具有连续时滞的双曲型偏微分方程解的振动性*

高正晖，罗李平
(衡阳师范学院 数学系，湖南 衡阳 421008)

摘　要：研究了一类具有连续时滞的双曲型偏微分方程$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}+A(x,t)u(x,t)+\int_a^b B(x,t,\tau)f(u(x,r_1(t,\tau)))\mathrm{d}m(\tau)=C(t)\Delta u(x,t)+\int_a^b D(t,\tau)\Delta u(x,r_2(t,\tau))\mathrm{d}m(\tau)$解的振动性，获得了该方程在 Robin 边值条件和 Dircichlet 边值条件下解振动的充分条件。

关键词：双曲型偏微分方程；连续时滞变量；振动性
中图分类号：O175.27　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2007)01-0011-04

Oscillation of the Solutions of Hyperbolic Partial Differential Equation with Continuous Delay

GAO Zheng-hui, LUO Li-ping
(Dept. of Mathematics, Hengyang Normal University, Hengyang Hunan, 421008)

Abstract: This paper studies oscillation of the solutions of hyperbolic partial differential equation with continuous delay argument. Sufficient conditions for each solution to oscillation are obtained under Robin and Dircichlet boundary value conditions.

Key words: hyperbolic partial differential equation; continuous delay argument; oscillation

1　预备知识

由于泛函微分方程在自然科学和工程技术方面的广泛应用，对泛函微分方程的研究发展非常迅速。时滞双曲型偏微分方程解的振动性，已有很多学者作了大量的研究，获得了许多成果[1-10]，而这些文献所考虑的大都是离散时滞变量的情形，对具有连续时滞的双曲型偏微分方程解的振动性的研究成果却不多见[11]，本文将讨论一类具有连续时滞变量的双曲型偏微分方程(H)

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}+A(x,t)u(x,t)+\int_a^b B(x,t,\tau)f(u(x,r_1(t,\tau)))\mathrm{d}m(\tau)=$$
$$C(t)\Delta u(x,t)+\int_a^b D(t,\tau)\Delta u(x,r_2(t,\tau))\mathrm{d}m(\tau)$$

解的振动性。其中$(x,t)\in\Omega\times\mathbf{R}_+\equiv G$，$\mathbf{R}_+=[0,\infty]$，$\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 有界且 $\partial\Omega$ 逐片光滑，则由 $\Delta u(x,t)=\sum_{j=1}^n\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_j^2}$，$(x,t)\in G$ 获得了该方程在边值条件

$$(B_1)\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial N}+g(x,t)u(x,t)=0,(x,t)\in\partial\Omega\times\mathbf{R}_+$$

或边值条件

$$(B_2)\ u(x,t)=0,(x,t)\in\partial\Omega\times\mathbf{R}_+$$

* 收稿日期：2006-05-08　　修回日期：2006-09-27
资助项目：湖南省自然科学基金项目(No. 05JJ40008)
作者简介：高正晖(1959-)，男，湖南衡阳人，副教授，研究方向为微分方程。

之下解的振动性的充分条件,其中 N 是 $\partial\Omega$ 的单位法向量,并且 $g(x,t)$ 是 $\partial\Omega\times\mathbf{R}_+$ 上的非负连续函数。

对于方程(H),假定成立下列条件。

(C_1) $A(x,t)\in C(\bar{G};\mathbf{R}_+)$,$A(t)\triangleq\min\{A(x,t),x\in\bar{\Omega}\}>0$;

(C_2) $B(x,t,\tau)\in C(\bar{G}\times[a,b];\mathbf{R}_+)$,$B(t,\tau)\triangleq\min\{B(x,t,\tau),x\in\bar{\Omega}\}$;

(C_3) $r_i(t,\tau)\in C(\mathbf{R}_+\times[a,b];\mathbf{R}_+)$,$r_i(t,\tau)\leqslant t$,$r_i(t,\tau)$ 关于 t,τ 分别为单调增加函数,且

$$\lim_{t\to+\infty}\min_{\tau\in[a,b]}r_i(t,\tau)=+\infty,(i=1,2);$$

(C_4) $m(\tau)$ 是关于 τ 在 $[a,b]$ 上的非减实函数,方程(H)中的积分为 Stieltjes 积分;

(C_5) $f(u)\in C(\mathbf{R};\mathbf{R})$,并且 $f(u)$ 是区间 $(0,+\infty)$ 上正的单调增加的凸函数,且对 $u\in(0,+\infty)$,有 $f(-u)=-f(u)$;

(C_6) $C(t)\in C(\mathbf{R}_+;\mathbf{R}_+)$,$D(t,\tau)\in C(\mathbf{R}_+\times[a,b];\mathbf{R}_+)$。

定义 一个定义在 $\Omega\times[0,+\infty]$ 上的实值可微函数 $u(x,t)$ 称为是振动的,如果对每一个 $\mu>0$,都存在一点 $(x_0,t_0)\in\Omega\times[\mu,+\infty)$,使得 $u(x_0,t_0)=0$,否则 $u(x,t)$ 称为是非振动的。

2 主要结果及证明

2.1 方程(H)在边值条件(B_1)之下解的振动性

定理1 对于方程(H)在边值条件(B_1)下,条件(C_1)~(C_6)成立,若满足

(C_7) 对 $u\neq 0$,存在常数 $M>0$,都有 $\dfrac{f(u)}{u}\geqslant M$;($C_8$) $\int_T^\infty\int_a^b B(s,\tau)\mathrm{d}m(\tau)\mathrm{d}s=+\infty\ (T>0)$

则方程(H)在边值条件(B_1)下的每一个解在 G 内振动。

证明 (反证法)假设 $u(x,t)$ 是方程(H),(B_1)的非振动解,则存在 $\mu>0$,有 $u(x,t)>0$,$(x,t)\in\Omega\times[\mu,+\infty]$。由 $\lim\limits_{t\to+\infty}\min\limits_{\tau\in[a,b]}r_i(t,\tau)=+\infty$,存在 $t_1\geqslant\mu>0$,当 $t>t_1$ 时,有 $u(x,r_i(t,\tau))>0$,$(i=1,2)$。对方程(H)关于 x 在 Ω 上积分,于是当 $t\geqslant t_1>0$ 时可得

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\int_\Omega u(x,t)\mathrm{d}x+\int_\Omega A(x,t)u(x,t)\mathrm{d}x+\int_\Omega\Big[\int_a^b B(x,t,\tau)f(u(x,r_1(t,\tau)))\mathrm{d}m(\tau)\Big]\mathrm{d}x=$$
$$C(t)\int_\Omega\Delta u(x,t)\mathrm{d}x+\int_\Omega\Big[\int_a^b D(t,\tau)\Delta u(x,r_2(t,\tau))\mathrm{d}m(\tau)\Big]\mathrm{d}x \tag{1}$$

由 Green 公式及边值条件(B_1)有

$$\int_\Omega\Delta u(x,t)\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u(x,t)}{\partial N}\mathrm{d}s=-\int_{\partial\Omega}g(x,t)u(x,t)\mathrm{d}s\leqslant 0 \tag{2}$$

$$\int_\Omega\Big[\int_a^b D(t,\tau)\Delta u(x,r_2(t,\tau)\mathrm{d}m(\tau)\Big]\mathrm{d}x=\int_a^b D(t,\tau)\Big[\int_\Omega\Delta u(x,r_2(t,\tau))\mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}m(\tau)=$$
$$\int_a^b D(t,\tau)\Big[\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u(x,r_2(t,\tau))}{\partial N}\mathrm{d}s\Big]\mathrm{d}m(\tau)=-\int_a^b D(t,\tau)\Big[\int_{\partial\Omega}g(x,t)u(x,r_2(t,\tau))\mathrm{d}s\Big]\mathrm{d}m(\tau)\leqslant 0 \tag{3}$$

又根据条件(C_1)~(C_5)及 Jensen 不等式有

$$\int_\Omega A(x,t)u(x,t)\mathrm{d}x\geqslant A(t)\int_\Omega u(x,t)\mathrm{d}x \tag{4}$$

$$\int_\Omega\Big[\int_a^b B(x,t,\tau)f(u(x,r_1(t,\tau)))\mathrm{d}m(\tau)\Big]\mathrm{d}x\geqslant\int_a^b B(t,\tau)\Big[\int_\Omega f(u(x,r_1(t,\tau)))\mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}m(\tau)\geqslant$$
$$\int_a^b B(t,\tau)\Big(\int_\Omega\mathrm{d}x\Big)f\Big[\frac{1}{\int_\Omega\mathrm{d}x}\int_\Omega u(x,r_1(t,\tau))\mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}m(\tau) \tag{5}$$

令 $v(t)=\dfrac{\int_\Omega u(x,t)\mathrm{d}x}{\int_\Omega\mathrm{d}x}$,则当 $t\geqslant t_1>0$ 时,$v(t)>0$,于是由(1)~(5)式,有

$$v''(t)+A(t)v(t)+\int_a^b B(t,\tau)f(v(r_1(t,\tau)))\mathrm{d}m(\tau)\leqslant 0 \tag{6}$$

又由条件(C_7)有

$$v''(t)+A(t)v(t)+M\int_a^b B(t,\tau)v(r_1(t,\tau))\mathrm{d}m(\tau)\leqslant 0 \tag{7}$$

因此有

$$v''(t)+M\int_a^b B(t,\tau)v(r_1(t,\tau))\mathrm{d}m(\tau)\leqslant 0 \tag{8}$$

由 $v(t)>0$，$v''(t)\leqslant 0$，易得 $v'(t)\geqslant 0$。又由于 $r_1(t,\tau)$ 关于 t,τ 分别为单调增加函数，而 $a<\tau<b$，$t\geqslant t_1>0$，所以 $r_1(t,\tau)\geqslant r_1(t_1,a)$，$v(r_1(t,\tau))\geqslant v(r_1(t_1,a))=c>0$，则

$$v''(t)+M\int_a^b B(t,\tau)v(r_1(t_1,a))\mathrm{d}m(\tau)\leqslant 0,$$

即

$$v''(t)+cM\int_a^b B(t,\tau)\mathrm{d}m(\tau)\leqslant 0 \tag{9}$$

当 $t>t_1>0$ 时，对(9)式在$[t_1,t]$上关于 t 积分，得 $v'(t)\leqslant v'(t_1)-cM\int_{t_1}^{t}\int_a^b B(s,\tau)\mathrm{d}m(\tau)\mathrm{d}s$，令 $t\to+\infty$ 并结合条件(C_8)有 $\lim\limits_{t\to+\infty}v'(t)\leqslant v'(t_1)-cM\int_{t_1}^{+\infty}\int_a^b B(s,\tau)\mathrm{d}m(\tau)\mathrm{d}s=-\infty$，这与 $v'(t)\geqslant 0$ 矛盾。　　证毕

推论 1　若微分不等式(6)式无最终正解，则方程(H)在边值条件(B_1)下的每一个解在 G 内振动。

2.2　方程(H)在边值条件(B_2)下解的振动性

为了证明主要定理，引入一个引理。

引理[12]　特征值问题 $\begin{cases}\Delta\varphi(x)+\lambda\varphi(x)=0, & x\in\Omega\\ \varphi(x)=0, & x\in\partial\Omega\end{cases}$ (λ 是常数)

的最小特征值 $\lambda_0>0$，且它所对应的特征函数 $\varphi_0(x)>0$，$x\in\Omega$。

定理 2　若定理 1 中的所有条件都满足，则方程(H)在边值条件(B_2)下的每一个解在 G 内振动。

证明　(反证法)假设 $u(x,t)$ 是方程(H)在边值条件(B_2)下的非振动解，则存在 $\mu>0$，有 $\mu(x,t)>0$，$(x,t)\in\Omega\times[\mu,+\infty)$。由 $\lim\limits_{t\to+\infty}\min\limits_{\tau\in[a,b]}r_i(t,\tau)=+\infty$，存在 $t_1\geqslant\mu>0$，当 $t>t_1$ 时，有 $u(x,r_i(t,\tau))>0(i=1,2)$。对方程($H$)两边乘以 $\varphi_0(x)$ 并关于 x 在 Ω 上积分，于是当 $t\geqslant t_1>0$ 时可得

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\int_\Omega\varphi_0(x)u(x,t)\mathrm{d}x+\int_\Omega\varphi_0(x)A(x,t)u(x,t)\mathrm{d}x+\int_\Omega[\varphi_0(x)\int_a^b B(x,t,\tau)f(u(x,r_1(t,\tau)))\mathrm{d}m(\tau)]\mathrm{d}x=$$

$$C(t)\int_\Omega\varphi_0(x)\Delta u(x,t)\mathrm{d}x+\int_\Omega[\varphi_0(x)\int_a^b D(t,\tau)\Delta u(x,r_2(t,\tau))\mathrm{d}m(\tau)]\mathrm{d}x \tag{10}$$

利用 Green 公式及边值条件(B_2)，有

$$\int_\Omega\varphi_0(x)\Delta u(x,t)\mathrm{d}x=\int_\Omega u(x,t)\Delta\varphi_0(x)\mathrm{d}x=-\lambda_0\int_\Omega u(x,t)\varphi_0(x)\mathrm{d}x\leqslant 0 \tag{11}$$

$$\int_\Omega[\varphi_0(x)\int_a^b D(t,\tau)\Delta u(x,r_2(t,\tau))\mathrm{d}m(\tau)]\mathrm{d}x=\int_a^b D(t,\tau)[\int_\Omega\varphi_0(x)\Delta u(x,r_2(t,\tau))\mathrm{d}x]\mathrm{d}m(\tau)=$$

$$-\lambda_0\int_a^b D(t,\tau)[\int_\Omega\varphi_0(x)u(x,r_2(t,\tau))\mathrm{d}x]\mathrm{d}m(\tau)\leqslant 0 \tag{12}$$

又根据条件(C_1)~(C_5)及 Jensen 不等式有

$$\int_\Omega\varphi_0(x)A(x,t)u(x,t)\mathrm{d}x\geqslant A(t)\int_\Omega\varphi_0(x)u(x,t)\mathrm{d}x \tag{13}$$

$$\int_\Omega\varphi_0(x)[\int_a^b B(x,t,\tau)f(u(x,r_1(t,\tau)))\mathrm{d}m(\tau)]\mathrm{d}x\geqslant\int_a^b B(t,\tau)[\int_\Omega\varphi_0(x)f(u(x,r_1(t,\tau)))\mathrm{d}x]\mathrm{d}m(\tau)\geqslant$$

$$\int_a^b B(t,\tau)(\int_\Omega\varphi_0(x)\mathrm{d}x)f[\frac{1}{\int_\Omega\varphi_0(x)\mathrm{d}x}\int_\Omega\varphi_0(x)u(x,r_1(t,\tau))\mathrm{d}x]\mathrm{d}m(\tau) \tag{14}$$

令 $v(t)=\dfrac{\int_\Omega\varphi_0(x)u(x,t)\mathrm{d}x}{\int_\Omega\varphi_0(x)\mathrm{d}x}$，则当 $t\geqslant t_1>0$ 时，$v(t)>0$，于是由(9)~(13)式有

$$v''(t)+A(t)v(t)+\int_a^b B(t,\tau)f(v(r_1(t,\tau)))\mathrm{d}m(\tau)\leqslant 0 \tag{15}$$

又由条件(C_7)有
$$v''(t)+A(t)v(t)+M\int_a^b B(t,\tau)\mathrm{v}(r_1(t,\tau))\mathrm{d}m(\tau)\leqslant 0 \tag{16}$$

因此有 $v''(t)+M\int_a^b B(t,\tau)v(r_1(t,\tau))\mathrm{d}m(\tau)\leqslant 0$。

以下证明与定理1相应部分的证明相类似,则定理2得证。 证毕

推论2 若微分不等式(15)式无最终正解,则方程(H)在边值条件(B_2)下的每一个解在 G 内振动。

参考文献:

[1] 何猛省,高述春. 双曲时滞偏微分方程解的振动性质[J]. 科学通报,1992,37(13):1163-1166.

[2] 崔宝同,俞元洪,林诗仲. 具有时滞的双曲型微分方程解的振动性[J]. 应用数学学报,1996,19(1):80-89.

[3] 刘安平,李 星,刘克英. 双曲型时滞偏微分方程解振动的充要条件[J]. 工程数学学报,2003,20(4):119-122.

[4] 王培光,葛渭高. 双曲偏泛函微分方程解的振动性[J]. 应用数学和力学,1999,20(7):699-706.

[5] 孟京华. 对一类双曲型方程组特征值问题的讨论[J]. 重庆师范学院学报(自然科学版),2000,(17)2:95-98.

[6] 韩振来,孙书荣. 一类三阶中立型时滞差分方程的振动准则[J]. 重庆师范学院学报(自然科学版),1998,15(3):43-46.

[7] 李伟年. 具偏差变元的抛物微分方程组解的振动性[J]. 重庆师范学院学报(自然科学版),1998,15(2):43-49.

[8] 李焕银. 变系数线性中立型时滞大系统零解的稳定性[J]. 四川师范学院学报(自然科学版),2003,24(2):189-192.

[9] 罗宏,蒲志林,陈光淦. 具有可变脉冲扰动的脉冲时滞微分方程零解的不稳定性[J]. 四川师范大学学报(自然科学版),2002,25(2):125-128.

[10] 王长有,李树勇,杨治国. 一类含时滞的抛物型方程组周期解的存在唯一性[J]. 四川师范大学学报(自然科学版),2004,27(11):47-50.

[11] 张立琴,傅希林. 具有连续分布滞量的非线性双曲微分方程解的振动准则[J]. 数学物理学报,1996,16(增刊):104-113.

[12] 叶其孝,李正元. 反应扩散方程引论[M]. 北京:科学出版社,1990.

(责任编辑 黄 颖)

我校8个学科最近被确立为重庆市“十一五”重点学科

2006年岁末,我校学科建设取得喜人成绩。在重庆市教委组织的重庆市“十一五”重点学科申报中,我校《课程与教学论》、《中国现当代文学》、《专门史》、《运筹学与控制论》、《动物学》等5个学科成功申报为市级重点学科;《特殊教育学》、《人文地理学》、《旅游管理》等3个学科成功申报为立项建设重点学科。这是我校长期以来致力于搭建学术研究和人才培养平台,大力开展学科建设的结果。

本刊编辑部报道

2006年12月