n(\omega t+\delta)]\frac{F_{nLm}(r)}{r}Y_L^M(\theta,\varphi) \tag{5}$$

可分离出耦合的径向方程组

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + K_n^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2Z}{(r^2+\alpha_0^2)^{1/2}}\right]F_{nlm}(r) = -2Z\sum_{\lambda=1,p=0}^{\infty,\lambda}\sum_{l'm'}\langle Y_{lm}|V_{\lambda_p}(\theta,\varphi)|Y_{l'm'}\rangle F_{n-\lambda_p,l',m'}(r) \tag{6}$$

其中 $\lambda_p = \lambda - 2p$,$k_n = [2(E-n\omega)]^{1/2}$,$V_{\lambda_p}$ 为电多极矩耦合势型[4]

$$V_{\lambda_p}(\theta,\varphi) = \frac{(2\lambda-1)!!}{2^\lambda\lambda!}\binom{\lambda}{p}\left[\frac{r\alpha_0\sin\theta}{r^2+\alpha_0^2}\right]^\lambda\frac{1}{(r^2+\alpha_0^2)^{1/2}}\exp(\mathrm{i}\lambda_p\varphi) \tag{7}$$

这里存在一个自洽性问题。(4)式的推导采用的是电偶极近似[1~3],涉及单光子跃迁;而(6)、(7)式采用的是电多极矩展开型[4],涉及多光子跃迁,显然两者不自洽。另外,对(4)、(6)式的求解还存在以下问题。为了求解 Floquet 分波函数 $F_{nlm}(r)$ 满足的常微分耦合方程组,文献[5] ~ [11] 涉及将修饰势 $\frac{Z}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\alpha}_0(t)|}$ 用勒让德函数[12] 展开

$$\frac{Z}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\alpha}_0(t)|} = \begin{cases}\dfrac{Z}{r}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^k P_k(\cos\theta') & r > a\\[2ex] \dfrac{Z}{a}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^k P_k(\cos\theta') & r < a\end{cases} \tag{8}$$

式中,$a = \frac{A_0}{\omega c}$,$\cos\theta' = \boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\Omega}_a$,而 $\boldsymbol{\Omega} = \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} = \boldsymbol{\Omega}(\theta,\varphi)$,$\boldsymbol{\Omega}_a = \frac{\boldsymbol{\alpha}_0(t)}{|\boldsymbol{\alpha}_0(t)|} = (\pi/2, \pi/2-\omega t-\delta)$。文献[9] ~ [11] 在求解耦合的径向方程组时,使用连接条件

$$F_{nlm}(r)\Big|_{r\to a-0} = F_{nlm}(r)\Big|_{r\to a+0},\quad F'_{nlm}(r)\Big|_{r\to a-0} = F'_{nlm}(r)\Big|_{r\to a+0}$$

事实上(8)式的推导出现了本末倒置,而且对于 $r < a$ 的情形不成立。因为根据动量算符和坐标算符的对易关系以及指数函数的幂级数展开式,在进行幺正变换的过程中,首先在等价的 Schrödinger 方程中出现的是(8)式右端的第一式,恰好可引用左端的修饰势表示,而(8)式右端的第二式在等价的 Schrödinger 方程中根本不会出现,因而(8)式对于 $r < a$ 的情形不成立。

2 等价 Schrödinger 方程中出现修饰势的推导

因为(1)式中的相互作用哈密顿 $\frac{\mathrm{i}}{c}\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{A}(t)$ 并不随散射距离的增加而消失,并且对于应用紧密藕合的渐近自由条件不方便,因而需作如(3)式所示的幺正变换,由(1)式得

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\boldsymbol{r},t) &= \exp\left(-\mathrm{i}\int^t\mathrm{d}\tau\left(-\frac{\boldsymbol{A}(\tau)}{c}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}+\frac{1}{2c^2}A^2(\tau)\right)\right)\left(-\frac{\boldsymbol{A}(\tau)}{c}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}+\frac{1}{2c^2}A^2(\tau)\right)\Phi(\boldsymbol{r},t) + \\ &\exp\left(-\mathrm{i}\int^t\mathrm{d}\tau\left(-\frac{\boldsymbol{A}(\tau)}{c}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}+\frac{1}{2c^2}A^2(\tau)\right)\right)\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\boldsymbol{r},t) = \\ &\left(-\frac{1}{2}\Delta - \frac{\boldsymbol{A}(t)}{c}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} + \frac{1}{2c^2}A^2(t) - \frac{Z}{r}\right)\exp\left(-\mathrm{i}\int^t\mathrm{d}\tau\left(-\frac{\boldsymbol{A}(\tau)}{c}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}+\frac{1}{2c^2}A^2(\tau)\right)\right)\Phi(\boldsymbol{r},t)\end{aligned} \tag{9}$$

在坐标表象中，电子的正则动量 $\hat{p}=-\mathrm{i}\nabla$，由(2)式知 $\nabla\cdot A(t)=0$，$A(t)\cdot\hat{p}-\hat{p}\cdot A(t)=\mathrm{i}\nabla\cdot A(t)=0$，即 $A(t)\cdot\hat{p}=\hat{p}\cdot A(t)$，但矢径 r 与 $\hat{p}$ 不对易。为了获得 $\Phi(r,t)$ 满足的简化微分方程，须考虑 $\left(-\frac{1}{2}\Delta-\frac{A(\tau)}{c}\cdot\hat{p}+\frac{1}{2c^2}A^2(\tau)-\frac{Z}{r}\right)$ 与 $\exp\left(-\mathrm{i}\int^t\mathrm{d}\tau\left(-\frac{A(\tau)}{c}\cdot\hat{p}+\frac{1}{2c^2}A^2(\tau)\right)\right)$ 之间的对易关系。由于在本文中 $A(t)$ 与 $\hat{p}$ 对易，r 与 $A(t)$ 对易，因而只须考虑 $-\frac{Z}{r}$ 与 $\exp\left(-\mathrm{i}\int^t\mathrm{d}\tau\left(-\frac{A(\tau)}{c}\cdot\hat{p}\right)\right)$ 之间的对易关系。

由于
$$-\frac{Z}{r}\exp\left(-\mathrm{i}\int^t\mathrm{d}\tau\left(-\frac{A}{c}\cdot\hat{p}\right)\right)=-\frac{Z}{r}\sum_j\frac{i^j}{j!}\left(\int^t\mathrm{d}\tau\left(\frac{A\cdot\hat{p}}{c^j}\right)\right)^j \tag{10}$$

当 $j=0$ 时，$-\frac{Z}{r}\times 1=1\times\left(-\frac{Z}{r}\right)$

当 $j=1$ 时，$-\frac{Z}{r}\frac{\mathrm{i}}{c}\int^t\mathrm{d}\tau(A\cdot\hat{p})=-\frac{\mathrm{i}Z}{r}\int^t\mathrm{d}\tau\frac{1}{r}A\cdot\hat{p}$　　(11)

根据坐标算符与动量算符的对易关系式
$$[f(x),\hat{p}_x]=f(x)\hat{p}_x-\hat{p}_xf(x)=\mathrm{i}\eta\frac{\partial}{\partial x}f(x)$$

有
$$\left[\frac{1}{r},A\cdot\hat{p}\right]=\sum_k\left[\frac{1}{r},A_k\hat{p}_x\right]=\mathrm{i}\sum_kA_K\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{r}=-\mathrm{i}\frac{A\cdot r}{r^3}$$

因而
$$\frac{1}{r}A\cdot\hat{p}=A\cdot\hat{p}\frac{1}{r}-\mathrm{i}\frac{A\cdot r}{r^3} \tag{12}$$

同理
$$\frac{A(\tau_1)\cdot r}{r^3}(A(\tau_2)\cdot\hat{p})=(A(\tau_2)\cdot\hat{p})\frac{A(\tau_1)\cdot r}{r^3}+\mathrm{i}\frac{A(\tau_1)\cdot A(\tau_2)}{r^3}-3\mathrm{i}\frac{(A(\tau_1)\cdot r)(A(\tau_2)\cdot r)}{r^5}$$
$$\frac{A(\tau_1)\cdot r}{r^5}(A(\tau_2)\cdot\hat{p})=(A(\tau_2)\cdot\hat{p})\frac{A(\tau_1)\cdot r}{r^5}+\mathrm{i}\frac{A(\tau_1)\cdot A(\tau_2)}{r^5}-5\mathrm{i}\frac{(A(\tau_1)\cdot r)(A(\tau_2)\cdot r)}{r^7}$$
……

将(12)式代入(11)式
$$-\frac{Z}{r}\frac{\mathrm{i}}{c}\int^t\mathrm{d}\tau(A\cdot\hat{p})=-\mathrm{i}\int^t\mathrm{d}\tau\frac{-A\cdot\hat{p}}{c}\left(-\frac{Z}{r}\right)+\int^t\mathrm{d}\tau\left(-\frac{ZA\cdot r}{cr^3}\right) \tag{13}$$

注意到时间 t 与位矢 r 为独立变量，在(13)式中
$$\int^t\mathrm{d}\tau\left(-\frac{ZA\cdot r}{cr^3}\right)=-Z\left|\int^t\mathrm{d}\tau\frac{A}{c}\right|\frac{|r|}{r^3}\cos\theta'=\left|\int^t\mathrm{d}\tau\frac{A}{c}\right|P_1(\cos\theta')\left(\frac{-Z}{r^2}\right)=P_1(\cos\theta')\left(\frac{-aZ}{r^2}\right)$$

θ' 为光矢与位矢之间的夹角。

(10)式右端的 $j=0,1$ 时加起来，得
$$-\frac{Z}{r}\sum_{j=0}^{1}\frac{i^j}{j!}\left(\int^t\mathrm{d}\tau\frac{A\cdot\hat{p}}{c}\right)^j=\sum_{j=0}^{1}\frac{(-i)^j}{j!}\left(\int^t\mathrm{d}\tau\left(-\frac{A\cdot\hat{p}}{c}\right)\right)^j\sum_{l=0}^{1}\left|\int^t\mathrm{d}\tau\frac{A}{c}\right|^lP_l(\cos\theta')\left(-\frac{Z}{r^{l+1}}\right)$$
$$+\mathrm{i}\int^t\mathrm{d}\tau\left(-\frac{A\cdot\hat{p}}{c}\right)\left|\int^t\mathrm{d}\tau\frac{A}{c}\right|P_l(\cos\theta')\left(-\frac{Z}{r^2}\right) \tag{14}$$

当(10)式中 $j=2$ 时
$$-\frac{Z}{r}\frac{\mathrm{i}^2}{2!}\int^t\mathrm{d}\tau\left(\frac{A\cdot\hat{p}}{c}\right)\int^t\mathrm{d}\tau\left(\frac{A\cdot\hat{p}}{c}\right)=\int^t\mathrm{d}\tau_1\frac{Z}{2c^2}\left(\frac{1}{r}A(\tau_1)\cdot\hat{p}\right)\int^t\mathrm{d}\tau_2(A(\tau_2)\cdot\hat{p})=$$
$$\frac{(-\mathrm{i})^2}{2!}\int^t\mathrm{d}\tau\left(-\frac{A\cdot\hat{p}}{c}\right)^2\left(-\frac{Z}{r}\right)-\mathrm{i}\int^t\mathrm{d}\tau\left(-\frac{A\cdot\hat{p}}{c}\right)\int^t\mathrm{d}\tau\left(-\frac{ZA\cdot r}{cr^3}\right)+$$
$$\left|\int^t\mathrm{d}\tau\frac{A(\tau)}{c}\right|^2\left(\frac{Z}{2r^3}\right)+\left(\int^t\mathrm{d}\tau\frac{A\cdot r}{Ar}\right)\left(-\frac{3Z}{2r^3}\right)$$

(10)式右端的 $j=0,1,2$ 时加起来，得

$$-\frac{Z}{r}\sum_{j=0}^{2}\frac{(i)^j}{j!}\left(\int^t d\tau\left(\frac{\boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}}{c}\right)\right)^j=\left(1-i\int^t d\tau\left(-\frac{\boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}}{c}\right)+\frac{(-i)^2}{2!}\left(\int^t d\tau\left(-\frac{\boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}}{c}\right)\right)^2\right)\left(-\frac{Z}{r}+\int^t d\tau\left(-\frac{Z\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}}{cr^3}\right)\right)-\frac{(-i)^2}{2!}\left(\int^t d\tau\left(\frac{\boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}}{c}\right)\right)^2\int^t d\tau\left(-\frac{Z\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}}{cr^3}\right)+\left|\int^t d\tau\frac{\boldsymbol{A}}{c}\right|^2P_2(\cos\theta')\left(-\frac{Z}{r^3}\right)=\sum_{j=0}^{2}\frac{(-i)^j}{j!}\left(\int^t d\tau\left(-\frac{\boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}}{c}\right)\right)^j\sum_{l=0}^{1}\left|\int^t d\tau\frac{\boldsymbol{A}}{c}\right|^lP_l(\cos\theta')\left(\frac{-Z}{r^{l+1}}\right)-\frac{(-i)^2}{2!}\left(\int^t d\tau\left(-\frac{\boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}}{c}\right)\right)^2\left|\int^t d\tau\left(\frac{\boldsymbol{A}}{c}\right)\right|P_1(\cos\theta')\left(-\frac{Z}{r^2}\right)+\left|\int^t d\tau\frac{\boldsymbol{A}}{c}\right|^2P_2(\cos\theta')\left(-\frac{Z}{r^3}\right)\tag{15}$$

可见(14)式中最后一项已经并入(15)式的求和项 Σ 中。

当(10)式中 $j=3$ 时,可求得

$$-\frac{Z}{r}\frac{i^3}{3!}\left(\int^t d\tau\left(\frac{\boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}}{c^3}\right)\right)^3=\frac{(-i)^3}{3!}\left(\int^t d\tau\left(\frac{\boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}}{c^3}\right)\right)^3\left(-\frac{Z}{r}\right)\frac{(-i)^2}{2!}\left(\int^t d\tau\left(\frac{\boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}}{c^3}\right)\right)^2\int^t d\tau\left(-\frac{Z\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}}{cr^3}\right)+\frac{i}{2}\int^t d\tau\left(-\frac{\boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}}{c^3}\right)\left|\int^t d\tau\frac{\boldsymbol{A}}{c}\right|^2\left(-\frac{Z}{r^3}\right)+(-i)\int^t d\tau\left(-\frac{\boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}}{c}\right)\left(\int^t d\tau\left(\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}}{cr^3}\right)\right)^2\left(-\frac{3Z}{2r^5}\right)-\left|\int^t d\tau\frac{\boldsymbol{A}}{c}\right|^2\int^t d\tau\left(\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}}{c}\right)\left(-\frac{3Z}{2r^5}\right)+\left(\int^t d\tau\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}}{c}\right)^3\left(-\frac{5Z}{2r^7}\right)$$

(10)式右端的 $j=0,1,2,3$ 时加起来,得

$$-\frac{Z}{r}\sum_{j=0}^{3}\frac{i^j}{j!}\left(\int^t d\tau\frac{\boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}}{c}\right)^j=\sum_{j=0}^{2}\frac{(-i)^j}{j!}\left(\int^t d\tau\frac{\boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}}{c}\right)^j\sum_{l=0}^{2}\left|\int^t d\tau\frac{\boldsymbol{A}}{c}\right|^lP_l(\cos\theta')\left(-\frac{Z}{r^{l+1}}\right)+\frac{(-i)^3}{3!}\left(\int^t d\tau\frac{\boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}}{c}\right)^3\left(-\frac{Z}{r}\right)+\left|\int^t d\tau\frac{\boldsymbol{A}}{c}\right|^3P_3(\cos\theta')\left(-\frac{Z}{r^4}\right)\tag{16}$$

可见(15)式中最后两项已经合并入(16)式的求和项 Σ 中。

分别求出(10)式中 $j=4,5\cdots$ 相应的对易关系。

(10)式右端的 $j=0,1,2,3,4$ 时加起来,得

$$-\frac{Z}{r}\sum_{j=0}^{4}\frac{i^j}{j!}\left(\int^t d\tau\frac{\boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}}{c}\right)^j=\sum_{j=0}^{3}\frac{(-i)^j}{j!}\left(\int^t d\tau\left(-\frac{\boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}}{c}\right)\right)^j\sum_{l=0}^{3}\left|\int^t d\tau\frac{\boldsymbol{A}}{c}\right|^lP_l(\cos\theta')\left(-\frac{Z}{r^{l+1}}\right)+\frac{(-i)^4}{4!}\left(\int^t d\tau\left(-\frac{\boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}}{c}\right)\right)^4\left(-\frac{Z}{r}\right)-\frac{(-i)^3}{3!}\left(\int^t d\tau\left(-\frac{\boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}}{c}\right)\right)^3\left|\int^t d\tau\frac{\boldsymbol{A}}{c}\right|^3P_3(\cos\theta')\left(-\frac{Z}{r^4}\right)+\cdots\tag{17}$$

可见(16)式中最后两项已经合并入(17)式的求和项 Σ 中。

利用逐步逼近法和极限的定义[13],有

$$\lim_{n\to\infty}-\frac{Z}{r}\sum_{j=0}^{n}\frac{i^j}{j!}\left(\int^t d\tau\frac{\boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}}{c}\right)^j=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-i)^j}{j!}\left(\int^t d\tau\frac{\boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}}{c}\right)^j\sum_{l=0}^{\infty}\left|\int^t d\tau\frac{\boldsymbol{A}}{c}\right|^lP_l(\cos\theta')\left(-\frac{Z}{r^{l+1}}\right)=\exp\left(-i\int^t d\tau\left(-\frac{\boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}}{c}\right)\right)\sum_{l=0}^{\infty}\left|\int^t d\tau\frac{\boldsymbol{A}}{c}\right|^l\left(-\frac{Z}{r^{l+1}}\right)P_1(\cos\theta')$$

即

$$-\frac{Z}{r}\exp\left(-i\int^t d\tau\left(-\frac{\boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}}{c}\right)\right)=\exp\left(-i\int^t d\tau\left(-\frac{\boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}}{c}\right)\right)\sum_{l=0}^{\infty}\left|\int^t d\tau\frac{\boldsymbol{A}}{c}\right|^l\left(-\frac{Z}{r^{l+1}}\right)\tag{18}$$

将(18)式代入(9)式,整理得

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\boldsymbol{r},t)=\left(-\frac{1}{2}\Delta+\sum_{l=0}^{\infty}\left|\int^t d\tau\frac{\boldsymbol{A}}{c}\right|^l\left(-\frac{Z}{r^{l+1}}\right)P_1(\cos\theta')\right)\Phi(\boldsymbol{r},t)\tag{19}$$

也即

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\boldsymbol{r},t)=\left(-\frac{1}{2}\Delta-Z\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a^l}{r^{l+1}}P_1(\cos\theta')\right)\Phi(\boldsymbol{r},t)$$

在 $r>a$ 的区域,根据勒让德母函数的定义[14] 有

$$Z\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a^l}{r^{l+1}}P_1(\cos\theta')=\frac{Z}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\alpha}_0(t)|}$$

在 $r<a$ 的区域

$$Z\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a^l}{r^{l+1}}P_1(\cos\theta')\neq\frac{Z}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\alpha}_0(t)|}$$

3　讨论与结论

1）本文对弱外光场条件下修饰势的引入进行精确到 4 光子作用过程的推导，比文献[2]、[3] 单光子作用过程的推导更严谨。本文还认为仅当自由电子的颤动半径小于原子尺度时,分数形式修饰势的引入才是可行的。

2）在进行如（3）式所示的幺正变换时，由于 $\frac{Z}{r}$ 与 $\left(\int^{t}\mathrm{d}\tau\left(\frac{\boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}}{c}\right)\right)^{j}$ 之间的对易不可能产生行如 $\frac{r^{k}}{a^{k+1}}P_{k}(\cos\theta')$ 的项,因而(5) 式对于 $r<a$ 的情形不成立。

3)(19) 式较之(4) 式更基本,进行推导与运算时不能本末倒置。

4）随径向坐标 r 的增加,修饰势因子 α_0 的作用逐渐减弱,当 $r\to\infty$ 时波函数满足纯库仑散射渐近条件。

5）对 $\Phi(\boldsymbol{r},t)$ 进行 Floquet 分波展开 $\Phi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{r}\sum_{nlm}F_{nlm}(r)Y_{lm}(\hat{r})\exp(-\mathrm{i}Et+\mathrm{i}n(\omega t+\delta))$，可得到 FCC 方程。为了求解,部分作者根据(8) 式将 FCC 方程分段求解,再利用连接条件 $F_{nlm}(r)\Big|_{r\to a-0}=F_{nlm}(r)\Big|_{r\to a+0}$，$F'_{nlm}(r)\Big|_{r\to a-0}=F'_{nlm}(r)\Big|_{r\to a+0}$ 求出待定常数。这种求解方法对于库仑修饰势不可取,也不严谨。如前所述,(8) 式右端的第二式在等价 Schrödinger 的方程中根本不会出现,因而(8) 式对于 $r<a$ 的情形不成立。事实上,求解 FCC 方程应充分利用 $r\to\infty$ 时波函数满足纯库仑散射渐近条件和 Whittaker 函数等特殊函数的性质[13],由简单耦合到复杂耦合,低阶近似到高阶近似,弹性散射到非弹性散射,逐步深入。

参考文献：

[1] HENNEBERGER W. Perturbation Method for Atoms in Intense Light Beams[J]. Phys Rev Lett,1968,21:838-841.
[2] FAISAL F H M. Multiple Absorption of Laser Photons by Atoms[J]. J Phys,1973,6(B):89-92.
[3] DIMOU L, FAISAL F H M. New Class of in the e + H^+ Scattering in an Excimer Laser Field[J]. Phys Rev Lett,1987,59:872-875.
[4] TAYLOR J R. Scattering Theory-the Quantum Theory on Nonrelativistic Collisions[M]. 耿天民，温源淇译. 北京:科学出版社，1987.
[5] LAMBRECHT U, DIMOU L,FAISAL F H M. Ab Initio Rates of Multiphoton Ionization of the Isoelectronic Species H, He^+, and Li^{2+} in The Vuv and Xuv Frequency Regions[J]. Phys Rev,1998,57(A):2832-2840.
[6] CIONGA A,DIMOU L. Laser-assisted Electron-Hydrogen Scattering at Low Impact Energies[J]. J Phys,1997,30(B):361-366.
[7] DONDERA M, FLORESCU A. Two-photo Free-free Transitions in Coulomb Field[J]. Phys Lett,1997,226(A):280-287.
[8] KRACKE G, BRIGGS J S, DUBOIS A. Two-photon Free-free Transitions in Laser-assisted Electron-hydrogen Scattering[J]. J Phys,1994,27(B):3241-3256.
[9] 李介平. 弱光场下电子与库仑势散射问题的弱耦合解法[J]. 物理学报，1990，39(8):1220.
[10] 李介平. 弱光场下电子与库仑势散射问题的微扰解[J]. 物理学报，1991，40(7):1034.
[11] 李介平. 氢原子的多光子共振电离[J]. 原子与分子物理学报，1997，14(1):47.
[12] 胡先权,马勇,王万录. 电偶极子的电荷禁闭[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2005,22(1):2.
[13] 胡先权，马勇. Floquet 分波法与修饰势的引入研究[J]. 原子与分子物理学报，2004，21(Sup):149-154.
[14] 王竹溪，郭敦仁. 特殊函数概论[M]. 北京:科学出版社,1979.

（责任编辑　欧红叶）