2007 年 1 月　　重庆师范大学学报(自然科学版)　　Jan. 2007
第 24 卷 第 1 期　　Journal of Chongqing Normal University(Natural Science Edition)　　Vol. 24 No. 1

$\mathrm{ri}(A+B)\subset\mathrm{ri}A+B$ 成立的条件*

杨玉红，吴　欧
(重庆师范大学 数学与计算机科学学院，重庆 400047)

摘　要 根据使得 $\mathrm{int}(A+B)\subset\mathrm{int}A+B$ 成立的已有结论,在集合相对代数内部和相对拓扑内部概念的基础上,分别给出了线性空间中 $(A+B)^{ri}\subset A^{ri}+B$ 和线性拓扑空间中 $\mathrm{ri}(A+B)\subset\mathrm{ri}A+B$ 成立的条件,从而将 $\mathrm{cor}(A+B)\subset\mathrm{cor}A+B$ 和 $\mathrm{int}(A+B)\subset\mathrm{int}A+B$ 关于内部的结论推广到了相对内部的情形。

关键词:凸集;相对代数内部;相对拓扑内部;仿射集(包)
中图分类号:O177.3　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2007)01-0022-03

Conditions Assuring $\mathbf{ri}(A+B)\subset\mathbf{ri}A+B$

YANG Yu-hong, WU Ou
(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: Based on conditions assuring $\mathrm{int}A+B=\mathrm{int}(A+B)$, conditions assuring $(A+B)^{ri}\subset A^{ri}+B$ in a linear space and conditions assuring $\mathrm{ri}(A+B)\subset\mathrm{ri}A+B$ in a linear topological space are given respectively. Therefore, such conclusions about interior as $\mathrm{cor}(A+B)\subset\mathrm{cor}A+B$ and $\mathrm{int}(A+B)\subset\mathrm{int}A+B$ are generalized to the situation of relative interior.

Key words: convex set; relative algebraic interior; relative topological interior; affine set(hull)

凸性概念在数学与应用数学的各个领域起着举足轻重的作用。近年来,文献[1-3]对凸集的核(core)运算和内部(interior)运算进行了详细的研究,得出了基本而又重要的结论,最近,文献[4]借助于开集的性质将文献[1-3]的结论在一定程度上进行了推广。但这些结论是基于代数内部(拓扑内部)非空的前提,即使是对于凸集,代数内部(拓扑内部)在很多时候皆为空集,因而将其中的一些结论推广到相对代数内部(相对拓扑内部)的情形。由于"任何有限维非空凸集的相对内部是非空的"[5],从而这种推广将使得凸集的内部运算更具有实际应用价值。

1　相关定义与记号约定

X 为实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间,E 为实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性拓扑空间。

$$[a,b]:=\{\lambda a+(1-\lambda)b:0\leqslant\lambda\leqslant1\};$$

$$[a,b):=[a,b]\setminus\{b\};(a,b):=[a,b)\setminus\{a\};$$

$$A\pm B:=\{x\in X\mid x=a+b:a\in A,b\in B\};$$

$$A+x_0:=\{x\in X\mid x=a+x_0:a\in A\};$$

$$\lambda A:=\{x\in X\mid x=\lambda a:a\in A\},$$

其中 $x_0\in X$,$A,B\subset X$,$\lambda\in\mathbf{R}$。

定义 1　设 A 为 X 的子集,

1)如果对于 A 中任意两点 a,b,都有 $\lambda a+(1-\lambda)b\in A(0\leqslant\lambda\leqslant1)$,则称 A 为凸集;

2)如果对于 A 中任意两点 a,b,都有 $\frac{1}{2}(a+b)\in A$,则称集合 A 为中点凸集。

定义 2　设 A 为 X 的子集,如果对于 A 中任意两点 a,b,都有 $\lambda a+(1-\lambda)b\in A(\lambda\in\mathbf{R})$,则称集合 A 为仿射集。另外,称包含 A 的最小仿射集为 A 的仿射包,记作 $\mathit{aff}A$。

注 1　由于 A 的仿射包是仿射集,则 $\mathit{aff}(\mathit{aff}A)=\mathit{aff}A$。易知,

$$\mathit{aff}A=\{x\mid x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i,\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1,\lambda_i\in\mathbf{R},a_i\in A,1\leqslant i\leqslant n\}。$$

定义 3　设 A 为 X 的子集,如果点 $a\in A$,满足对任意 $h\in\mathit{aff}A-a$,存在 $\varepsilon>0$,使得 $[a,a+\varepsilon h]\subset A$,则称 a 为 A 的相对代数内点。A 的相对代数内点的全

* 收稿日期:2006-03-27
作者简介:杨玉红(1979-),女,成都人,硕士研究生,研究方向为广义凸性及最优化理论。

体称为 A 的相对代数内部，记作 A^{ri}。如果 $A=A^{ri}$，则称 A 为 X 的相对代数开集。

显然，$\mathrm{cor}A\subset A^{ri}\subset A$。

定义 4　设 A 为 E 的子集，则

1）如果点 $a\in E$，满足对 a 的任意一个邻域 V，$A\cap V\neq\varnothing$，则称 a 为 A 的接触点。A 的接触点的全体称为 A 的闭包，记作 $\mathrm{cl}A$；

2）如果点 $a\in E$，满足存在一个零邻域 U，使得 $[(a+U)\cap \mathrm{cl}(\mathit{aff}A)]\subset A$，则称 a 为 A 的相对拓扑内点。A 的相对拓扑内点的全体称为 A 的相对拓扑内部，记作 $\mathrm{ri}A$。如果 $A=\mathrm{ri}A$，则称 A 为 E 的相对拓扑开集。

显然，$\mathrm{int}A\subset \mathrm{ri}A\subset A$。

2　预备知识

引理 1[5]　设 $A\subset X$ 为凸集，$p\in A^{ri}$，$a\in A$，则有 $[p,a)\subset A^{ri}$。

引理 2　设 $A\subset E$ 为凸集，若 $p\in \mathrm{ri}A$，$a\in \mathrm{cl}A$，则有 $[p,a)\subset \mathrm{ri}A$。

为了证明引理 2，首先给出下面几个结论。

引理 3[6]　设 A 为 X 的一个子集，则 A 为凸集等价于 $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$，任意的 $\alpha,\beta\geqslant 0$。

命题 1　设 A,B 为 X 的两子集，则以下结论成立。

1）$\lambda(A\cap B)=\lambda A\cap\lambda B$，$\lambda\,\mathit{aff}A=\mathit{aff}(\lambda A)$，任意的 $\lambda\in\mathbf{R}$；

2）$(A\cap B)+x_0=(A+x_0)\cap(B+x_0)$，$x_0$ 为 X 中的一个向量；

3）设 $A\subset B$，则对任意的 $\lambda\in\mathbf{R}$，有 $\lambda A\subset\lambda B$。特别地，若 $x_0\in A$，则 $\lambda x_0\in\lambda A$；

4）设 $A\subset B$，则 $(A+x_0)\subset(B+x_0)$，x_0 为 X 中的一个向量。

证明　这些证明都比较简单，这里仅给出结论 2）的证明。

一方面，设 $x\in(A\cap B)+x_0$，则存在 $y\in A\cap B$，使得 $x=y+x_0$。因为 $y\in A$，所以 $x\in A+x_0$；又因 $y\in B$，所以 $x\in B+x_0$。从而，$x\in(A+x_0)\cap(B+x_0)$。

另一方面，设 $x\in(A+x_0)\cap(B+x_0)$，则 $x\in(A+x_0)$ 且 $x\in(B+x_0)$。所以存在 $a\in A$，$b\in B$，使得 $x=a+x_0$ 且 $x=b+x_0$。从而 $a=b\in A\cap B$，故有 $x\in(A\cap B)+x_0$。　　证毕

命题 2　设 A 为 X 中的非空子集，$x_0\in A$，则 $\mathit{aff}A=\lambda\,\mathit{aff}A+(1-\lambda)x_0$，$0<\lambda<1$。

证明　一方面，由 $x_0\in A$，仿射集亦为凸集以及引理 3 可得，

$$\lambda\,\mathit{aff}A+(1-\lambda)x_0\subset\lambda\,\mathit{aff}A+(1-\lambda)\,\mathit{aff}A=\mathit{aff}A。$$

另一方面，设 $x\in\mathit{aff}A$，欲证

$$x\in\lambda\,\mathit{aff}A+(1-\lambda)x_0,\ 0<\lambda<1,$$

则需转证：$x-(1-\lambda)x_0\in\lambda\,\mathit{aff}A$。因为 $x\in\mathit{aff}A$，所以 $x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i$，$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$，$\lambda_i\in\mathbf{R}$，$a_i\in A$，$1\leqslant i\leqslant n$。从而有

$$x-(1-\lambda)x_0=\lambda\left(\frac{x}{\lambda}+\frac{\lambda-1}{\lambda}x_0\right)=$$
$$\lambda\left[\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{a_i}{\lambda}+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{\lambda-1}{\lambda}x_0\right]=$$
$$\lambda\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(\frac{a_i}{\lambda}+\frac{\lambda-1}{\lambda}x_0\right)。$$

让 $b_i=\frac{a_i}{\lambda}+\frac{\lambda-1}{\lambda}x_0$，$1\leqslant i\leqslant n$。由于 $\frac{1}{\lambda}+\frac{\lambda-1}{\lambda}=1$，$\frac{1}{\lambda}$，$\frac{\lambda-1}{\lambda}\in\mathbf{R}$，所以有 $b_i\in\mathit{aff}A$，$1\leqslant i\leqslant n$。又由于 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$，$\lambda_i\in\mathbf{R}$，$1\leqslant i\leqslant n$，从而

$$x-(1-\lambda)x_0\in\lambda\,\mathit{aff}(\mathit{aff}A)=\lambda\,\mathit{aff}A,$$

即有 $x\in\lambda\,\mathit{aff}A+(1-\lambda)x_0$。

综上有 $\mathit{aff}A=\lambda\,\mathit{aff}A+(1-\lambda)x_0$，$0<\lambda<1$。

证毕

在证明引理 2 之前先做两点说明。

1）为书写简便，将相对拓扑内部的定义改述为，$a\in\mathrm{ri}A$，如果存在 a 的一个邻域 V，使得

$$[V\cap\mathrm{cl}(\mathit{aff}A)]\subset A。$$

2）对任意的 $a,b\in E$，任意的 $\lambda\in\mathbf{R}$，$\lambda\neq 0$ 以及 a 的任意邻域 V，有 $b+\lambda(V-a)$ 为 b 的邻域[7]。

证明　（引理 2）设 $p\in\mathrm{ri}A$，$a\in\mathrm{cl}A$，$x=\lambda p+(1-\lambda)a$，$0<\lambda<1$。欲证 $[p,a)\subset\mathrm{ri}A$，只需证明 $x\in\mathrm{ri}A$。

因为 $p\in\mathrm{ri}A$，所以存在 p 的一个邻域 V，使得

$$[V\cap\mathrm{cl}(\mathit{aff}A)]\subset A。\tag{1}$$

让 $W=\frac{1}{1-\lambda}(x-\lambda V)$，则 W 为 a 的一个邻域。由于 $a\in\mathrm{cl}A$，所以存在 $a_0\in W\cap A\neq\varnothing$。由 $a_0\in W$，$\exists\, v_0\in V$，使得 $a_0=\frac{1}{1-\lambda}(x-\lambda v_0)$，从而有 $x=\lambda v_0+(1-\lambda)a_0$。让 $Z=\lambda V+(1-\lambda)a_0$，则 Z 为 x 的邻域。注意到 $a_0\in A$，A 为凸集，由引理 3、命题 1、命题 2 以及（1）式有，

$$Z\cap\mathrm{cl}(\mathit{aff}A)=[\lambda V+(1-\lambda)a_0]\cap\mathrm{cl}(\mathit{aff}A)=$$
$$[\lambda V+(1-\lambda)a_0]\cap[\lambda\,\mathrm{cl}(\mathit{aff}A)+(1-\lambda)a_0]=$$
$$[\lambda V\cap\lambda\,\mathrm{cl}(\mathit{aff}A)]+(1-\lambda)a_0\subset$$
$$\lambda[V\cap\mathrm{cl}(\mathit{aff}A)]+(1-\lambda)A\subset\lambda A+(1-\lambda)A=A$$

故有 $x\in\mathrm{ri}A$，从而 $[p,a)\subset\mathrm{ri}A]$，即原命题得证。

证毕

3 主要结果

下面借助于文献[2]的方法,从凸性的角度将关于内部的结论推广到相对内部。

定理 1 设 A,B 为 X 的两子集。如果 A 为凸集,$A^{ri}\neq\varnothing$ 且 $A^{ri}+B$ 为中点凸集(或凸集),那么 $(A+B)^{ri}\subset A^{ri}+B$。

证明 设 $x\in(A+B)^{ri}$,则存在 $a\in A,b\in B$ 使得 $x=a+b$。

1)若 $a\in A^{ri}$,则 $(A+B)^{ri}\subset A^{ri}+B$ 成立;

2)若 $a\notin A^{ri}$,因为 $A^{ri}\neq\varnothing$,故存在 $p\in A^{ri}$,则由 A 的凸性与引理 1,有 $[p,a)\subset A^{ri}$。由于

$$p-a=p+b-(a+b)=p+b-x\in aff(A+B)-x,$$

从而 $a-p\in aff(A+B)-x$。由于 $x\in(A+B)^{ri}$,所以对于方向 $a-p\in aff(A+B)-x$ 而言,存在 $\varepsilon>0$ 充分小,使得 $[x,x+\varepsilon(a-p)]\subset A+B$。

让 $x_1:=x+\varepsilon(a-p)$,$x_2:=x+\varepsilon(p+b-x)$,易知,$x=\frac{x_2+x_1}{2}$,且 $x_1\in A+B$,$x_2\in[p+b,x]=[p,a)+b$,则

$$x_2-b\in[p,a)\subset A^{ri}。\tag{2}$$

因为 $x_1\in A+B$,故存在 $a_1\in A,b_1\in B$ 使得 $x_1=a_1+b_1$,因而,

$$x=\frac{x_2+x_1}{2}=\frac{x_2+a_1+b_1+b-b}{2}=$$

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x_2-b+a_1}{2}+b\right)+\left(\frac{x_2-b+a_1}{2}+b_1\right)\right]。\tag{3}$$

另外,由(2)式及 $a_1\in A$,用引理 1 得 $[x_2-b,a_1)\subset A^{ri}$,从而 $\frac{x_2-b+a_1}{2}\in A^{ri}$。故有

$$\frac{x_2-b+a_1}{2}+b,\frac{x_2-b+a_1}{2}+b_1\in A^{ri}+B。\tag{4}$$

由(3)、(4)式及已知 $A^{ri}+B$ 为中点凸集(或凸集),得 $x\in A^{ri}+B$。

综上可得 $(A+B)^{ri}\subset A^{ri}+B$。 证毕

定理 2 设 A,B 为 E 的两子集。如果 A 为凸集,$\mathrm{ri}A\neq\varnothing$ 且 $\mathrm{ri}A+B$ 为中点凸集(或凸集),那么

$$\mathrm{ri}(A+B)\subset\mathrm{ri}A+B。$$

证明 设 $x\in\mathrm{ri}(A+B)$,则存在 $a\in A,b\in B$,使得 $x=a+b$。1)若 $a\in\mathrm{ri}A$,则 $\mathrm{ri}(A+B)\subset\mathrm{ri}A+B$ 成立;2)若 $a\notin\mathrm{ri}A$,因为 $\mathrm{ri}A\neq\varnothing$,故存在 $p\in\mathrm{ri}A$,则由 A 的凸性与引理 2,有 $[p,a)\subset\mathrm{ri}A$。

另一方面,$x\in\mathrm{ri}(A+B)$,所以存在零邻域 U,使得,$[(x+U)\cap\mathrm{cl}(aff(A+B))]\subset A+B$。由邻域和仿射集的性质,按方向 $a-p\in\mathrm{cl}(aff(A+B))-x$(定理 1 的证明已表明),必存在 $\varepsilon>0$ 充分小,使得 $x+\varepsilon(a-p)\in x+U$,且 $x+\varepsilon(a-p)\in\mathrm{cl}(aff(A+B))$,从而 $[x,x+\varepsilon(a-p)]\subset A+B$。

让 $x_1:=x+\varepsilon(a-p)$,$x_2:=x+\varepsilon(p+b-x)$,易知,$x=\frac{x_2+x_1}{2}$,且 $x_1\in A+B$,$x_2\in[p+b,x)=[p,a)+b$。同样地,与定理 1 的证明类似,最后可得 $x\in\mathrm{ri}A+B$。

综上可得 $\mathrm{ri}(A+B)\subset\mathrm{ri}A+B$。 证毕

同样借助于文献[3]的方法,从开闭性的角度将关于内部的结论推广到相对内部。

定理 3 设 A,B 为 X 的非空子集,如果 A 为相对代数开集即 $A=A^{ri}$,那么

$$(A+B)^{ri}\subset A^{ri}+B。$$

证明 由 $A=A^{ri}$ 便得,$(A+B)^{ri}\subset A+B=A^{ri}+B$。 证毕

定理 4 设 A,B 为 E 的非空子集,如果 A 为相对拓扑开集即 $A=\mathrm{ri}A$,那么

$$\mathrm{ri}(A+B)\subset\mathrm{ri}A+B。$$

此定理的证明与定理 3 的证明类似。

参考文献:

[1] TANAKA T, KUROIWA D. The Convexity of A and B Assures $\mathrm{int}A+B=\mathrm{int}(A+B)$[J]. Appl Math Lett, 1993, 6(1): 83-86.

[2] TANAKA T, KUROIWA D. Some General Conditions Assuring $\mathrm{int}A+B=\mathrm{int}(A+B)$[J]. Appl Math Lett, 1993, 6(3): 51-53.

[3] TANAKA T, KUROIWA D. Another Observation on Conditions Assuring $\mathrm{int}A+B=\mathrm{int}(A+B)$[J]. Appl Math Lett, 1994, 7(1): 19-22.

[4] 颜丽佳. 线性空间中集合内部性质成立的又一条件[J]. 重庆师范大学学报, 2003, 20(4): 16-17.

[5] 史树中. 凸分析[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1990.

[6] 寇述舜. 凸分析与凸二次规划[M]. 天津: 天津大学出版社, 1994.

[7] TIEL J V, 王琦. 凸分析导论[M]. 长沙: 中南工业大学出版社, 1990.

(责任编辑 黄 颖)