

# 从量子论到玻色 - 爱因斯坦统计\*

林 祯 祺

(重庆师范大学 物理学与信息技术学院, 重庆 400047)

摘 要: 爱因斯坦对量子论的理论基础及其应用作了大量工作, 玻色将对称性概念引入统计方法, 他们是量子统计理论的先驱, 特别是爱因斯坦对玻色 - 爱因斯坦凝聚的预言形成了凝聚态物理新的前沿方向。

关键词: 量子论; 爱因斯坦; 玻色; 量子统计; BEC

中图分类号: O4-09

文献标识码: A

文章编号: 1672-6693(2006)04-0045-05

## From Quantum Theory to Bose-Einstein Statistics

LIN Zhen-qi

(College of Physics and Information Technology, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

**Abstract** Einstein had made considerable effort on the research of Quantum theory and its application, and S. N. Bose introduced the idea of symmetry into the statistics, they are the founders of Quantum statistics, especially Einstein's work have directed the new frontiers of condensed state physics at present.

**Key words** quantum theory; Einstein; Bose; quantum statistics; BEC

1900 年 10 月 19 日, M. 普朗克在德国物理学会上提出了黑体辐射公式, 同年的 12 月 14 日, 普朗克发表了对黑体辐射公式的理论推导, 构成了量子论的基础。由于推导过程先后用到能量量子化假设与经典物理能量连续性条件, 包括普朗克在内的物理学家对此工作颇为不满。1905 年 3 月, 爱因斯坦在德国《物理学杂志》上发表《关于光的产生和转化的一个启发性观点》一文, 提出了光量子思想, 并用光量子概念解释了光电效应问题。1906 年 3 月和 11 月, 爱因斯坦又发表了两篇关于量子论的重要论文。这两篇文章都用不同的方法推导普朗克公式, 在 3 月的论文中, 完善了对光电效应的讨论, 在 11 月的论文里, 用量子理论很好地解释了低温下的固体比热容问题。1912 年 12 月, 爱因斯坦又在零点能假设基础上再次对普朗克公式进行了推导。1916 年, 爱因斯坦在建立物质对于光的吸收和发射理论基础, 重新对普朗克公式进行了推导, 确立光量子作为实体粒子, 有重大的理论意义。1911 年, 在以《辐射理论和量子》为中心议题的第一届索耳末会议后, 试图在新的基础上导出普朗克公式的论文像雨后春笋一样出现在各种物理杂志上<sup>[1]</sup>。

1924 年, 当时名不见经传的印度物理学高级讲师玻色, 在爱因斯坦的热忱帮助下, 在当时最具权威性的德国《物理学期刊》发表论文《普朗克定律和光量子假说》, 将具有交换对称性的光量子体系引入统计力学。爱因斯坦终于从玻色的论文中看到量子理论新的突破性进展——一种完全不依赖经典物理图像的数学理论。1924 年 9 月, 爱因斯坦在很短的时间内连续发表论文《单原子理想气体的量子理论(1)》、《(2)》, 下文简称论文(1)、(2)。爱因斯坦将这种统计方法进行推广, 从而确立了玻色 - 爱因斯坦量子统计理论。在上述论文中, 爱因斯坦预言: 随着总密度继续增加的分子数转变到没有动能的状态, 即一部份“凝结”起来, 其余的保持为一种“饱和的理想气体”, 这就是玻色 - 爱因斯坦凝聚, 简称为 BEC。目前, 这是凝聚态物理学的前沿热点。

### 1 爱因斯坦对量子论的贡献

1905 年 3 月, 爱因斯坦发表论文《关于光的产生和转化的一个启发性观点》<sup>[2]</sup>。论文是根据 W. 维恩黑体辐射公式  $\rho = \alpha v^3 e^{-\beta v/T}$ , 以高频单色波 ( $v/T$  的值很大) 与实验符合很好的事实作为基础, 利用

\* 收稿日期: 2006-02-17

作者简介: 林祯祺 (1949-) 男, 四川成都人, 副教授, 研究方向为量子力学、晶体场理论和物理学史。

统计力学中的玻耳兹曼原理,得出重要结论:能量密度小的单色辐射(在维恩辐射公式有效的范围内),从热学方面看来,就好像它是由一些互不相关的、大小为  $R\beta v/N$  的能量子组成。在解释光电效应上作出假设:一个光量子把它的全部能量给与了单个电子。这就是实际发生的情况,辐射场中的能量子即为光量子。普朗克的能量子假设只是作为推导黑体辐射公式的手段,而爱因斯坦的光量子是具有客观实体性质的粒子。这篇论文表明:对于时间平均值(即统计的平均现象),光表现为波动;但对于瞬时值(即涨落现象),光却表现为粒子。这显然同 19 世纪已取得绝对胜利并为大量实验所证实的光的波动性和麦克斯韦电磁理论相冲突,因此,他当时意识到这篇论文是“非常革命的”。论文最后用光量子概念轻而易举地解释了 1887 年 H. 赫兹发现的光电效应,推导出光电子的最大能量与入射光频率之间的关系。这一关系,10 年后才由 R. A. 密立根予以实验证实。由于“光电效应定律的发现”,爱因斯坦获得 1921 年的诺贝尔物理学奖<sup>[3]</sup>。对于辐射场的光量子与普朗克的能量子之间的关系,爱因斯坦是在一年后才清楚地认识到。1906 年 3 月,他发表论文《论光的吸收和发射》,文章引言的第二段“当时我认为,普朗克辐射理论在某个方面似乎同我的论文是相对立的。但是,我在本文 § 1 中所介绍的新的推论证明,普朗克先生的辐射理论所依据的理论基础不同于由麦克斯韦理论和电子论所得出的[理论]基础,而这正是由于普朗克理论暗中利用了刚才提到的光量子假说。”在文章的 § 1 部分,爱因斯坦引用了他在 1903 年论文《热力学基础理论》中的体系在绝对零度  $T$  时熵的表示,利用光量子概念推导出普朗克公式,得到的结论是:“因此我们必须认为,普朗克辐射理论是以下面的命题为基础的:基元振子的能量只能取  $R\beta v/N$  的整数倍这样的值;一个振子通过吸收和发射,其能量跳跃式的改变,并且正好是  $R\beta v/N$  的整数倍。……这表明,普朗克先生在他的辐射理论中给物理学引进了一个新的假说性元素——光量子假说。”这篇论文证实了量子论的理论基础是普朗克和爱因斯坦共同奠定的,论文的 § 2 部分完善了光电效应理论。

1906 年 11 月,爱因斯坦发表论文《普朗克的辐射理论和比热理论》。文章在引言一开始就强调:“我在以前发表的两篇论文中曾指出:—第二定律的玻耳兹曼理论的精神来解释黑体辐射的能量分布

定律,可以引导我们形成有关光的发射和吸收的新观点,这种观点虽然还远没有具备完善的理论的特征,但已值得引起严重的注意,因为它有助于对一系列规律性的理解。”爱因斯坦证明利用经典统计力学,热运动分子作为基元物质粒子的能量平均值,由此只能得出高温下,辐射能量密度趋于无穷大的瑞利公式。爱因斯坦认为,必须对经典统计方法进行修正:在相空间的不同相格中,只有具有分立能量  $0, \varepsilon, 2\varepsilon, \dots, n\varepsilon, \dots$  的才具有非零的相同的权重。这样物质粒子的平均能量表示为

$$\bar{E} = \frac{\int E e^{-NE/RT} \omega(E) dE}{\int e^{-NE/RT} \omega(E) dE} = \frac{\varepsilon}{e^{-Ne/RT} - 1},$$

这样又导出了普朗克辐射公式。爱因斯坦证明表明量子论的基础同样能建立在分子运动论上,应该有与量子论相适应的统计力学方法。他把这一思想运用于三维晶体点阵中的单原子振动,把它们看成是周期振荡的实体,得出每个克当量比热容公式

$$c = \frac{5.94 \sum e^{\frac{\beta v}{T}} \left(\frac{\beta v}{T}\right)^2}{e^{\frac{\beta v}{T}} - 1},$$

公式与当时的实验数据相当吻合,特别是低温下的比热特性,解释了杜隆-珀替定律在低温下与实验结果不符的原因。黑体辐射和固体比热容问题被英国物理学家凯尔文勋爵称为十九世纪物理学上空的两朵乌云,被量子论的旗手普朗克、爱因斯坦驱散了。

1916 年,爱因斯坦又发表一篇关于量子论的重要论文——《关于辐射的量子理论》,他称为“过去我在这个领域最成功的东西”<sup>[4]</sup>。爱因斯坦在给他的朋友贝索先生的信中写道:“重要的是,导出普朗克公式的统计学论证已经前后一致,人们对这种事已经能够有一个一般性的理解,这是由于对考虑中的分子的特殊结构,人们是从量子论的最一般概念出发的。这样得出的结果(在我寄给你的文章中还没有提到)是,在辐射和物质之间发生任何基元能量转换时,也就有动量  $h\nu/c$  传递给分子。因此,每一个这样的基元过程都是一种完全定向的过程。这样光量子的存在就肯定了。”首先,强调作为辐射吸收和发射光量子的运动过程“看作完全有方向的过程”,具有能量为  $\varepsilon$  的光量子与原子相互碰撞必然会交换动量  $\varepsilon/c$ ,即是光量子具有确切能量为  $\varepsilon = h\nu$  和动量为  $\vec{p} = \frac{h\nu}{c} \vec{n}$  粒子。这篇文章给出了光量子是实

在性粒子的定义,也给出了光具有波粒二象性的根据。在这篇论文里,爱因斯坦不但从一个新的角度推导了普朗克公式,而且建立了关于光的吸收和发射的半经典半量子理论,为激光理论奠定基础。

## 2 爱因斯坦对量子论的反思

1909年9月21日在萨尔斯堡的德国自然科学家协会第81次大会上,爱因斯坦作了《论我们关于辐射的本质和组成的观点的发展》的报告<sup>[5]</sup>。他在报告中指出:“最近实验上确定了在辐射理论中起如此重要作用的光压[现象],正是这种[光的电磁]理论的一个引伸。我不想在这里详尽地论述这个很著名的成就,而只想指出一个主要之点,在这一点上,电磁理论同[分子]运动理论是一致的,或者说得更恰当些,看来是一致的。”爱因斯坦后来将玻色的关于光量子态的统计方法,推广为普遍的玻色-爱因斯坦统计理论,是有长期的学术思想背景的。“于是相对论就这样改变了我们关于光的本质的观点:它不是把光理解为臆想媒质的状态的结果,而是理解为[象物质一样独立存在的某种东西。”爱因斯坦相信,只有确立光量子的实在性,量子论的基础才不会是空中楼阁。报告中,爱因斯坦分析了普朗克推导黑体辐射公式的过程:“我以为,普朗克理论所采纳的,正好是我们辐射理论基础所排斥的。”所以,爱因斯坦提出这样的问题:“是不是可以这样设想,尽管普朗克给出的辐射公式是正确的,但是对于这个公式还是可以作出另一种推导,这种推导不是基于象普朗克理论所顾忌的那个看起来多么难以置信的假设。难道光子假说不可能用另一个能够同样解释一切已知现象的假说来代替吗?”爱因斯坦在他的文章《科学家Max Planck》中写道:“以后,在1893年,W. Wien的重要论文发表了,……。Wien所得到的结果(位移定律)用表示为 $u = v^3 f\left(\frac{v}{T}\right)$ 。这里 $f$ 是一个变量 $\frac{v}{T}$ 的未知的普适函数。要是物理学家为这一普适函数而牺牲的所有脑汁可以拿来称一称的话,那么就可以看到一个人的场面,而这种残酷的牺牲仍然建不到尽头呀!不但如此,经典力学也成了它的牺牲品,而且也不能预料,Maxwell的电动力学方程是否能够渡过这个函数 $f$ 所引起的危机。”这里, $u$ 为单色辐射能量密度, $T$ 分别表示频率、热力学温度<sup>[6]</sup>。朗克为了得到黑体辐射公式,先以维恩公式和鲁本斯的实验结果为两个极限,拟合了普朗克公式。发现“在任何情况下

都令人满意的符合”。为了在理论上推导成功这个公式,普朗克假定:黑体腔内有 $N$ 个振子,每个振子的平均能量为 $u$ ,因此体系总能量等于 $Nu$ 。然后他又作了两个假定:体系总能量等于 $P_\varepsilon$ , $P$ 为很大的整数, $\varepsilon$ 是一个最小单位的能量。这个假定能量是不连续,破坏了经典物理的连续性原理,体系的总熵等于每个振子平均熵之和,等于 $k \ln W$ 。利用波尔兹曼统计理论导出普朗克公式,而且 $\varepsilon = hv$ 。在普朗克公式推导过程中,辐射能量密度 $\rho$ 的第一部分是用经典电动力学导出,是在振子的能量连续发布这一前提下得出的,第二部分则假定振子的能量是不连续的,以量子形式出现。先后互相矛盾。普朗克为牺牲经典物理学换来普朗克公式付出了巨大的代价。1918年7月29日,爱因斯坦在给贝索的通信中写道:“我在这里又花了很多时间去思考量子问题,当然没有什么真正进展。但是,对于辐射中的量子的实在性,我不再存疑,尽管至今只有我一个人有这种信念。只要还没有建立起一种数学理论,这种情况就会长期如此。”1923年7月11日在瑞典哥德堡(Gteborg),即爱因斯坦接受1921年诺贝尔物理学奖金的当天,在北方国家自然科学家代表会议作了《相对论的基本思想和问题》的报告。关于量子论,他说:“且不说量子论的困难,对于这些困难的解决实际上迄今为止的一切理论都显得无能为力。”

## 3 玻色-爱因斯坦统计理论的建立

爱因斯坦为量子论的理论基础及其应用作了大量卓有成效的工作,以及长期对量子论理论基础的思考,是玻色-爱因斯坦统计理论建立的一个重要因素。

1905年,爱因斯坦推测光子的存在,靠的是5年前普朗克提出的热辐射理论;19年后,玻色(Satyendra Nath Bose)证明普朗克的理论可以从爱因斯坦的光子理论推导出来。光子理论比其他任何关于热辐射的论断都更基本<sup>[7]</sup>。玻色当时是印度达卡大学的高级讲师。1923年,玻色将他的论文《普朗克定律和光子假说》寄给伦敦的《哲学杂志》,原稿被退回,不予发表。1924年玻色将论文原稿又寄给爱因斯坦,他在附信中写到:“尊敬的先生:我冒昧地随信寄上我的文章,希望您不吝赐教!您将明白我所推导的普朗克公式的系数……完全有别于用经典动力学的推导。”虽然这篇论文仅有4页,推导

普朗克辐射公式全新方法的论文得到爱因斯坦热情的认可。这位伟大的物理学家立刻意识到玻色工作的重大意义。论文由爱因斯坦从英文翻译为德文,积极地推荐并转递给德国《物理学期刊》,同时以译者的名义在论文后面这样一个评注:“在我看来,玻色对普朗克公式的推导意味着一个重要的进展。这里所用的方法也得出我要在别处阐述的关于理想气体的量子理论。”

1924年,玻色在爱因斯坦的举荐下发表论文《普朗克定律和光量子假说》。他的论文分两个部分:第一部分就是对量子论基础作出批判。论文研究了从1901年普朗克公式发表以来的许多种推导方法,都利用了用经典电动力学推导的与频率有关的函数因子,量子论基本假设是能量的不连续性与经典物理能量是连续发布的基本概念矛盾。玻色对此作出总结:“这就是所有推导中不能令人满意之点,因此总是一再有人企图作出没有这种逻辑缺陷的推导,也就不足为奇了。”论文重点分析了1916年爱因斯坦论文中的推导方法。虽然这个方法企图不依赖经典物理,用了分子同辐射场之间的能量交换假设,玻色指出推导过程利用了维恩的位移公式和玻尔的对对应原理,维恩公式是以经典物理为基础的。这种不可协调的矛盾是旧量子论基础的根本性弊端。玻色对量子论善意的学术批判,是针对量子论的基础——量子论假设与经典电动力学的不相容性,而不是量子论在物理学上的广泛使用。从论文中可以看出,玻色对量子论运用于光量子系统、原子系统等领域的成果是充分肯定的。第二部分就是建立新的力学统计基础。玻色从根本上认识到光量子态具有交换不变性这一点,把光量子假说和统计力学结合起来,推导出普朗克公式。玻色对这一公式推导的关键是用光子状态计数,而不是用光子数计数<sup>[8]</sup>,意味着与光子状态相同的其它粒子也满足同样的方法。这里玻色所说的统计力学不是经典物理中的麦克斯韦——玻耳兹曼统计。“在1924年下半年和1925年初,萨提恩德拉·纳兹·玻色和爱因斯坦都注意到了在(5f)提到过的经典统计力学有一种量子理论对应理论,现在称为玻色-爱因斯坦统计法,它有一些新的和激动人心的推论。”<sup>[9]</sup>这种统计法中,把总的相容积既分为大小为 $h^3$ 的相格,相格的总数必须看作是一个量子态在给定容积中可能排列的数目,在不知道粒子自旋概念的前提下,考虑偏振,将属于频率间隔 $dv$ 的相格数乘以2,即为

$$\frac{8\pi Vv^2 dv}{c^3} N^s \text{ 为属于频率间隔 } dv^s \text{ 的量子数 } p_0^s, p_1^s, p_2^s$$

...分别为真空相格数,含一个量子的相格数等等,可能的分配数为 $A^s / p_0^s! p_1^s! \dots$ ;这里 $A^s = \frac{8\pi v^2 dv}{c^3}$ ,每个相格可以包含任意个量子,确定了包括真空和若干量子态的(即 $n=0, 1, 2, \dots$ )各种相格数, $N^s = 0 \cdot p_0^s + 1 \cdot p_1^s + 2 \cdot p_2^s + \dots$ ,这样状态的统计学几率就是 $\prod_s A^s / p_0^s! p_1^s! \dots$ 。再利用光量子假设条件 $E = \sum_s N^s h\nu^s$ ,以及变法方法,就可得到状态熵,从而推导出普朗克黑体辐射公式。这个问题毕竟是经过大量物理学家艰苦工作而长期未能解决的问题。玻色以独特的科学视角,在光量子态的统计方法中引入了交换对称性这一关键性的概念,成为量子统计学的先驱者。关于玻色的生平有两个非常重要的史料:第一,爱因斯坦在收到S. N. 玻色的第一篇论文时,玻色对于爱因斯坦来说完全是个模糊的人物,而玻色的论文署名又没有名字的大写缩写(署名: Master Bose),所以爱因斯坦就误认为是J. C. 玻色的侄子D. 玻色,那时D. 玻色已经是知名的物理学家了。玻色-爱因斯坦的量子统计方法是用来处理不能区分的粒子,的确,当时的爱因斯坦也没有区分D. 玻色和S. N. 玻色。第二,玻色在1928年获得诺贝尔物理学奖提名,虽然结果并没有如愿<sup>[10]</sup>。70年后,玻色-爱因斯坦理论所预言的BEC的实现,是对玻色、爱因斯坦这一工作最好的肯定。

爱因斯坦终于从玻色的论文中看到量子理论新的突破性进展——一种完全不依赖经典物理图像的数学理论。1924年9月,爱因斯坦在很短的时间内连续发表论文《单原子理想气体的量子理论(1)、(2)》,简称论文(1)、(2)。他在文章中强调:“如果玻色对普朗克辐射公式的推导被认真地对待,那末人们也就不应该没有绕过这个理想气体理论,因为,如果把辐射理解为量子气体已经证明是正确的,那末量子气体同分子气体的类似性就必定是完整的了。”论文(1)主要是完善玻色-爱因斯坦量子统计理论,阐述理想气体“简并”理论。论文首先确定单原子分子体系小于给定能量值的一切状态的相容积,从而一定的能量微元区间的相隔数就确定了。与玻色论文中光子态占据相格情况完全对应,既每一个相格包含的分子数是任意的,这样体系统计意义的状态熵函数就表示出来了。从容积 $V$ 中分子数 $n$ 的几率表示和体系平均能量的几率表示推导出每

个相格的平均分子数,这样很容易得出分子数和平均能量的统计表示,从而完全确定热力学平衡条件下的宏观状态分布率,这就是爱因斯坦完善的被狄拉克1926年命名的玻色-爱因斯坦统计。用此统计方法得到宏观平衡状态熵的表示,从而体系相应热力学状态物理量就确定了。论文还对这种统计常温常压的极限情况对应经典统计可以是好的近似,在绝对零度极限时熵必须为零,所有分子都将在第一个相格,即只存在一种唯一的分子分布,对两种统计理论导出的气态方程作了比较,给出气体“简并性”量度的概念。论文(2)首先分析了在饱和理想气体给定容积 $V$ 的情况下,限定一种气体的分子数,如果温度不变而气体密度不断增加(如等温压缩)的情况,爱因斯坦预言随着总密度继续增加的分子数转变到没有动能的状态,即一部份“凝结”起来,其余的保持为一种“饱和的理想气体”,这就是玻色-爱因斯坦凝聚,简称为BEC。接着论述了玻色气体与经典理想气体的区别,其中说明玻色定义的状态是指明一个相格中有多少个分子(配容),从研究这种理想气体的涨落,得出结物质的粒子即为德布罗意博士论文中描述自由粒子的平面波的结论。论文(2)对低温时气体的粘滞性突然急剧下降作出评述,本质上对低温超流的BEC现象作出解释,还导出饱和理想气体的状态方程,把金属内自由电子看成玻色气体,对金属超流的BEC作出定性分析。

#### 4 BEC 的研究概况及展望

自从1925年爱因斯坦预言BEC以来,这一课题一直被许多一流的物理工作者所关注。在杨振宁保存的1946年10月至1947年7月参加费米晚间演讲的笔记中,其中的一个题目就是玻色-爱因斯坦凝聚<sup>[1]</sup>,1957年,李政道、杨振宁、黄克孙在理论上系统地研究了 $\delta$ 相互作用下稀薄玻色气体的BEC<sup>[12,13]</sup>,1985年,朱棣文(Chu S)和他的同事在实验上实现了激光冷却原子气体和利用原子捕集器囚禁原子技术<sup>[14]</sup>,为BEC的实现奠定了物理实验基础,1995年,在中性碱金属原子气系统中产生BEC的实验取得了成功。这是在三维位置空间中,金属原子气在极低温度条件下产生的凝聚。一般情况下,碱金属( ${}^7\text{Li}$ ,  ${}^{23}\text{Na}$ ,  ${}^{87}\text{Rb}$ )原子气冷却时,凝聚成液态,而随着温度的降低就相变为固态,其中的原子不可能处在同一量子态。碱金属蒸汽可经过多重激光束冷却,而快速降温形成过冷蒸汽,再利用磁场实施

蒸发冷却,进一步降低原子蒸汽的平均动能,依靠原子之间频繁碰撞,使它们处在共同的最低能态中,最终实现BEC。第一批实现BEC的几个研究小组分别是美国科罗拉多实验室天体物理联合研究所(JILA),美国麻省理工学院(MIT),美国莱斯大学<sup>[15]</sup>。此后,关于BEC的研究发展迅速,中国科学院上海光机所2002年实验上实现了BEC<sup>[16]</sup>。BEC作为新的物质状态,为实验物理学提供一个全新的介质。利用物质波的相干性,研制原子激光器和物质波放大器,可开展非线性原子光学研究,如四波混频、物质波的超辐射现象等;可在实验中模拟白矮星的内部压力,对验证费米子凝聚物理过程有重大意义。总之,玻色-爱因斯坦凝聚在科学上意义重大。在应用技术方面,研制高准确度和稳定度的原子钟和精密原子干涉仪,用于改善原子物理常数和微重力测量的精确度,在量子信息科学研究中,如光速减慢和光信息存贮、量子信息传递和量子逻辑操作等;利用BEC的相干性,进行微结构的刻蚀,研制微电子回路等。

#### 5 启示

相对于量子力学的建立,量子论的发展是漫长的,这一过程是经典物理学迈向现代物理学的一个必然过程。很多现代物理学思想的建立都与此有密切的关系,例如,波粒二象性、物理学中的对称性、物质的质量等。这一时期是现代物理思想发展的重要时期。现代物理学的发展,离不开东方物理学家的积极地参与。做出第一流工作成就的中国、印度和日本物理学家,他们的物理思想与东方传统文化的知识体系应该有渊源的关系。研究他们的工作,可以提高自然科学前沿研究的原创性。

#### 参考文献:

- [1] 王福山. 近代物理学史研究[M]. 上海:复旦大学出版社, 1986.
- [2] 范岱年, 赵中立. 爱因斯坦文集(第二卷)[M]. 许良英译. 北京:商务印书馆, 1979.
- [3] 钱临照, 许良英. 世界著名科学家传记(物理学家V)[M]. 北京:科学出版社, 1999.
- [4] 许良英, 赵中立. 爱因斯坦文集(第三卷)[M]. 张宣三译. 北京:商务印书馆, 1979.
- [5] 许良英, 李宝恒, 赵中立. 爱因斯坦文集(第一卷)[M]. 范岱年译. 北京:商务印书馆, 1983.
- [6] 刘辽. 爱因斯坦全集(第四卷)[M]. 长沙:湖南科学技术出版社, 2002.
- [7] S. 温伯格. 终极理论之赞[M]. 李泳译. 长沙:湖南科学

技术出版社 2003.

- [ 8 ] 郝柏林. 中性原子的玻色-爱因斯坦凝聚[ J ]. 物理学进展 ,1997 ,17( 3 ) :224.
- [ 9 ] 阿布拉罕·派斯. 尼耳斯·玻尔传[ M ]. 戈革译. 北京 : 商务印书馆 2001.
- [ 10 ] VON WELK S F . Crossing Borders , Stretching Boundaries : The Bose-Einstein Lectures on Indo-German Cooperation in Science , Technology and Environment[ M ]. New Delhi : Manohar 2000.
- [ 11 ] 宁平治, 唐贤民, 张庆华. 杨振宁演讲集[ M ]. 天津 : 南开大学出版社 ,1989.
- [ 12 ] HUANG K , YANG C N. Quantum Mechanical Many Body Problem with Hard Sphere Interaction[ J ]. Phys Rev ,1957 ,105 :767-775.
- [ 13 ] LEE T D , HUANG K , YANG C N. Eigenvalue and Eigenfunction of a Bose System of Hard Spheres and Its Low Temperature Properties[ J ]. Phys Rev ,1957 ,106 :1135-1145.
- [ 14 ] 张昌达. 玻色-爱因斯坦凝聚和重力测量[ J ]. 地质科技情报 2001 20( 4 ) :107-110.
- [ 15 ] 戴闻, 高政祥. 玻色-爱因斯坦凝聚的今天和明天[ J ]. 自然杂志 ,2000 22( 6 ) 332-336.
- [ 16 ] 周蜀渝, 龙全. 玻色-爱因斯坦凝聚在中国科学院上海光机所实现[ J ]. 物理 ,2003 31( 6 ) #81.

(责任编辑 欧红叶)