2007 年 1 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Jan. 2007
第 24 卷 第 1 期 Journal of Chongqing Normal University(Natural Science Edition) Vol. 24 No. 1

关于几类不变线性函数的概念、判定和应用*

张 健
(重庆师范大学 数学与计算机科学学院,重庆 400047)

摘 要:拟线性函数、伪线性函数作为一种广义凸函数已经被广泛研究,本文将该类函数进行推广,提出预不变线性函数、预拟不变线性函数、伪不变线性函数的概念,并讨论了这几类新函数的性质,最后给出伪不变函数最优解集的特征。

关键词:广义线性;拟不变凸;伪不变凸;不变线性;最优解集
中图分类号:O221.2 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-6693(2007)01-0015-04

On the Concepts, Determination and Application of a Few Invex-Linear Functions

ZHANG Jian
(College of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 400047)

Abstract:For quasilinear function and pseudolinear function as a generalized convex function have been studied extensively in this paper. We extend their concepts to the case of invex functions and give some properties of new concepts and new function. With these properties, the characterization of solution sets of pseduo-invex-linear programs are derived.

Key words:generalized linear;quansi-invex function;pseudo-invex function;invex-linear function;solution sets

众所周知,在凸集上的可微实值函数是线性的,当且仅当该函数既是凸的也是凹的。而对函数的凸性做了推广后,相应的出现了拟线性函数和伪线性函数,并得到了相应的结果,相关内容参见文献[1-3]。随后,自从 Hanson 提出不变凸概念后,不变凸在优化方面也有丰富的结果,参见文献[4-12]。然而,关于不变线性的概念在文献中却未曾见到,本文则从不变凸方面对以上几类函数进行推广,给出了相应函数的定义,并给出了一些相关结果。

在本文中,$\mathbf{R}^n$ 表示 n 维欧氏空间,$\mathrm{dom}(f)$ 表示 f 的有效域,即 $x\in\mathrm{dom}(f)$ 当且仅当 $f(x)<+\infty$. 设 S 是 $\mathbf{R}^n$ 中的非空子集,η 是 $X\times X$ 到 $\mathbf{R}^n$ ($X\subset\mathbf{R}^n$) 向量值映射,并假定 f 是 $S\subset\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}$ 的函数,$[0,1]$ 表示 $\mathbf{R}$ 上 0 到 1 的闭区间。

1 几类不变线性函数的定义

定义 1 (不变凸)设集合 S 是关于 η 不变凸的,如果存在 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$,使得 $\forall x,y\in S,\forall\lambda\in[0,1]$,都有 $y+\lambda\eta(x,y)\in S$。

定义 2[5,7] (预不变凸函数)设 S 是关于 η 不变凸的,说函数 f 是关于 S 上相同 η 预不变凸的,是指 $\forall x,y\in S,\forall\lambda\in[0,1]$ 有

$$f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

定义 3[5,7] (预拟不变凸函数)设 S 是关于 η 不变凸的,说函数 f 是关于 S 上相同 η 预拟不变凸的,是指 $\forall x,y\in S,\forall\lambda\in[0,1]$ 有

$$f(y)\leqslant f(x)\Rightarrow f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant f(x)$$

定义 4[5,7] (伪不变凸函数)设 S 是关于 η 不变凸的,说可微函数 f 是关于 S 上相同 η 伪不变凸的,是指 $\forall x,y\in S,\forall\lambda\in[0,1]$ 有

$$f(y)<f(x)\Rightarrow\eta(y,x)^{\mathrm{T}}\nabla f(x)<0$$

定义 5 (预不变线性)设 S 是关于 η 不变凸的,说函数 f 是关于 S 上相同 η 预不变线性的,是指对于所有的 $x,y\in S,\lambda\in[0,1]$ 有

$$f(y+\lambda\eta(x,y))=\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

例 1 容易验证以下函数在 S 上相对于 η 是预

* 收稿日期:2006-08-25
作者简介:张健(1972-),男,成都人,讲师,研究方向为广义凸性及最优算法。

不变线性函数,而该函数显然不是拟凸的。

$$f(x) = -|x|, \forall x \in S = [-2,2]$$

令 $$\eta(x,y) = \begin{cases} x - y & x,y \geq 0 \\ -x - y & x,y < 0 \end{cases}$$

定义6 (预拟不变线性)设 S 是关于 η 不变凸的,说函数 f 是关于 S 上相同 η 预拟不变线性的,是指对于所有的 $x,y \in S, \lambda \in [0,1]$ 有

$$\min\{f(x),f(y)\} \leq f(y+\lambda\eta(x,y)) \leq \max\{f(x),f(y)\}$$

例2 容易验证以下函数在 S 上相对于 η 是预拟不变线性函数,而该函数显然不是拟凸的。

$$f(x_1,x_2) = -x_1^2 - 2x_2^2,$$
$$\forall x = (x_1,x_2) \in S = [-2,2] \times [-2,2]$$

令 $$\eta(x,y) = \begin{cases} -x & y = (0,0) \\ y\sqrt{\dfrac{f(x)}{f(y)}} - y & y \neq (0,0) \end{cases}$$

定义7 (伪不变线性)设 S 是关于 η 不变凸的,说可微函数 f 是关于 S 上相同 η 伪不变线性的,是指以下条件满足

i) $\forall x,y \in S, f(y) < f(x) \Rightarrow \eta(y,x)^{\mathrm{T}} \nabla f(x) < 0$

ii) $\forall x,y \in S, f(y) > f(x) \Rightarrow \eta(y,x)^{\mathrm{T}} \nabla f(x) > 0$

2 不变线性函数的性质与判定

条件C[6-7] 设 $\eta: X \times X \to \mathbf{R}^n$,对 $\forall x,y \in \mathbf{R}^n$,$\forall \lambda \in [0,1]$,有

$$\eta(y,y+\lambda\eta(x,y)) = -\lambda\eta(x,y)$$
$$\eta(x,y+\lambda\eta(x,y)) = (1-\lambda)\eta(x,y)$$

引理1 设 S 是 $\mathbf{R}^n$ 中相对于 η 的不变凸集,f 是相对于 η 的预拟不变线性的充分必要条件是 f 与 $-f$ 都是相对于 η 的预拟不变凸的。

证明 (必要性)设 f 是关于 η 的预拟不变线性函数,则 $\forall x,y \in S, \forall \lambda \in [0,1]$ 有

$$\min\{f(x),f(y)\} \leq f(y+\lambda\eta(x,y)) \leq \max\{f(x),f(y)\} \tag{1}$$

如果 $f(y) \leq f(x)$,由(1)式的右部分,有

$$f(y+\lambda\eta(x,y)) \leq f(x)$$

即 f 是预拟不变凸的。

如果 $-f(y) \leq -f(x)$,由(1)式的左部分有

$$-f(y+\lambda\eta(x,y)) \leq -\min\{f(x),f(y)\} \leq \max\{-f(x),-f(y)\} = -f(x)$$

即 $-f$ 也是预拟不变凸的。

(充分性)如果 f 与 $-f$ 都是关于同一个 η 的预拟不变凸的,由 f 的预拟不变凸性,可以得到(1)式的右部分,而由 $-f$ 的预拟不变凸性可以得到(1)式的左部分,所以 f 是关于 η 的预拟不变线性函数。

证毕

引理2[6-7] 设 S 是 $\mathbf{R}^n$ 中相对于 η 的不变凸集,并且 η 满足条件C。那么,可微函数 f 相对于 η 是预拟不变凸充分必要条件是

$$f(y) \leq f(x) \Rightarrow \eta(y,x)^{\mathrm{T}} \nabla f(x) \leq 0$$

引理3[7] 设 S 是 $\mathbf{R}^n$ 中相对于 η 的不变凸集,并且 η 满足条件C。那么,可微函数 f 相对于 η 是伪不变凸的,并且

$$\forall x,y \in S, f(y) \leq f(x) \Rightarrow f(y+\eta(x,y)) \leq f(x)$$

那么,f 在 S 上关于同一个 η 是预拟不变凸的。

定理1 设 S 是 $\mathbf{R}^n$ 中相对于 η 的不变凸集,并且 η 满足条件C。那么,可微函数 f 相对于 η 是预拟不变线性函数的充分必要条件是

i) $\forall x,y \in S, f(x) = f(y) \Rightarrow \eta(x,y)^{\mathrm{T}} \nabla f(y) = 0$

ii) $\forall x,y \in S, f(y) \leq f(x) \Rightarrow f(y) \leq f(y+\eta(x,y)) \leq f(x)$

证明 (必要性)设 f 关于 η 的预拟不变线性函数,且 η 满足条件C,并且 $f(x) = f(y)$,则 $f(x) \leq f(y)$,而 f 是预拟不变凸,由引理2有

$$\eta(x,y)^{\mathrm{T}} \nabla f(y) \leq 0 \tag{2}$$

以及 $-f(x) \leq -f(y)$,而 $-f$ 是预拟不变凸,由引理2有

$$\eta(x,y)^{\mathrm{T}} \nabla(-f(y)) \leq 0 \tag{3}$$

由公式(2)-(3)得 $\eta(x,y)^{\mathrm{T}} \nabla f(y) = 0$。另外,由预拟不变线性函数的定义,$\lambda = 1$ 即得条件ii。

(充分性)首先证明 f 是预拟不变凸的。即设 $f(y) \leq f(x)$,证明 $\eta(y,x)^{\mathrm{T}} \nabla f(x) \leq 0$。

1)若 $f(y) = f(x)$,由定理条件有

$$\eta(y,x)^{\mathrm{T}} \nabla f(x) \leq 0。$$

2)设 $f(y) < f(x)$,下证 $\eta(y,x)^{\mathrm{T}} \nabla f(x) \leq 0$。

反证法,假设定理条件满足,且 $f(y) < f(x)$,而有

$$\eta(y,x)^{\mathrm{T}} \nabla f(x) > 0 \tag{4}$$

记 $h(\lambda) = f(x+\lambda\eta(y,x))$ $\lambda \in [0,1]$,则

$$\lim_{\lambda\to0^+}\frac{h(\lambda)-h(0)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to0^+}\frac{f(x+\lambda\eta(y,x))-f(x)}{\lambda} = \eta(y,x)^{\mathrm{T}} \nabla f(x) > 0 \tag{5}$$

由(5)式,有 $\exists \lambda_0 \in (0,1)$, s.t. $h(\lambda_0) > h(0)$,由条件ii)得 $f(y+\eta(x,y)) \leq f(x)$,即有

$$h(\lambda_0) > h(0) \geq h(1) \quad \lambda_0 \in (0,1) \tag{6}$$

另外,由 f 的连续性,可知 $h(\lambda)$ 在 $[0,1]$ 上也是连续的,再由(6)式

$\exists \alpha \in (\lambda_0, 1] \subset (0,1] \quad \text{s.t. } h(\alpha) = h(0) \quad (7)$

记$x_\alpha = x + \alpha\eta(y,x)$,由(7)式得$f(x_\alpha) = f(x)$,再由定理条件,有

$$\eta(x_\alpha, x)^{\mathrm{T}} \nabla f(x) = 0 \tag{8}$$

而 η 满足条件 C,有

$$\begin{aligned}\eta(x_\alpha,x) &= \eta(x+\alpha\eta(y,x),x) = \\ &\eta(x+\alpha\eta(y,x), x+\alpha\eta(y,x)-\alpha\eta(y,x)) = \\ &\eta(x+\alpha\eta(y,x), x+\alpha\eta(y,x) + \\ &\eta(x, x+\alpha\eta(y,x))) = \\ &-\eta(x,x+\alpha\eta(y,x)) = \alpha\eta(y,x)\end{aligned}$$

这样有

$$\eta(x+\alpha\eta(y,x),x) = \alpha\eta(y,x) \tag{9}$$

代入(8)式,得$\eta(y,x)^{\mathrm{T}} \nabla f(x) = 0$,与(4)式矛盾,假设不成立。

故有 $f(y) < f(x) \Rightarrow \eta(y,x)^{\mathrm{T}} \nabla f(x) \leqslant 0$

综合 1)与 2)有 $f(y) \leqslant f(x) \Rightarrow \eta(y,x)^{\mathrm{T}} \nabla f(x) \leqslant 0$,再由引理 2,$f$ 为预拟不变凸的。

同理,可以证明 $-f$ 也为预拟不变凸的,再结合引理 1,则 f 是预拟性的。 证毕

定理 2 设 S 是 $\mathbf{R}^n$ 中相对于 η 的不变凸集,并且 η 满足条件 C,并且

(B) $\forall x,y \in S, f(y) \leqslant f(x) \Rightarrow f(y+\eta(x,y)) \leqslant f(x)$

那么 f 在 S 上关于同一个 η 是伪不变凸的充分必要条件是

$\forall x \in S, y \in S, \eta(y,x) \neq 0, \eta(y,x)^{\mathrm{T}} \nabla f(x) = 0 \Rightarrow$ 函数 $g(t) = f(x+t\eta(y,x))$ 在 $t=0$ 处取得局部极小点,其中 $t \in \{t \geqslant 0 \mid x+t\eta(y,x) \in S\}$。

证明 (必要性)设 f 是伪不变凸,且 η 满足条件 C。

对 $x \in S, y \in S$ 有 $\eta(y,x) \neq 0, \eta(y,x)^{\mathrm{T}} \nabla f(x) = 0$,由定理 1 的证明过程中,知道

$$t\eta(y,x) = \eta(x+t\eta(y,x),x) \tag{10}$$

由(10)式和伪不变凸定义 $\forall t \in [0,1]$,有 $t\eta(y,x)^{\mathrm{T}} \nabla f(x) \geqslant 0 \Rightarrow \eta(x+t\eta(y,x),x)^{\mathrm{T}} \nabla f(x) \geqslant 0 \Rightarrow f(x+t\eta(y,x)) \geqslant f(x)$,也就是 $h(t) = f(x+t\eta(y,x))$ 在 $t=0$ 处取得极小点。

(充分性)假设定理中的条件都满足,并且 $\eta(y,x)^{\mathrm{T}} f(x) \geqslant 0$,下证 $f(x) \leqslant f(y)$。

作函数 $h(t) = f(x+t\eta(y,x))$

$$t \in \{t \geqslant 0 \mid x+t\eta(y,x) \in S\}$$

假设 $f(y) < f(x)$,由条件(B)有 $f(x+\eta(y,x)) \leqslant f(x)$,即有 $h(1) \leqslant h(0)$。

1)如果 $\eta(y,x)^{\mathrm{T}} \nabla f(x) > 0$,则有 $h'(0) > 0$,由(7)式的结果,那么一定存在局部极大点 $t_0 \in (0,1)$,从而有 $h'(t_0) = 0$,即 $\eta(y,x)^{\mathrm{T}} \nabla f(x_0) = 0$,其中 $x_0 = x + t_0\eta(y,x)$。

由条件 C,有 $\eta(y,x_0)^{\mathrm{T}} \nabla f(x_0) = (1-t_0)\eta(y,x)^{\mathrm{T}} \nabla f(x_0) = 0$。然而,$t_0$ 对 h 并不是极小点,矛盾。

2)如果 $\eta(y,x)^{\mathrm{T}} \nabla f(x) = 0$,那么 $t=0$,则有 $g'(0) = 0$,由假设,0 是 h 的极小点,即 x 是 f 的局部极小点,在结合 $h(1) \leqslant h(0)$ 则在 $(0,1)$ 上存在局部极大点 $t_0 \in (0,1)$,因此 $h'(t_0) = 0$,同 1)这也将导致矛盾。

综合 1)、2)得 $f(y) \geqslant f(x)$,即有 $\eta(y,x)^{\mathrm{T}} f(x) \geqslant 0 \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$,故 f 是伪不变凸的。 证毕

定理 3 设 S 是 $\mathbf{R}^n$ 中相对于 η 的不变凸集,并且 η 满足条件 C,并且

(B) $\forall x,y \in S, f(y) \leqslant f(x) \Rightarrow f(y+\eta(x,y)) \leqslant f(x)$。那么以下叙述是等价的

ⅰ)f 是伪不变线性的;

ⅱ)$\forall x,y \in S, \eta(y,x)^{\mathrm{T}} \nabla f(x) = 0 \Leftrightarrow f(y) = f(x)$;

ⅲ)$\exists p: S \times S \to \mathbf{R}_+$,使得

$$f(y) = f(x) + p(y,x) \cdot \eta(y,x)^{\mathrm{T}} \nabla f(x) \tag{11}$$

证明 1)ⅰ)⇒ⅱ) 设 f 是伪不变线性的,且 $\eta(y,x)^{\mathrm{T}} \nabla f(x) = 0$ 则由伪不变性定义有 $f(y) \geqslant f(x)$ 和 $f(y) \leqslant f(x)$,从而有 $f(y) = f(x)$;另外,如果 f 是伪不变线性的,而又有条件(B),结合引理 3,则 f 也是预拟不变线性的,再由定理 1 得 $\eta(y,x)^{\mathrm{T}} \nabla f(x) = 0$。

2)ⅱ)⇒ⅰ) 设条件 ⅱ)成立,即有

$$\eta(y,x)^{\mathrm{T}} \nabla f(x) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\exists t_0 > 0, \forall t \in \{t \in [0,t_0) \mid x+t\eta(y,x) \in S\},$$
$$f(x+t\eta(y,x)) = f(x)$$

这也就是意味着 $\eta(y,x)^{\mathrm{T}} \nabla f(x) = 0$,当且仅当函数 $h(t) = f(t+t\eta(y,x))$ 在 $t=0$ 处取得局部极小点,由定理 2 有 f 是伪不变凸。同理有 $-f$ 也是伪不变凸,故 f 是伪不变线性的。

3)ⅱ)⇒ⅲ) 令

$$p(y,x) = \begin{cases} 1, & \eta(y,x)^{\mathrm{T}} \nabla f(x) = 0 \\ \dfrac{f(y)-f(x)}{\eta(y,x)^{\mathrm{T}} \nabla f(x)}, & \eta(y,x)^{\mathrm{T}} \nabla f(x) \neq 0 \end{cases}$$

如果 ⅱ)成立,则 $\eta(y,x)^{\mathrm{T}} \nabla f(x) = 0$ 当且仅当 $f(y) = f(x)$,则(11)式成立;若 $\eta(y,x)^{\mathrm{T}} \nabla f(x) \neq 0$,则(11)式显然成立。下证当 $\eta(y,x)^{\mathrm{T}} \nabla f(x) \neq 0$ 时 $p(y,x) > 0$。因为 ⅱ)成立,所以有 ⅰ)成立。由伪不

变线性的定义可以知道当 $f(y)\neq f(x)$,有 $f(y)-f(x)$ 与 $\eta(y,x)^{\mathrm{T}}\nabla f(x)$ 同号。

综上有 $\forall x,y\in S,p(y,x)>0$,且(11)式成立。

4) iii)⇒ii) 若(11)式成立,而 $\forall x,y\in S$, $p(y,x)>0$ 则有

$$\forall x,y\in S,\eta(y,x)^{\mathrm{T}}\nabla f(x)=0\Leftrightarrow f(y)=f(x)$$

即条件 ii)成立。 证毕

3 不变线性函数优化的解集特征

考虑如下问题(P)

$$\min f(x)$$
$$\text{s.t. } x\in S$$

这里 $S\in\mathbf{R}^n$ 是非空关于 η 的不变凸集,$f:S\to\mathbf{R}$。

假定问题(P)的解集,用 $\bar{S}:=\arg\min\limits_{x\in S}f(x)$ 表示,是非空集合。

命题1 如果 f 是在 S 上关于 η 预拟不变线性的,那么优化问题(P)的解集 $\bar{S}$ 是相对于同一个 η 的不变凸集。

证明 $\forall x,y\in\bar{S},\forall\lambda\in[0,1]$,则 $f(x)=f(y)$ 且 $y+\lambda\eta(x,y)\in S$,由预拟不变线性定义有 $f(y+\lambda\eta(x,y))=f(x)=f(y)=\min f(z)_{z\in S}$,这样 $y+\lambda\eta(x,y)\in\bar{S}$。 证毕

命题2 如果 f 是在 S 上关于 η 伪不变线性的,且 η 满足条件C以及以下条件

(B) $\forall x,y\in S,f(y)\leqslant f(x)\Rightarrow f(y)\leqslant f(y+\eta(x,y))\leqslant f(x)$

那么优化问题(P)的解集 $\bar{S}$ 是相对于同一个 η 的不变凸集。

证明 由命题条件及定理1,那么 f 是预拟不变线性的,再由命题1,则命题得证。 证毕

定理4 设 f 是在 $S\subset\mathbf{R}^n$ 上的伪不变线性函数。η 满足条件C,同时该伪不变线性函数还满足条件

(B) $\forall x,y\in S,f(y)\leqslant f(x)\Rightarrow f(y)\leqslant f(y+\eta(x,y))\leqslant f(x)$

设 $\bar{x}\in\bar{S}$,那么 $\bar{S}=\tilde{S}=\hat{S}=S^{\#}$,其中

$$\tilde{S}:=\{x\in S\mid\eta(\bar{x},x)^{\mathrm{T}}\nabla f(x)=0\}\tag{12}$$

$$\hat{S}:=\{x\in S\mid\eta(\bar{x},x)^{\mathrm{T}}\nabla f(\bar{x})=0\}$$

$$S^{\#}:=\{x\in S\mid\eta(\bar{x},x)^{\mathrm{T}}\nabla f(x+\lambda\eta(\bar{x},x))=0,\ \forall\lambda\in[0,1]\}\tag{13}$$

证明 $x\in\bar{S}$ 当且仅当 $f(x)=f(\bar{x})$。由定理3,$f(x)=f(\bar{x})$ 当且仅当

$$\eta(x,\bar{x})^{\mathrm{T}}\nabla f(x)=0=\eta(x,\bar{x})^{\mathrm{T}}\nabla f(\bar{x})$$

因此,有 $\bar{S}=\tilde{S}=\hat{S}$。下证 $\bar{S}=S^{\#}$。

首先证明

$$S^{\#}\subset\tilde{S}=\bar{S},\forall x\in S^{\#}\Rightarrow$$
$$\eta(\bar{x},x)^{\mathrm{T}}\nabla f(x+\lambda\eta(\bar{x},x))=0,\forall\lambda\in[0,1]$$

特别 $\lambda=0$ 有

$$\forall x\in S^{\#}\Rightarrow\eta(\bar{x},x)^{\mathrm{T}}\nabla f(x)=0 \text{ 即 } x\in\tilde{S}$$

其次证明 $\tilde{S}=\bar{S}\subset S^{\#},\forall x\in\bar{S}=\hat{S}$,则

$$\eta(\bar{x},x)^{\mathrm{T}}\nabla f(x)=0$$

$\forall\lambda\in[0,1]$,且 η 满足条件 C,并由(9)式有

$$\eta(x+\lambda\eta(\bar{x},x),x)^{\mathrm{T}}\nabla f(x)=$$
$$\lambda\eta(\bar{x},x)^{\mathrm{T}}\nabla f(x)=0$$

定理3有

$$f(x)=f(x+\lambda\eta(\bar{x},x))$$

再由定理3,有

$$\eta(x,x+\lambda\eta(\bar{x},x))^{\mathrm{T}}\nabla f(x+\lambda\eta(\bar{x},x))=0$$

因为 η 满足条件C,所以有

$$\eta(\bar{x},x)^{\mathrm{T}}\nabla f(x+\lambda\eta(\bar{x},x))=0$$

这样 $x\in S^{\#}$,因此 $\bar{S}\subset S^{\#}$。 证毕

推论1 设 f 是在 $S\subset\mathbf{R}^n$ 上的伪不变线性函数。η 满足条件C,同时该伪不变线性函数还满足条件

(B) $\forall x,y\in S,f(y)\leqslant f(x)\Rightarrow f(y)\leqslant f(y+\eta(x,y))\leqslant f(x)$

设 $\bar{x}\in\bar{S}$,那么 $\bar{S}=\tilde{S}_1=\hat{S}_1=S_1^{\#}$,其中

$$\tilde{S}_1:=\{x\in S\mid\eta(\bar{x},x)^{\mathrm{T}}\nabla f(x)\geqslant 0\}$$

$$\hat{S}_1:=\{x\in S\mid\eta(\bar{x},x)^{\mathrm{T}}\nabla f(\bar{x})\geqslant 0\}$$

$$S_1^{\#}:=\{x\in S\mid\eta(\bar{x},x)^{\mathrm{T}}\nabla f(x+\lambda\eta(\bar{x},x))\geqslant 0,\ \forall\lambda\in[0,1]\}\tag{14}$$

证明 从(12)式可以看出 $\bar{S}\subset\tilde{S}_1$。另外一方面,设 $x\in\tilde{S}_1$,则 $\eta(\bar{x},x)^{\mathrm{T}}\nabla f(x)\geqslant 0$,由定理3中的iii)有

$$f(\bar{x})=f(x)+p(x,\bar{x})\eta(\bar{x},x)^{\mathrm{T}}\nabla f(x)\geqslant f(x)$$

即有 $x\in\bar{S}$,这样就有 $\bar{S}=\tilde{S}_1$。同理可以证明 $\bar{S}=\hat{S}_1$。下面证明 $\bar{S}=S_1^{\#}$。

在(14)式中,令 $\lambda=0$ 可以得 $S_1^{\#}\subset\tilde{S}_1$;另外,显然有 $S^{\#}\subset S_1^{\#}$,这样就有

$$\bar{S}=S^{\#}\subset S_1^{\#}\subset\tilde{S}_1=\bar{S}$$

此处 $S^{\#}$ 是由(13)式定义。因此,结论成立。 证毕

参考文献:

[1] JEYAKUMAR V, YANG X Q. On Characterizing the Solution Sets of Pseudolinear Programs[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1995, 87(3): 747-755.

[2] GIORGI G, GUERRAGGIO A, THIERFELDER J. Mathe-

(下转33页)

(上接18页)

matics of Optimization: Smooth and Nonsmooth Case[M]. North American: Elsevier, 2004.

[3] LU Qi-hui, ZENG Li-fei. On Characterizing the Solution Sets of Pseudolinear Programs[J]. Journal of Fudan University(Natural Science), 2004,43(1):130-133.

[4] HANSON M A. On Sufficiency of the Kuhn-Tucker Condition[J]. Journal of Mathematics and Application, 1981, 80:545-550.

[5] PINI R. Invexity and Generalized Convexity[J]. Optimization, 1991,22:513-525.

[6] MOHAN S R, NEOGY S K. On Invex Sets and Preinvex Functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,1995, 189:901-908.

[7] YANG X M, YANG X Q, TEO K L. Generalized Invexity and Generalized Invariant Monotonicity[J]. Journal of Optimization Theory and Applications,2003,117(3):607-625.

[8] RUIZ-GARZON G, OSUNA-GOMEZ R. Generalized Invex Monotonicity[J]. European Journal of Operational Research,2003,144:501-512.

[9] 颜丽佳,刘芙萍. 强预不变凸函数[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2005,22(1):11-15.

[10] 黄应全,赵克全. r-预不变凸函数的两个充分条件[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2004,21(4):17-18.

[11] 彭建文,汪定国. 不变凸类条件下多目标规划α,κ-较多有效解的有效性充分条件[J]. 重庆师范学院学报(自然科学版),2001,18(4):57-60.

[12] 王兴国. (p,r)-不变凸性下广义分式规划的最优性条件[J]. 四川师范大学学报(自然科学版),2005,28(1):66-69.

(责任编辑 黄 颖)