关于不定方程组 $6x^2-4y^2=2$，$20y^2-6z^2=14$ *

李　杨
(重庆师范大学 数学与计算机科学学院，重庆 400047)

摘　要 运用 Baker 方法得到了不定方程组 $6x^2-4y^2=2$，$20y^2-6z^2=14$ 的正整数解的上界。其中 y 的上界为 $10^{18^{382}}$。

关键词 不定方程组；解的上界；Baker 方法
中图分类号 O156　　**文献标识码** A　　**文章编号** 1672-6693(2007)01-0019-03

On the Upper Bound for the Positive Integer Solutions of the System of Diophantine Equations $6x^2-4y^2=2$ and $20y^2-6z^2=14$

LI Yang
(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: By Baker's method, this paper solutes the upper bound for the positive integer solutions of Diophantine equations $6x^2-4y^2=2$, $20y^2-6z^2=14$. And the upper bound for y is $10^{18^{382}}$.

Key words: Diophantine equations system; the upper bound of solutions; Baker's method

在不定方程(组)的研究中,整数解的绝对值的上界的确定是一个重要的问题,因为一旦知道了这一上界,从理论上讲,只要把界内的整数代入原方程(组)一一验算,即可得全部整数解[1-2]。

考虑不定方程组

$$\begin{cases}6x^2-4y^2=2\\20y^2-6z^2=14\end{cases}\tag{1}$$

只要能求出其所有的正整数解,即可得到它的一切整数解。记

$$S=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\mathbf{N}\text{ 且满足(1)式}\},$$

$$T=\{y\mid(x,y,z)\in S\}$$

如果能求出 T 的上界,从理论上说,只要将界内的 y 值代入(1)式中既可求出方程组的全部正整数解。称 T 的上界为方程组(1)式的正整数解的上界。

引理[3-4]　设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 是 $k(k\geqslant2)$ 个非零代数数,$\alpha(i=1,2,\cdots,k)$ 的次数和高分别不超过 $d(d\geqslant4)$ 和 $A(A\geqslant4)$。若存在整数 $b_1,b_2,\cdots,b_k$,满足 $0<\left|b_1\lg\alpha_1+b_2\lg\alpha_2+\cdots b_k\lg\alpha_k\right|<e^{-\delta H}$,其中 $0<\delta\leqslant1$,$H=\max(\left|b_1\right|,\left|b_2\right|,\cdots,\left|b_k\right|)$,则

$$H<(4^{k^2}\delta^{-1}d^{2k}\lg A)^{(2k+1)^2}。$$

这里所说的代数数 α 的次数,不妨设为 n,是指 α 满足一个 n 次整系数代数方程,而不满足任何低于 n 次的整系数代数方程;代数数 α 的高,不妨设为 h,是指 α 所适合的整系数不可约多项式 $a_mx_m+\cdots+a_1x_1+a_0$ 中系数 $a_j(j=0,1,\cdots,m)$ 的绝对值的最大值,即

$$h=\max(\left|a_m\right|,\cdots,\left|a_1\right|,\left|a_0\right|)。$$

这个结论是由 Baker 证明的,运用此结论,Baker 还给出了某些类型的不定方程整数解的绝对值的上界,这是一个突破性的工作,Baker 因此获得了 1970 国际数学家会议的 Fields 奖,按照 Baker 的这种思路来研究不定方程(组)的方法,通常称为 Baker 方法[5]。

方程组(1)式可化为

$$\begin{cases}36x^2-24y^2=12\\120y^2-36z^2=84\end{cases}\tag{2}$$

* 收稿日期:2006-06-13　修回日期:2006-10-24
资助项目:重庆市教委科研基金项目(No. 010204)
作者简介:李杨(1981-),女,辽宁凤城人,硕士研究生,研究方向为数论。

令 $6x = x'$，$y = y'$，$6z = z'$，则方程组(2)式变为

$$\begin{cases} x'^2 - 24y'^2 = 12 \\ z'^2 - 120y'^2 = -84 \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} x^2 - 24y^2 = 12 \\ z^2 - 120y^2 = -84 \end{cases} \tag{3}$$

易知 Pell 方程 $x^2 - 24y^2 = 1$ 的基本解由 $5 + \sqrt{24}$ 表出，不定方程 $x^2 - 24y^2 = 12$ 的基本解由 $6 + \sqrt{24}$ 表出。所以，方程 $x^2 - 24y^2 = 12$ 的所有正整数解可表为

$$x_m + y_m\sqrt{24} = (6 + \sqrt{24})(5 + \sqrt{24})^m, (m \geqslant 0) \tag{4}$$

又因为

$$x_{m+1} + y_{m+1}\sqrt{24} = (x_m + y_m\sqrt{24})(5 + \sqrt{24})$$

所以有

$$\begin{cases} x_{m+1} = 5x_m + 24y_m \\ y_{m+1} = x_m + 5y_m \end{cases} \tag{5}$$

其中 $m = 0, 1, 2, \cdots$，$x_0 = 5$，$y_0 = 1$。

不难得出 Pell 方程 $z^2 - 120y^2 = 1$ 的基本解由 $11 + \sqrt{120}$ 表出，不定方程 $z^2 - 120y^2 = -84$ 的基本解由 $6 + \sqrt{120}$ 或 $-6 + \sqrt{120}$ 表出。所以，方程 $z^2 - 120y^2 = -84$ 的所有正整数解可表为

$$z_n + y_n\sqrt{120} = (6 + \sqrt{120})(11 + \sqrt{120})^n \tag{6}$$

其中 $n = 0, 1, 2, \cdots$。或

$$z_n + y_n\sqrt{120} = (-6 + \sqrt{120})(11 + \sqrt{120})^n \tag{7}$$

其中 $n = 0, 1, 2, \cdots$。

由(4)式得

$$x_m - y_m\sqrt{24} = (6 - \sqrt{24})(5 - \sqrt{24})^m, (m \geqslant 0) \tag{8}$$

(4) − (8)式得

$$2\sqrt{24}y_m = (6 + \sqrt{24})(5 + \sqrt{24})^m - (6 - \sqrt{24})(5 - \sqrt{24})^m, (m \geqslant 0)$$

类似地，有

$$2\sqrt{120}y_n = (6 + \sqrt{120})(11 + \sqrt{120})^n - (6 - \sqrt{120})(11 - \sqrt{120})^n$$

或

$$2\sqrt{120}y_n = (-6 + \sqrt{120})(11 + \sqrt{120})^n + (6 + \sqrt{120})(11 - \sqrt{120})^n (n \geqslant 0)$$

令 $y_m = y_n$，得

$$\frac{(6 + \sqrt{24})(5 + \sqrt{24})^m}{\sqrt{24}} + \frac{(\sqrt{24} - 6)(5 + \sqrt{24})^{-m}}{\sqrt{24}} = \frac{(6 + \sqrt{120})(11 + \sqrt{120})^n}{\sqrt{120}} + \frac{(\sqrt{120} - 6)(11 + \sqrt{120})^{-n}}{\sqrt{120}}$$

或

$$\frac{(6 + \sqrt{24})(5 + \sqrt{24})^m}{\sqrt{24}} + \frac{(\sqrt{24} - 6)(5 + \sqrt{24})^{-m}}{\sqrt{24}} = \frac{(-6 + \sqrt{120})(11 + \sqrt{120})^n}{\sqrt{120}} + \frac{(\sqrt{120} + 6)(11 + \sqrt{120})^{-n}}{\sqrt{120}} \tag{10}$$

若 $(x, y, z) \in S$，则必存在 m, n，使得 $y = y_n = y_m$，从而必有(9)式或(10)式成立。因此，如果求得使(9)式或(10)式成立的 m 的上界，就可通过(5)式求得 y_m 的上界，从而得 T 的上界。

定理1 i) 若(9)式成立，则 $m = n = 0$ 或 $m > n > 0$；ii) 若(10)式成立，则 $m = n = 2$ 或 $m > n$。

证明 由(4)式，当 $m = 0$，$y_m = 1$ 若(9)式成立，则必有 $y_n = 1$。由(6)式易算得当 $n = 0$ 时，$y_n = 1$，且 y_n 随 n 的增大而增大，故只可能有 $n = 0$。

当 $m > 0$ 时，由(5)式知，$y_m > 1$。此时，若(9)式成立，则必有 $y_n > 1$，由此有 $n > 0$。记

$$P = \frac{(6 + \sqrt{24})(5 + \sqrt{24})^m}{\sqrt{24}},$$

$$Q = \frac{(6 + \sqrt{120})(11 + \sqrt{120})^n}{\sqrt{120}} \tag{11}$$

则 $P > 2$，$Q > 1$，且由(9)式得

$$P - \frac{1}{2}P^{-1} = Q + \frac{7}{10}Q^{-1}$$

于是 $P - Q = \frac{1}{3}P^{-1} + \frac{7}{10}Q^{-1} > 0$，因而有 $P > Q$。这样，利用(11)式即得到

$$\frac{(6 + \sqrt{24})(5 + \sqrt{24})^m}{\sqrt{24}} > \frac{(6 + \sqrt{120})(11 + \sqrt{120})^n}{\sqrt{120}}$$

$$(5 + \sqrt{24})^m > \frac{(6 + \sqrt{120})\sqrt{24}}{\sqrt{120}(6 + \sqrt{24})}(11 + \sqrt{120})^n$$

$$m\lg(5 + \sqrt{24}) > \lg 0.69 + n\lg(11 + \sqrt{120})$$

可得 $2.292m > -0.371 + 3.088n$，即

$2.292(m - n) > 0.796n - 0.371 > 0$，$n > 0$，$n \in \mathbf{Z}$

所以 $m > n$，结论 i) 得证。

结论 ii) 的证明与结论 i) 的类似。 证毕

定理2 i) 若(9)式成立，且 $m \geq 3$，则 $\lg\frac{P}{Q} < 1.03336P^{-2}$；ii) 若(10)式成立，且 $m \geqslant 3$，则 $\lg\frac{P}{Q_1} < 1.03336P^{-2}$，这里

$$Q_1 = \frac{(-6 + \sqrt{120})}{\sqrt{120}}(11 + \sqrt{120})^n$$

证明　若(9)式成立，且 $m\geqslant 3$，则由定理 1 可知 $n\geqslant 1$，于是由(11)式知 $P>2160$，$Q>33$，从而

$$\frac{1}{P}<\frac{1}{2160},\frac{1}{Q}<\frac{1}{33}$$

则
$$Q=P-\frac{1}{2}P^{-1}-\frac{7}{10}Q^{-1}>$$
$$P-\frac{1}{2\times 2160}-\frac{7}{10\times 33}>P-\frac{1}{48}$$

故 $Q^{-1}<\dfrac{48}{48P-1}$，且

$$P-Q<\frac{1}{2}P^{-1}+\frac{7}{10}Q^{-1}<\frac{1}{2}P^{-1}+\frac{7}{10}\times\frac{48}{48P-1}$$

当 $P>2160$ 时，计算知 $\dfrac{48}{48P-1}<1.00001P^{-1}$。所以

$$P-Q<\frac{1}{2}P^{-1}+\frac{7}{10}\times 1.00001P^{-1}<1.03335P^{-1}$$

于是 $0<\dfrac{P-Q}{P}<1.03335P^{-2}<1$，根据当 $0<x<1$ 时，$-\lg(1-x)<x+x^2$，得

$$0<\lg\frac{P}{Q}=-\lg\left(1-\frac{P-Q}{P}\right)<$$
$$-\lg(1-1.03335P^{-2})<$$
$$1.03335P^{-2}+(1.03335P^{-2})^2=$$
$$(1.03335+1.03335^2P^{-2})P^{-2}<1.03336P^{-2}$$

于是结论 ⅰ）成立。

仿照上面的证明过程，易证结论 ⅱ）。　　证毕

定理 3　ⅰ）若(9)式成立，则 $0\leqslant m<18^{382}$，ⅱ）若(10)式成立，则 $2\leqslant m<18^{382}$。

证明　由于 $P>Q$，及

$$\frac{P}{Q}=\frac{\sqrt{120}(6+\sqrt{24})(5+\sqrt{24})^m}{\sqrt{24}(6+\sqrt{120})(11+\sqrt{120})^n}$$

若(9)式成立且 $m\geqslant 3$，则由定理 2，有

$$0<\lg\frac{P}{Q}=m\lg(5+\sqrt{24})-n\lg(11+\sqrt{120})+$$
$$\lg\frac{\sqrt{120}(6+\sqrt{24})}{\sqrt{24}(6+\sqrt{120})}<1.03336P^{-2}=$$
$$1.03336\times\left[\frac{\sqrt{24}}{6+\sqrt{24}}\right]^2\times\frac{1}{(5+\sqrt{24})^{2m}}<$$
$$0.20878\times\frac{1}{(5+\sqrt{24})^m}<0.20878\times\frac{1}{e^m}<e^{-m}$$

令
$$\alpha_1=5+\sqrt{24},\alpha_2=11+\sqrt{120},$$
$$\alpha_3=\frac{\sqrt{120}(6+\sqrt{24})}{\sqrt{24}(6+\sqrt{120})},\alpha_3'=\frac{\sqrt{120}(6+\sqrt{24})}{\sqrt{24}(-6+\sqrt{120})}$$

α_1 和 α_2 分别满足 $x^2-10x+1=0$ 和 $x^2-22x+1=0$。且 $x^2-10x+1$ 和 $x^2-22x+1$ 均为整系数不可约多项式。α_3 在四次域上的 3 个共轭根为

$$a_1=\frac{\sqrt{120}(6-\sqrt{24})}{-\sqrt{24}(6+\sqrt{120})},$$
$$a_2=\frac{-\sqrt{120}(6+\sqrt{24})}{\sqrt{24}(6-\sqrt{120})},a_3=\frac{\sqrt{120}(6-\sqrt{24})}{\sqrt{24}(6-\sqrt{120})}$$

以这 4 个代数数为解的方程为

$$49x^4-280x^3+150x^2+50x+25=0$$

且方程左边为一整系数不可约多项式。

现在应用本文的引理。这里

$$k=3,d=4,A=280,H=\max(m,n,1)=m$$

所以
$$m<[4^{3^2}\times 1\times 4^{2\times 3}\lg 280]^{(2\times 3+1)^2}=$$
$$[4^{15}\times 5.64]^{49}<18^{382}$$

再有当 $m=n=0$ 时，(9)式成立，即得到结论 ⅰ）。

根据以上证明，将 Q 换成 Q_1，且在应用本文的引理时将 α_3 换成 α_3'，可证结论 ⅱ）。　　证毕

由 $m<18^{382}$ 及 $2\sqrt{24}y_m=(6+\sqrt{24})(5+\sqrt{24})^m-(6-\sqrt{24})(5-\sqrt{24})^m$，$(m\geqslant 0)$，可得 $y<10^{18^{382}}$ 即 y 的上界为 $10^{18^{382}}$，则不定方程组 $\begin{cases}6x^2-4y^2=2\\20y^2-6z^2=14\end{cases}$ 的正整数解的上界可得。

参考文献：

[1] 李杨. 关于不定方程组 $11x^2-9y^2=2$，$40y^2-11z^2=29$ [J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2006，23(2)：20-22.

[2] 陈志云. 关于不定方程组 $x^2-7y^2=2$，$z^2-32y^2=-23$ 的正整数解的上界[J]. 华中师范大学学报(自然科学版)，1996，31(3)：253-256.

[3] BAKER A，DAVANPORT H. The Equations $3x^2-2=y^2$ and $8y^2-7=z^2$ [J]. Quart J Math，1969，20(2)：129-137.

[4] 李杨. 关于不定方程组 $7x^2-5y^2=2$，$24y^2-7z^2=17$ [J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2006，23(3)：33-35.

[5] 柯召，孙琦. 谈谈不定方程[M]. 上海：上海教育出版社，1980. 142-154.

(责任编辑　黄　颖)