三类 G-广义单调性 G-凸性及其应用*

彭再云, 李 婷, 敖 军, 彭 涛
(重庆师范大学 数学与计算机科学学院, 重庆 400047)

摘 要: 研究了三类 G-广义单调映射——严格 G-单调映射、严格 G-拟单调映射和强 G-伪单调映射。文中讨论了严格 G-单调映射、严格 G-拟单调映射分别与严格 G-凸函数、严格 G-拟凸函数之间的重要关系,并给出了强 G-伪单调映射与强 G-伪凸函数间的的一个充分条件,最后还深入讨论了 G-伪单调映射在似变分不等式中的重要应用。

关键词: 严格 G-单调映射; 严格 G-伪单调映射; 强 G-伪单调映射; 应用; 似变分不等式
中图分类号: O221.1 文献标识码: A 文章编号: 1672-6693(2007)01-0025-04

Three Classes of Generalized G-pseudomonotonicity、G-convexity and Applications

PENG Zai-yun, LI Ting, AO Jun, PENG Tao
(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: In this paper we discuss three types of the generalized monotone maps——strictly G-monotone map、strictly G-quasimonotone map and strongly G-pseudomonotone map. We present the relationships between strictly G-monotone map and strictly G-convex function, and dicuss the relationships between strictly G-quasimonotone map and strictly G-quasiconvex function, and then give a sufficient condition with strongly G-pseudomonotonicity and strongly G-Pseudo con-vexity. Finally, we deeply discuss the application of G-pseudomonotonicity to variational-like inequality proble(VLIP).

Key words: strictly G-monotone map; strictly G-quasimonotone map; strongly G-pseudomonotone map; application; variational-like inequality problem(VLIP)

在数理经济、工程、管理科学与优化理论中,凸性起着十分重要的作用[1],而与凸性紧密相关的是单调性。一方面实值函数的凸性等价于相对应的梯度函数的单调性;另一方面,在研究变分不等式问题的存在与解的方法过程中,单调性起着重要作用。对凸性与单调性关系推广的一个重要突破是 1990 年 Karamardian 和 Schaible 证明了伪凸性与伪单调性的等价以及拟凸性与拟单调性的等价[2],1995 年 Komlosi 进一步讨论了几类广义单调与广义凸的关系[3]。

随着研究一步步深入,人们发现单调性不仅在数理经济、工程、管理科学方面有重要应用,而且在数学规划、优化理论及变分不等式中都有着十分重要的应用[4]。近年来,人们不断尝试去弱化单调性条件,并已取得一系列的成果。1994 年 Schaible 研究了伪单调、严格伪单调、强伪单调映射,并给出了伪单调映射在互补理论中的应用[5]。最近,Singh 和 Pini[6] 根据文献[7]的思想对单调性进行推广,建立了 G-广义单调映射,并证明了几类 G-广义单调映射与 G-广义凸函数之间的关系。

在文献[5-7]的基础上,本文研究了三类 G-广义单调映射——严格 G-单调映射、严格 G-拟单调映射和强 G-伪单调映射。文中讨论了严格 G-单调映射、严格 G-拟单调映射分别与严格 G-凸函数、严格 G-拟凸函数之间的重要关系,并给出了强 G-伪单调映射与强 G-伪凸函数间的一个充分条件,最后还深入讨论了 G-伪单调映射在似变分不等式中的重要应用。

1 严格 G-单调映射

文献[8]在文献[6]的基础上建立了强 G-单调映射,在本文的第一部分里将考虑一类比强 G-单调

* 收稿日期: 2006-01-21 修回日期: 2006-04-05
作者简介: 彭再云(1980-),男,重庆人,硕士研究生,研究方向为广义凸性、最优化理论与算法。

映射更一般的 G- 广义单调映射,即严格 G- 单调映射。

定义1　设 S 为 $\mathbf{R}^n$ 的非空子集,$f: S\to\mathbf{R}^n$,$G: S\to\mathbf{R}^n$,如果对 $\forall x,y\in S,x\neq y$ 有 $[G(x)-G(y),f(x)-f(y)]>0$,则称 f 为相对于 G 的严格 G- 单调映射。

定义2　设 S 为 $\mathbf{R}^n$ 的非空子集,$f: S\to\mathbf{R}$,$G: S\to\mathbf{R}^n$,如果对 $\forall x,y\in S,x\neq y$ 有 $f(x)-f(y)>[G(x)-G(y),\nabla f(y)]$,则称 f 为严格 G- 凸函数。

注1　强 G- 单调映射是严格 G- 单调映射,但反之不然;显然,严格 G- 单调映射也是严格单调映射,是真推广。

例1　设 $f(x)=-x^2,G(x)=-x,S=\{x\mid x\geqslant 0\}$,则 $[G(x)-G(y),f(x)-f(y)]=(-x+y,-x^2+y^2)=(y-x)^2(y+x)>0$。所以有

1) f 相对于 G 是严格 G- 单调映射;

2) 但它不是严格单调的,因为 $(y-x)^t[f(y)-f(x)]=(y-x)(-y^2+x^2)=-(y-x)^2(y+x)\leqslant 0$;

3) 同时它也不是强 G- 单调映射,假设 f 是强 G- 单调映射,则存在 $\beta>0$ 使得

$$[G(x)-G(y),f(x)-f(y)]=(-x+y,-x^2+y^2)=(y-x)^2(y+x)\geqslant\beta\|-x+y\|^2$$

即有 $y+x\geqslant\beta$,由 $S=\{x\mid x\geqslant 0\}$ 及 $x,y(x\neq y)$ 的任意性,取 $y=0\Rightarrow x\geqslant\beta\Rightarrow\beta\leqslant 0$,与 $\beta>0$ 矛盾。

下面讨论严格 G- 单调映射与严格 G- 凸函数在一定条件下的等价关系。

定理1　设函数 $f: S\to\mathbf{R}$ 是可微的,(ⅰ) 如果 f 是严格 G- 凸函数,则 ∇f 为相对于 G 的严格 G- 单调映射;(ⅱ) 相反,设 a) $S\subset\mathbf{R}^n$ 为凸集;b) G 为 S 上的凹函数;c) ∇f 是 S 上的严格 G- 单调映射;d) $[x-y,\nabla f(z)]\leqslant[G(x)-G(y),\nabla f(y)]$,对某 $z=\lambda^*y+(1-\lambda^*)x,0<\lambda^*<1\Rightarrow$ ① $[x-y,\nabla f(z)]\geqslant\frac{1}{1-\lambda^*}[G(x)-G(y),\nabla f(z)]$;② $[G(x)-G(z),\nabla f(z)]\geqslant 0$;③ $\nabla f(y)\geqslant 0$,则 f 在 S 上是严格 G- 凸的。

证明　1) 因为 f 是严格 G- 凸函数,则对 $\forall x,y\in S,x\neq y$ 有

$$f(x)-f(y)>[G(x)-G(y),\nabla f(y)]\tag{1}$$

$$f(y)-f(x)>[G(y)-G(x),\nabla f(x)]\tag{2}$$

两式相加得 $[G(x)-G(y),\nabla f(x)-\nabla f(y)]>0$,则 ∇f 为相对于 G 的严格 G- 单调映射。

2) 设 ∇f 是严格 G- 单调的,但非严格 G- 凸的。则存在 $x,y\in S,x\neq y$ 使得

$$f(x)-f(y)\leqslant[G(x)-G(y),\nabla f(y)]\tag{3}$$

由(3)式和中值定理,存在 $z\in S,z=\lambda^*x+(1-\lambda^*)y,0<\lambda^*<1$,使得

$$[x,y,\nabla f(z)]\leqslant[G(x)-G(y),\nabla f(y)]\tag{4}$$

由(ⅱ)中假设 a)—d) 有

$$[x-y,\nabla f(z)]\geqslant\frac{1}{1-\lambda^*}[G(x)-G(y),\nabla f(z)]=\frac{1}{1-\lambda^*}[G(x)-G(z),\nabla f(z)]+\frac{1}{1-\lambda^*}[G(z)-G(y),\nabla f(z)]\geqslant\frac{1}{1-\lambda^*}[G(z)-G(y),\nabla f(z)]>$$
$$\frac{1}{1-\lambda^*}[G(z)-G(y),\nabla f(y)]=$$
$$\frac{1}{1-\lambda^*}[G(\lambda^*y+(1-\lambda^*)x)-G(y),\nabla f(y)]\geqslant$$
$$[G(x)-G(y),\nabla f(y)]$$

与(4)式矛盾。　证毕

注2　定理1将文献[8]中关于强 G- 单调映射的讨论推广到了严格 G- 单调映射的情形上。

2　严格 G- 拟单调映射

定义3　设 S 为 $\mathbf{R}^n$ 的非空子集,$f: S\to\mathbf{R}^n$,$G: S\to\mathbf{R}^n$,如果对 $\forall x,y\in S,x\neq y$ 有

$$[G(x)-G(y),f(y)]>0\Rightarrow[G(x)-G(y),f(x)]>0$$

则称 f 为相对于 G 的严格 G- 拟单调映射。

定义4　设 S 为 $\mathbf{R}^n$ 的非空子集,$f: S\to\mathbf{R}$,$G: S\to\mathbf{R}^n$,如果对 $\forall x,y\in S,x\neq y$ 有

$$f(x)-f(y)\leqslant 0\Rightarrow[G(x)-G(y),\nabla f(y)]<0$$

则称 f 为严格 G- 拟凸函数。

文献[6]给出了 G- 拟单调映射与 G- 拟凸函数在一定条件下的等价性,下面将给出在一定条件下严格 G- 拟单调映射是严格 G- 拟凸函数的一个充分条件。

定理2　设函数 $f: S\to\mathbf{R}$ 是可微的,如果(ⅰ) $S\subset\mathbf{R}^n$ 为凸集;(ⅱ) G 为 S 上的严格凹函数;(ⅲ) ∇f 是 S 上的严格 G- 拟单调映射;(ⅳ) $f(x)\leqslant f(y)\Rightarrow[G(z)-G(y),\nabla f(z)]\leqslant 0$,对某 $z=\lambda^*y+(1-\lambda^*)x,0<\lambda^*<1$;(Ⅴ) $f(x)\leqslant f(y)\Rightarrow\nabla f(y)\geqslant 0$,则 f 在 S 上是严格 G- 拟凸的。

证明　对 $\forall x,y\in S,x\neq y$ 若有

$$f(x)-f(y)\leqslant 0\tag{5}$$

则由假设(ⅳ),可得

$$[G(z)-G(y),\nabla f(z)]\leqslant 0\tag{6}$$

对某 $z=\lambda^*y+(1-\lambda^*)x,0<\lambda^*<1$。由 ∇f 是 S

上的严格 G- 拟单调映射,有

$$[G(z)-G(y),\nabla f(y)]\leqslant 0 \quad (7)$$

将 $z=\lambda^*y+(1-\lambda^*)x$ 代入(7)式,由假设(ⅱ)、(ⅴ)则有

$$0\geqslant[G(z)-G(y),\nabla f(y)]=$$
$$[G(\lambda^*y+(1-\lambda^*)x)-G(y),\nabla f(y)]>$$
$$(1-\lambda^*)[G(x)-G(y),\nabla f(y)]$$

让 $\lambda^*\to 0$,于是可得

$$[G(x)-G(y),\nabla f(y)]<0 \quad (8)$$

故 f 在 S 上是严格 G- 拟凸的。 证毕

3 强 G- 伪单调映射

定义5 设 S 为 $\mathbf{R}^n$ 的非空子集,$f:S\to\mathbf{R}^n$,$G:S\to\mathbf{R}^n$,如果存在 $\beta>0$ 对 $\forall x,y\in S,x\neq y$ 有 $[G(x)-G(y),f(y)]\geqslant 0\Rightarrow[G(x)-G(y),f(x)]\geqslant\beta\|G(x)-G(y)\|^2$,则称 f 为相对于 G 的强 G- 伪单调映射。

定义6 设 S 为 $\mathbf{R}^n$ 的非空子集,$f:S\to\mathbf{R}$ 是可微的,$G:S\to\mathbf{R}^n$,如果存在 $\alpha>0$ 对 $\forall x,y\in S,x\neq y$ 有 $[G(x)-G(y),f(y)]\geqslant 0\Rightarrow f(x)-f(y)\geqslant\alpha\|G(x)-G(y)\|^2$,则称 f 为强 G- 伪凸函数。

文献[6]讨论了严格 G- 伪单调映射与严格 G- 伪凸函数之间在一定条件下的等价关系,下面讨论强 G- 伪单调映射与强 G- 伪凸函数之间的一个重要关系。

定理3 设函数 $f:S\to\mathbf{R}$ 是可微的,如果(ⅰ)$S\subset\mathbf{R}^n$ 为凸集;(ⅱ)G 为 S 上的凹函数;(ⅲ)∇f 是 S 上的强 G- 伪单调映射;(ⅳ)$f(x)\leqslant f(y)\Rightarrow[G(z)-G(y),\nabla f(z)]<\beta\|G(z)-G(y)\|^2,\forall\beta>0$,对某一 $z=\lambda^*y+(1-\lambda^*)x,0<\lambda^*<1$;(ⅴ)$f(x)\leqslant f(y)\Rightarrow\nabla f(y)\geqslant 0$,则 f 在 S 上是强 G- 伪凸的。

证明 对 $\forall x,y\in S,x\neq y$,设有

$$[G(x)-G(y),\nabla f(y)]\geqslant 0 \quad (9)$$

只需证存在 $\alpha>0$,$f(x)-f(y)\geqslant\alpha\|G(x)-G(y)\|^2$ 成立。不然,假设对任意 $\alpha^*>0$,有

$$f(x)-f(y)<\alpha^*\|G(x)-G(y)\|^2 \quad (10)$$

由 $\alpha^*>0$ 的任意性,让 $\alpha^*\to 0$ 则(10)式可变为

$$f(x)-f(y)\leqslant 0 \quad (11)$$

于是由假设(ⅳ),对 $\forall\beta>0$ 有

$$[G(z)-G(y),\nabla f(z)]<\beta\|G(z)-G(y)\|^2 \quad (12)$$

对某 $z=\lambda^*y+(1-\lambda^*)x,0<\lambda^*<1$。由 ∇f 是 S 上的强 G- 伪单调映射,可得到

$$[G(z)-G(y),\nabla f(y)]<0 \quad (13)$$

将 $z=\lambda^*y+(1-\lambda^*)x$ 代入(13)式,由假设(ⅱ)、(ⅴ)则

$$0>[G(z)-G(y),\nabla f(y)]=$$
$$[G(\lambda^*y+(1-\lambda^*)x)-G(y),\nabla f(y)]\geqslant$$
$$(1-\lambda^*)[G(x)-G(y),\nabla f(y)]$$

让 $\lambda^*\to 0$,于是可得

$$[G(x)-G(y),\nabla f(y)]<0 \quad (14)$$

(14)式与(9)式矛盾。 证毕

注3 定理3将文献[8]中对强 G- 单调映射的讨论推广到了强 G- 伪单调映射的情形上。

4 G- 伪单调性在似变分不等式中的应用

为了得到下面的将 G- 伪单调映射应用于似变分不等式问题中的主要结果,先给出下面的定义和引理。

定义7[6] 设 S 为 $\mathbf{R}^n$ 的非空子集,$f:S\to\mathbf{R}^n$,$G:S\to\mathbf{R}^n$,对 $\forall x,y\in S$,有 $[G(x)-G(y),f(y)]\geqslant 0\Rightarrow[G(x)-G(y),f(x)]\geqslant 0$,则称 f 为相对于 G 的 G- 伪单调映射。

定义8[6] 设 S 为 $\mathbf{R}^n$ 的非空子集,$f:S\to\mathbf{R}^n$,$G:S\to\mathbf{R}^n$,对 $\forall x,y\in S,x\neq y$ 有 $[G(x)-G(y),f(y)]\geqslant 0\Rightarrow[G(x)-G(y),f(x)]>0$,则称 f 为相对于 G 的严格 G- 伪单调映射。

定义9[6] 称 f 为半连续的,如果对 $\forall u,v\in D$,映射 $t\to v^tf(u+tv)(0\leqslant t\leqslant 1)$ 在 0^+ 连续。

定义10[9] 称映象 $V:\mathbf{R}^n\to 2^{\mathbf{R}^n}$ 为 KKM 的,如果对任意的有限集 $\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}\subset\mathbf{R}^n$,有

$$\mathrm{conv}(\{u_1,u_2,\cdots,u_n\})\subset\cup_{i=1}^nV(u_i)。$$

引理1[9] 设 C 为 $\mathbf{R}^n$ 中的非空子集,$V:C\to 2^{\mathbf{R}^n}$ 为一 KKM 映象,如果对 $\forall u\in C$,$V(u)$ 是紧的,则 $\bigcap_{u\in C}V(u)\neq\varnothing$。

在文献[10]中 Parida,Sahoo 和 Kumar 提出并讨论了一类重要的广义变分不等式问题——似变分不等式问题(VLIP)。下面将讨论 G- 伪单调映射在此类似变分不等式问题中的重要应用。

定理4 设(ⅰ)$S\subset\mathbf{R}^n$ 为非空紧凸集;(ⅱ)G 为 S 上线性函数;(ⅲ)$f:S\to\mathbf{R}^n$ 在 S 上是半连续的 G- 伪单调映射,则 $u\in S$ 满足

$$[G(v)-G(u),f(u)]\geqslant 0,\forall v\in S \quad (15)$$
$$\Leftrightarrow[G(v)-G(u),f(v)]\geqslant 0,\forall v\in S \quad (16)$$

证明 ($\Rightarrow$)设 $u\in S$ 是(15)式的一个解,由于 f 是 G- 伪单调映射,于是对 $\forall v\in S$,有 $[G(v)-G(u),f(u)]\geqslant 0\Rightarrow[G(v)-G(u),f(v)]\geqslant 0$,故

(16)式成立。

($\Leftarrow$)对 $u,v\in S$,令 $w=tv+(1-t)u\in S$,$(0<t<1)$,由(16)式有 $[G(tv+(1-t)u)-G(u),f(u+t(v-u))]\geqslant 0$,由假设(ⅱ)$G$ 为 S 上线性函数,则对 $u\in S$ 有

$$t[G(v)-G(u),f(u+t(v-u))]\geqslant 0$$

两边同时除以 t,有 $[G(v)-G(u),f(u+t(v-u))]\geqslant 0$ 成立。又由假设(ⅲ)$f:S\to\mathbf{R}^n$ 在 S 上是半连续的,让 $t\to 0^+$,故可得 $[G(v)-G(u),f(u)]\geqslant 0$,$\forall v\in S$。 证毕

定理5 设(ⅰ)$S\subset\mathbf{R}^n$ 为非空紧凸集;(ⅱ)G 为 S 上线性函数;(ⅲ)$f:S\to\mathbf{R}^n$ 在 S 上是半连续的 G-伪单调映射,则存在 $u_0\in S$ 使得 $[G(v)-G(u_0),f(u_0)]\geqslant 0$,$\forall v\in S$。

证明 令点到集的映射 $V_1:S\to 2^S$,使得 $V_1(v)=\{u\in S\mid [G(v)-G(u),f(u)]\geqslant 0\}$,$\forall v\in S$。下面证明 V_1 是KKM的。若不然,假设 $\{v_1,\cdots,v_n\}\subset S$,$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$,$\alpha_i\geqslant 0$ 及 $v=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i\notin\bigcup_{i=1}^{n}V_1(v_i)$,于是有

$$[G(v_i)-G(v),f(v)]<0 \qquad (17)$$

由条件(ⅱ)有 $\sum_{i=1}^{n}[G(v_i)-G(v),f(v)]<0$,即 $\left[G\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i\right)-G\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i\right),f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i\right)\right]<0$ 矛盾。故 $\mathrm{conv}(\{v_1,v_2,\cdots,v_n\})\subset\cup_{i=1}^{n}V_1(v_i)$,$V_1$ 是KKM的。然后令点到集的映射 $V_2:S\to 2^S$,使得 $V_2(v)=\{u\in S\mid [G(v)-G(u),f(v)]\geqslant 0\}$,$\forall v\in S$,则 $V_1(v)\subset V_2(v)$。事实上,$\forall u\in V_1(v)$ 即 $[G(v)-G(u),f(u)]\geqslant 0$。由条件(ⅲ),有 $[G(v)-G(u),f(v)]\geqslant 0$,则 $u\in V_2(v)$。又因 V_1 是KKM的,故而 V_2 也是KKM的。由定理4,$\bigcap_{v\in S}V_1(v)=\bigcap_{v\in S}V_2(v)$。由 $S\subset\mathbf{R}^n$ 为非空紧凸集及 f、G 的连续性质,则 $V_2(v)$ 对 $\forall v\in S$ 是闭的;又 S 有界,则 $V_2(v)$ 是有界的,故 $V_2(v)$ 是紧的。由引理1,$\bigcap_{v\in S}V_1(v)=\bigcap_{v\in S}V_2(v)\neq\varnothing$,故存在 $u_0\in S$,使得

$$[G(v)-G(u_0),f(u_0)]\geqslant 0,\forall v\in S$$

定理6 设(ⅰ)$S\subset\mathbf{R}^n$ 为非空紧凸集;(ⅱ)G 为 S 上线性函数;(ⅲ)$f:S\to\mathbf{R}^n$ 在 S 上是半连续的严格 G-伪单调映射,则存在唯一 $u_0\in S$ 使得

$$[G(v)-G(u_0),f(u_0)]\geqslant 0,\forall v\in S \qquad (18)$$

证明 由定理5可知,似变分不等式(18)的解 u_0 是存在的。下面证明解的唯一性。假设(18)式有两个不同的解 u_0,u_1,则有

$$[G(u_1)-G(u_0),f(u_0)]\geqslant 0 \qquad (19)$$

$$[G(u_0)-G(u_1),f(u_1)]\geqslant 0 \qquad (20)$$

由 f 的严格 G-伪单调性及(19)式可得 $[G(u_1)-G(u_0),f(u_1)]>0$,即 $[G(u_0)-G(u_1),f(u_1)]<0$,这与(19)式矛盾。故(18)式的解存在且唯一。 证毕

参考文献:

[1] 杨新民.多目标分式规划解的一些必要条件[J].重庆师范学院学报(自然科学版),1997,14(2):8-12.

[2] KARAMARDIAN S,SCHAIBLE S. Seven Kinds of Monotone Maps [J]. Journal of Optimization Theory and Applications,1990,66:37-46.

[3] KOMLOSI S. Generalized Monotonicity and Generalized Convexity [J]. Journal of Optimization Theory and Applications,1995,84:361-376.

[4] PINI R,SINGH C. Generalized Convexity and Generalized Monotonicity[J]. Journal of Information and Optimization Sciences,1999,20(2):215-233.

[5] SCHAIBLE S. Generalized Monotonicity-A Survey, in:Generalized Convexity [M]. Berlin:Springer,1994.

[6] SINGH C,PINI R. *G*-monotonicity and *G*-convexity [J]. Journal of Information and Optimization Sciences,2004,25(2):287-301.

[7] PINI R,SINGH C. Generalized Convexity and Generalized Monotonicity [J]. Journal of Information and Optimization Sciences,1999,20(2):215-233.

[8] 刘芙萍.强不变单调性和强 *G*-单调性[J].重庆师范大学学报(自然科学版),2006,23(1):14-18.

[9] 张石生.变分不等式和相补问题理论及应用[M].上海:上海科学技术文献出版社,1991.

[10] PARIDA J,SAHOO M,KUMAR A. A Variational-like Inequality Problem[J]. Bulletin of the Australian Mathematical Society,1989,39:225-231.

(责任编辑 游中胜)