有限个渐近非扩张映象公共不动点的逼近*

向 长 合
(重庆师范大学 数学与计算机科学学院,重庆 400047)

摘　要:设 E 是满足 Opial 条件的一致凸 Banach 空间,C 是 E 的非空闭凸子集,$T_1,T_2\cdots,T_N:C\to C$ 是 N 个具有公共不动点的渐近非扩张映象。在不同条件下,该文证明了具误差的广义 N 步迭代序列分别弱收敛和强收敛于 $T_1,T_2,\cdots T_N$ 的公共不动点。

关键词:一致凸 Banach 空间;渐近非扩张映象;迭代序列;公共不动点;Opial 条件;半紧
中图分类号:O177.91　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2007)01-0007-04

Approximation of Common Fixed Points of a Finite Family of Asymptotically Nonexpansive Mappings

XIANG Chang-he
(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: Let E be a uniformly convex Banach space satisfying Opial's condition, C be a nonempty closed convex subset of E, and $T_1,T_2\cdots,T_N:C\to C$ be N asymptotically nonexpansive mappings with common fixed points. This paper proves that, under different conditions, the generalized N-step iterative sequence with errors converges weakly and converges strongly to a common fixed point of $T_1,T_2,\cdots T_N$ respectively.

Key words: uniformly convex Banach space; asymptotically nonexpansive mappings; iterative sequence; common fixed point; Opial's condition; semi-compact

Goebel 和 Kirk 于 1972 年在文献[1]中首次引入了渐近非扩张映象的概念,并得到如下结论:若 C 是一致凸 Banach 空间 E 的非空有界闭凸子集,则每一个从 C 到 C 的渐近非扩张映象在 C 中都有不动点。此后,特别是从 1991 年至今,有许多作者对一个渐近非扩张映象不动点的各种迭代序列逼近进行了研究,得到大量成果。最近,Chang 和 Zhou 等一些作者研究了有限个渐近非扩张映象的公共不动点的迭代序列逼近问题,并取得了一些成果[2-4]。

本文进一步对有限个渐近非扩张映象的公共不动点的迭代序列逼近问题进行研究,在更弱的条件下,对更一般的迭代序列,得到了与文献[2]完全类似的结论。

1　预备知识

定义 1　设 E 是 Banach 空间,C 是 E 中的非空子集,T 是从 C 到 C 的映象,$F(T)$ 是 T 的所有不动点构成的集合。

1) 称 E 满足 Opial 条件[5],如果对 E 中任一点列 $\{x_n\}$,当 x_n 弱收敛于 x 时,有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|x_n-x\| < \overline{\lim_{n\to\infty}}\|x_n-y\|,\forall y\in E, y\neq x。$$

2) 称 T 是半紧的[6],如果对于 C 中任一满足 $\|x_n-Tx_n\|\to 0$ 的有界点列 $\{x_n\}$,都存在强收敛的子列。

3) 称 T 是渐近非扩张映象[1],如果存在 $\{k_n\}\subset[1,\infty)$,$\lim_{n\to\infty}k_n=1$,使得

$$\|T^nx-T^ny\|\leqslant k_n\|x-y\|,\forall x,y\in C,\forall n\geqslant 1。$$

命题 1[4]　若 $T_1,T_2,\cdots,T_N: C\to C$ 是 N 个渐近非扩张映象,则存在 $\{k_n\}\subset[1,\infty)$,$\lim_{n\to\infty}k_n=1$,使得 $\|T_i^nx-T_i^ny\|\leqslant k_n\|x-y\|$,$\forall x,y\in C$,$\forall n\geqslant 1$,$\forall i=1,2,\cdots,N$。此命题中的 K_n 称为 $T_1,T_2,\cdots,T_N$

* 收稿日期:2005-12-13
资助项目:国家自然科学基金(No. 10471159)
作者简介:向长合(1963-),男,四川岳池人,副教授,研究方向为非线性泛函分析。

的公共渐近系数。

2004年,文献[2]的作者在 C 是 E 的非空有界闭凸子集的假设下,对 N 个具有公共不动点的渐近非扩张映象研究了由下式定义的具误差的 N 步迭代序列 $\{x_n\}$

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - a_{n1} - b_{n1})x_n + a_{n1}T_1^{\ n}y_{n1} + b_{n1}u_{n1} \\ y_{n1} = (1 - a_{n2} - b_{n2})x_n + a_{n2}T_2^{\ n}y_{n2} + b_{n2}u_{n2} \\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ y_{n,N-2} = (1 - a_{n,N-1} - b_{n,N-1})x_n + \\ \qquad a_{n,N-1}T_{N-1}^n y_{n,N-1} + b_{n,N-1}u_{n,N-1} \\ y_{n,N-1} = (1 - a_{nN} - b_{nN})x_n + a_{nN}T_N^n x_n + b_{nN}u_{nN} \end{cases} \tag{1}$$

其中 x_1 是 C 中给定的一点,$\{u_{ni}\}_{n=1}^{\infty}$ 是 C 中点列,$\{a_{ni}\}_{n=1}^{\infty}$、$\{b_{ni}\}_{n=1}^{\infty} \subset [0,1]$ 且满足 $a_{ni} + b_{ni} \leqslant 1(\forall n \geqslant 1)$,$\sum_{n=1}^{\infty} b_{ni} < \infty$ $(i = 1,2,\cdots,N)$,并得到如下两个定理。

定理1[2]　设 E 是满足 Opial 条件的一致凸 Banach 空间,C 是 E 的非空有界闭凸子集,$T_1,T_2,\cdots,T_N:C \to C$ 是 N 个具有公共不动点的渐近非扩张映象,其公共渐近系数 k_n 满足 $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$。进一步,假设存在正数 $\delta \in (0,1)$,使得 $\delta \leqslant a_{ni} \leqslant 1 - \delta < 1$ $(\forall n \geqslant 1, i = 1,2,\cdots,N)$,其中,$\{a_{ni}\}_{n=1}^{\infty}(i = 1,2,\cdots,N)$ 是(1)式中出现的序列,则由(1)式定义的迭代序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $T_1,T_2,\cdots,T_N$ 在 C 中的某一公共不动点 x^*。

定理2[2]　在定理1的条件下,如果 $T_1,T_2,\cdots,T_N: C \to C$ 是 N 个半紧的渐近非扩张映象,则由(1)定义的迭代序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 $T_1,T_2,\cdots,T_N$ 在 C 中的某一个公共不动点 p。

在上述两个定理中,都要求 C 是 E 的非空有界闭凸子集。那么,若去掉 C 的有界性假设,上述结论是否成立呢?本文不仅将对这一问题给出完全肯定的回答,而且将证明:在去掉 C 的有界性假设下,对如下定义2给出的更广泛的 N 步迭代序列,相应结论仍成立。

定义2　设 C 是 Banach 空间 E 中的非空凸子集,$T_1,T_2,\cdots,T_N$ 是从 C 到 C 的映象,x_1 是 C 中给定的一点,则具误差的广义 N 步迭代序列 $\{x_n\}$ 定义为

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_1 y_{n1} + a_2 y_{n2} + \cdots + a_N y_{nN} \\ y_{n1} = \alpha_{n1}x_n + \beta_{n1}T_1^{\ n}x_n + \gamma_{n1}u_{n1} \\ y_{n2} = \alpha_{n2}x_n + \beta_{n2}T_2^{\ n}y_{n1} + \gamma_{n2}u_{n2} \quad (n \geqslant 1) \\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ y_{nN} = \alpha_{nN}x_n + \beta_{nN}T_N^{\ n}y_{n,N-1} + \gamma_{nN}u_{nN} \end{cases} \tag{2}$$

其中,$\{u_{ni}\}_{n=1}^{\infty}$ 是 C 中有界点列,$\{\alpha_{ni}\}_{n=1}^{\infty}$、$\{\beta_{ni}\}_{n=1}^{\infty}$、$\{\gamma_{ni}\}_{n=1}^{\infty} \subset [0,1]$,$0 \leqslant a_i \leqslant 1(i = 1,2,\cdots,N)$ 且满足:$\alpha_{ni} + \beta_{ni} + \gamma_{ni} = 1(\forall n \geqslant 1)$,$\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_{ni} < \infty(i = 1,2,\cdots,N)$;$\sum_{i=1}^{N}a_i = 1$,$a_N \neq 0$。

注释1　在(2)式中将 $y_{n1},y_{n2},\cdots,y_{nN}$ 依次取为 $y_{n,N-1},y_{n,N-2},\cdots,y_{n1},x_{n+1}$;将 $T_1,T_2,\cdots,T_N$ 依次取为 $T_N,T_{N-1},\cdots,T_1$;并将 $u_{n1},u_{n2},\cdots,u_{nN}$ 依次取为 $u_{nN},u_{n,N-1},\cdots,u_{n1}$;同时取 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{N-1} = 0$,$a_N = 1$,则(2)式退化为(1)式。即(1)式定义的迭代序列只是本文定义的迭代序列的一种特殊情形。

引理1[3]　设 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$ 是3个非负数列,满足 $\sum_{n=n_0}^{\infty}b_n < \infty$,$\sum_{n=n_0}^{\infty}c_n < \infty$,$a_{n+1} \leqslant (1 + b_n)a_n + c_n(n \geqslant n_0)$。其中 n_0 是某非负整数,则极限 $\lim_{n\to\infty}a_n$ 存在。

引理2[7]　设 E 是一致凸 Banach 空间,$\{t_n\} \subset [b,c] \subset (0,1)$,$\{x_n\}$、$\{y_n\} \subset E$,若 $\lim_{n\to\infty}\|t_nx_n + (1 - t_n)y_n\| = d < \infty$,$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|x_n\| \leqslant d$,$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|y_n\| \leqslant d$,则 $\lim_{n\to\infty}\|x_n - y_n\| = 0$。

引理3[6]　设 E 是一致凸 Banach 空间,C 是 E 的非空闭凸子集,$T: C \to C$ 是具有不动点的渐近非扩张映象,则 $I - T$ 在原点半闭,即对 C 中任一点列 $\{x_n\}$,如果 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $q \in C$ 且 $\{(I - T)x_n\}$ 强收敛于0,则 $(I - T)q = 0$。

引理4　设 E 是赋范线性空间,C 是 E 的非空子集,$T_1,T_2,\cdots,T_N:C \to C$ 是 N 个渐近非扩张映象,$\{x_n\}$ 是 C 中任意给定的一个点列,若 $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x_{n+1}\| = 0$ 且 $\lim_{n\to\infty}\|x_n - T_i^nx_n\| = 0(i = 1,2,\cdots,N)$,则 $\lim_{n\to\infty}\|x_n - T_ix_n\| = 0(i = 1,2,\cdots,N)$。

证明　$\|x_n - T_ix_n\| \leqslant \|x_n - T_i^nx_n\| + \|T_i^nx_n - T_ix_n\| \leqslant$

$$\|x_n - T_i^{\ n}x_n\| + k_1\|T_i^{\ n-1}x_n - x_n\| \leqslant$$
$$\|x_n - T_i^{\ n}x_n\| + k_1(\|T_i^{\ n-1}x_n - T_i^{\ n-1}x_{n-1}\| +$$
$$\|T_i^{\ n-1}x_{n-1} - x_{n-1}\| + \|x_{n-1} - x_n\|) \leqslant$$
$$\|x_n - T_i^{\ n}x_n\| + k_1((1 + k_{n-1})\cdot$$
$$\|x_n - x_{n-1}\| + \|T_i^{\ n-1}x_{n-1} - x_{n-1}\|)$$

由 $\lim_{n\to\infty}k_{n-1} = 1$ 及引理中的假设,知 $\lim_{n\to\infty}\|x_n - T_ix_n\| = 0(i = 1,2,\cdots,N)$。　　证毕

2　主要结果

定理3　设 E 是满足 Opial 条件的一致凸 Banach 空间,C 是 E 的非空闭凸子集,$T_1,T_2,\cdots,T_N$:

$C \to C$ 是 N 个具有公共不动点的渐近非扩张映象，其公共渐近系数 k_n 满足 $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$。若(2)式中出现的数列 $\{\beta_{ni}\} \subset [b,c] \subset (0,1)(i = 1,2,\cdots,N)$，则由(2)式定义的具误差的广义 N 步迭代序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $T_1,T_2,\cdots,T_N$ 的某一公共不动点 $x^* \in C$。

证明　因 $F = \cap_{i=1}^{N} F(T_i)$ 非空，任取 $p \in F$。首先，笔者证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n - p\|$ 存在。由于 $\{u_{ni}\}_{n=1}^{\infty}$ 是 C 中有界点列 $(i = 1,2,\cdots,N)$ 且极限 $\lim\limits_{n\to\infty}k_n$ 存在，令 $M = \sup\{\|u_{ni} - p\| : n \geqslant 1, i = 1,2,\cdots,N\}$，$K = \sup\{k_n : n \geqslant 1\}$。注意到 $\alpha_{ni} + \beta_{ni} = 1 - \gamma_{ni} \leqslant 1$ 且 $k_n \geqslant 1$，故有

$$\alpha_{ni} + \beta_{ni}k_n^i \leqslant (\alpha_{ni} + \beta_{ni})k_n^i \leqslant k_n^i (i = 1,2,\cdots,N) \tag{3}$$

由(2)式和(3)式得

$$\begin{aligned}\|y_{n1} - p\| &= \|\alpha_{n1}(x_n - p) + \beta_{n1}(T_1^n x_n - p) + \gamma_{n1}(u_{n1} - p)\| \leqslant \\ &(\alpha_{n1} + \beta_{n1}k_n)\|x_n - p\| + \gamma_{n1}\|u_{n1} - p\| \leqslant \\ &k_n\|x_n - p\| + M\gamma_{n1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|y_{n2} - p\| &= \|\alpha_{n2}(x_n - p) + \beta_{n2}(T_2^n y_{n1} - p) + \gamma_{n2}(u_{n2} - p)\| \leqslant \\ &\alpha_{n2}\|x_n - p\| + \beta_{n2}k_n\|y_{n1} - p\| + M\gamma_{n2} \leqslant \\ &\alpha_{n2}\|x_n - p\| + \beta_{n2}k_n(k_n\|x_n - p\| + M\gamma_{n1}) + M\gamma_{n2} = \\ &(\alpha_{n2} + \beta_{n2}k_n^2)\|x_n - p\| + M(\beta_{n2}k_n\gamma_{n1} + \gamma_{n2}) \leqslant \\ &k_n^2\|x_n - p\| + M(K\gamma_{n1} + \gamma_{n2})\end{aligned}$$

由数学归纳法，可证

$$\|y_{ni} - p\| \leqslant k_n^i\|x_n - p\| + M(K^{i-1}\gamma_{n1} + K^{i-2}\gamma_{n2} + \cdots + \gamma_{ni})(i = 1,2,\cdots,N) \tag{4}$$

从而，有

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - p\| &= \|\sum_{i=1}^{N} a_i(y_{ni} - p)\| \leqslant \\ &\sum_{i=1}^{N} a_i(y_{ni} - p)\| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant N}\|y_{ni} - p\| \leqslant \\ &k_n^N\|x_n - p\| + M(K^{n-1}\gamma_{n1} + K^{n-2}\gamma_{n2} + \cdots + \gamma_{nN}) = \\ &(1 + b_n)\|x_n - p\| + c_n \quad (\forall n \geqslant 1)。\end{aligned}$$

其中，$0 \leqslant b_n = k_n^N - 1 \leqslant NK^N(k_n - 1)$，$c_n = M(K^{N-1}\gamma_{n1} + K^{N-2}\gamma_{n2} + \cdots + \gamma_{nN})$。由于 $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1)$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛；再由 $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_{ni}$ 收敛 $(i = 1,2,\cdots,N)$，知 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛。故由引理 1，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n - p\|$ 存在。从而 $\{x_n\}$ 是 C 中强有界点列。设

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - p\| = d \tag{5}$$

其次，笔者下面证明点列 $\{x_n\}$ 满足引理 4 的条件。由(4)和(5)式得

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to\infty}}\|y_{ni} - p\| &\leqslant \lim_{n\to\infty}(k_n^i\|x_n - p\| + M(K^{i-1}\gamma_{n1} + K^{i-2}\gamma_{n2} + \cdots + \gamma_{ni})) = \\ &d(i = 1,2,\cdots,N)\end{aligned} \tag{6}$$

于是

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|T_i^n y_{n,i-1} - p\| \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}k_n\|y_{n,i-1} - p\| \leqslant d\ (i = 1,2,\cdots,N) \tag{7}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\|T_1^n x_n - p\| \leqslant \lim_{n\to\infty}k_n\|x_n - p\| = d \tag{8}$$

另一方面

$$\begin{aligned}d &= \lim_{n\to\infty}\|x_{n+1} - p\| \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{i=1}^{N} a_i\|y_{ni} - p\| \leqslant \\ &\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{i=1}^{N-1} a_i\|y_{ni} - p\| + \underline{\lim_{n\to\infty}}a_N\|y_{nN} - p\| \leqslant \\ &\sum_{i=1}^{N-1} a_i d + a_N\underline{\lim_{n\to\infty}}\|y_{nN} - p\|\end{aligned}$$

从而，$a_N\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|y_{nN} - p\| \geqslant (1 - \sum_{i=1}^{N-1} a_i)d = a_N d$，由于 $a_N > 0$，故 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|y_{nN} - p\| \geqslant d$。与(6)式（其中，取 $i = N$）结合，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|y_{nN} - p\| = d$。由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_{ni} = 0$ 且 $\{x_n\}$ 和 $\{u_{ni}\}_{n=1}^{\infty}$ 都是有界点列 $(i = 1,2,\cdots,N)$，故有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\|(1 - \beta_{nN})(x_n - p) + \beta_{nN}(T_N^n y_{n,N-1} - p)\| = \\ &\lim_{n\to\infty}\|(\alpha_{nN} + \gamma_{nN})x_n + \beta_{nN}T_N^n y_{n,N-1} - p\| = \\ &\lim_{n\to\infty}\|y_{nN} - p) + \gamma_{nN}(x_n - u_{nN})\| = d\end{aligned}$$

注意到 $\{\beta_{ni}\} \subset [b,c] \subset (0,1)$，由(5)式和(7)式，根据引理 2，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n - T_N^n y_{n,N-1}\| = 0$。由此得

$$\begin{aligned}d &= \lim_{n\to\infty}\|x_n - p\| = \lim_{n\to\infty}\|(x_n - T_N^n y_{n,N-1}) + (T_N^n y_{n,N-1} - p)\| \leqslant \\ &\overline{\lim_{n\to\infty}}\|x_n - T_N^n y_{n,N-1}\| \underline{\lim_{n\to\infty}}\|T_N^n y_{n,N-1} - p\| = \\ &\underline{\lim_{n\to\infty}}\|T_N^n y_{n,N-1} - p\| \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}k_n\|y_{n,N-1} - p\| = \\ &\underline{\lim_{n\to\infty}}\|y_{n,N-1} - p\|\end{aligned}$$

与(6)式（其中，取 $i = N - 1$）结合，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|y_{n,N-1} - p\| = d$，从而

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\|(1 - \beta_{n,N-1})(x_n - p) + \beta_{n,N-1}(T_{N-1}^n y_{n,N-2} - p)\| = \\ &\lim_{n\to\infty}\|(y_{n,N-1} - p) + \gamma_{n,N-1}(x_n - u_{n,N-1})\| = d\end{aligned}$$

再次由(5)及(7)式（其中，取 $i = N - 1$），根据引理 2，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n - T_{N-1}^n y_{n,N-2}\| = 0$。利用数学归纳法，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n - T_i^n y_{n,i-1}\| = 0\ (i = N,N - 1,\cdots,2)$ 且

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - T_1^n x_n\| = 0。$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\|y_{n1} - x_n\| = \lim_{n\to\infty}\|\beta_{n1}(T_1^n x_n - x_n) + \gamma_{n1}(u_{n1} - x_n)\| = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\|y_{ni} - x_n\| = \lim_{n\to\infty}\|\beta_{ni}(T_i^n y_{n,i-1} - x_n) +$$

$$\gamma_{ni}(u_{ni}-x_n)\|=0\ (i=2,3,\cdots,N)$$

又由

$\|x_n-T_i^n x_n\|\leqslant\|(x_n-T_i^n y_{n,i-1})+(T_i^n y_{n,i-1}-T_i^n x_n)\|\leqslant\|x_n-T_i^n y_{n,i-1}\|+k_n\|y_{n,i-1}-x_n\|$ 得

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-T_i^n x_n\|=0\ (i=1,2,\cdots,N)$$ 且

$\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1}-x_n\|=\lim_{n\to\infty}\|\sum_{i=1}^N a_i(y_{ni}-x_n)\|=0$,即点列$\{x_n\}$满足引理4的所有条件,根据引理4,有

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-T_ix_n\|=0\ (i=1,2,\cdots,N)\quad(9)$$

由于E是一致凸Banach空间,因而E是自反的,C中有界点列$\{x_n\}$必有子列$\{x_{n_k}\}$弱收敛于E中某一个点x^*。因为C是E的闭凸子集,所以C弱闭,从而$x^*\in C$。由(9)式,$\lim_{k\to\infty}\|x_{n_k}-T_ix_{n_k}\|=0\ (i=1,2,\cdots,N)$。根据引理3,$(I-T_i)x^*=0\ (i=1,2,\cdots,N)$,即$x^*\in F$。

最后,笔者来证明$\{x_n\}$弱收敛于x^*。若不然,由于E自反,存在$\{x_n\}$的子列$\{x_{m_k}\}$弱收敛于C中异于x^*的点y^*,同样根据引理3得$y^*\in F$。又因为任给$p\in F$,极限$\lim_{n\to\infty}\|x_n-p\|$存在,特别地,$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x^*\|$和$\lim_{n\to\infty}\|x_n-y^*\|$都存在。由于$E$满足Opial条件,故有

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x^*\|=\lim_{k\to\infty}\|x_{n_k}-x^*\|<\lim_{k\to\infty}\|x_{n_k}-y^*\|=\lim_{n\to\infty}\|x_n-y^*\|=$$

$\lim_{k\to\infty}\|x_{m_k}-y^*\|<\lim_{k\to\infty}\|x_{m_k}-x^*\|=\lim_{n\to\infty}\|x_n-x^*\|$,矛盾。因此,$\{x_n\}$弱收敛于$x^*\in F$。 证毕

定理4 在定理3的条件下,若$T_1,T_2,\cdots,T_N$中至少有一个是半紧的,则由(2)定义的具误差的广义N步迭代序列$\{x_n\}$强收敛于$T_1,T_2,\cdots T_N$在C中的某一公共不动点x^*。

证明 由定理3知,$\{x_n\}$弱收敛于$x^*\in F=\cap_{i=1}^N F(T_i)$。由定理3的证明过程知,极限$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x^*\|$存在,且$\lim_{n\to\infty}\|x_n-T_ix_n\|=0(i=1,2,\cdots,N)$。由于$T_1,T_2,\cdots,T_N$中至少有一个是半紧的,故存在$\{x_n\}$中的子列$\{x_{n_k}\}$强收敛于$x^*$。因为极限$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x^*\|$存在,所以$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x^*\|=\lim_{k\to\infty}\|x_{n_k}-x^*\|=0$,即迭代序列$\{x_n\}$强收敛于$x^*$。

证毕

注释2 本文主要在如下两方面对文献[2]进行了推广和改进:① 文献[2]中的迭代相当于是本文迭代的一种特殊情况,即$a_1=a_2=\cdots=a_{N-1}=0,a_N=1$;② 文献[2]中两个定理均要求$C$是$E$的非空有界闭凸子集,本文取消了$C$有界的限制。

参考文献:

[1] GOEBEL K, KIRK W A. A Fixed Point Theorem for Asymptotically Nonexpansive Mappings[J]. Proc Amer Math Soc, 1972, 35:171-174.

[2] CHANG S S, LEE H W J, CHO Y J. On the Convergence of Finite Steps Iterative Sequences for Asymptotically Nonexpansive Mappings[J]. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Series A, 2004, 11:589-600.

[3] ZHOU Y Y, CHANG S S. Convergence of Implicit Iterative Process for a Finite Family of Asymptotically Nonexpansive Mappings in Banach Spaces. Numer Funct Anal and Optimiz, 2002, 23:911-921.

[4] CHANG S S, CHO Y J. The Implicit Iterative Processes for Asymptotically Nonexpansive Mappings. Nonlinear Anal and Appl, 2003, 1:369-382.

[5] OPIAL Z. Weak Convergence of the Sequence of Successive Approximations for Nonexpansive mappings. Bull Amer Math Soc, 1967, 73:595-597.

[6] CHANG S S, CHO Y J, ZHOU H Y. Demi-closed Principle and Weak Convergence Problems for Asymptotically Nonexpansive Mappings. J Korean Math Soc, 2001, 38:1245-1260.

[7] SCHU J. Weak and Strong Convergence to Fixed Points of Asymptotically Nonexpansive Mappings. Bull Austral Math Soc, 1991, 43:153-159.

(责任编辑 游中胜)