半局部 λ-次不变凸函数*

焦合华[1,2]
(1. 重庆师范大学 数学与计算机科学学院，重庆 400047；2. 长江师范学院 数学系，重庆 涪陵 408003)

摘　要：首先引入了局部不变凸集的概念，在此基础之上，定义了一类新的广义凸函数—半局部 λ-次不变凸函数。并举例说明了它是半局部 λ-次凸函数的真推广，从而是熟知的凸函数，λ-次凸函数，局部凸函数的推广形式。然后研究了它的一些重要性质。最后讨论了它在极小化问题中的一些应用。

关键词：局部不变凸集；半局部 λ-次不变凸函数；性质；极值问题
中图分类号：O174.13　　文献标识码：A　　文章编号：1672-6693(2007)02-0006-04

Semilocally λ-Subinvex Functions

JIAO He-hua[1,2]
(1. College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047;
2. Dept. of Mathematics, Yangtze Normal University, Fuling Chongqing 408003, China)

Abstract: First, locally invex set is defined and based on it a class of new generalized convex function called semilocally λ-subinvex function is defined. It is showed with the aid of some examples that it is real generalization of the semilocally λ-subconvex function. Thus it is the generalization of well known convexity function. λ-subconvexity function and locally convexity functions. Moreover, some important properties of the type function are derived and some applications to extreme problem are studied.

Keywords: locally invex set; semilocally λ-subinvex function; properties; extreme problem

近年来，有不少学者讨论了局部不变集[1-5]。1990 年，唐焕文等为研究不可微规划的不动点的算法引入了 λ-次凸函数[1]；1992 年，Weir T 引入了局部凸函数[2]；1994 年，杨新民把这两类广义凸函数结合起来，引入了半局部 λ-次凸函数[3]。在此基础上，本文进一步推广，引入了半局部 λ-次不变凸函数概念，讨论了这类新函数的一些性质，并且给出了这类新函数在最优化中的一些应用。

1　概念与符号

为了方便起见，本文假设 $C\subseteq\mathbf{R}^n$，$f:C\to\mathbf{R}$，$\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$。

定义 1[2]　C 称为在 $x_0\in$ 处是局部星形的，若对每个 x，都存在正数 $a(x_0,x)\le 1$，使得 $(1-t)x_0+tx\in C$，$0<t<a(x_0,x)$，若对 C 上每一点 x，C 在 x 处都是局部星形的，则称 C 为局部星形集。

定义 2[3]　令 C 在 $x_0\in C$ 处是局部星形的，称 f 在 $x_0\in C$ 处是半局部 λ-次凸函数，若存在 $\lambda\in(0,1]$，对每个 $x\in C$，存在正数 $\alpha(x_0,x)\le 1$，使得

$$f[(1-t)x_0+tx]\le(<)(1-t\lambda)f(x_0)+t\lambda f(x)$$

其中 $0<t<a(x_0,x)$。设 C 为局部星形集，若 f 在 C 上每一点是半局部 λ-次凸函数，则称 f 为 C 上半局部 λ-次凸函数。

定义 3　C 称为在 $x_0\in C$ 处是关于 η 的局部不变凸集，若对每个 x 都存在正数 $a(x_0,x)\le 1$，使得 $x_0+t\eta$

* 收稿日期：2006-06-23　　修回日期：2006-11-18
基金项目：重庆市教委科学技术研究基金(No. KJ051307，No. 041302)
作者简介：焦合华(1969-)，男，重庆涪陵人，讲师，硕士，研究方向为最优化理论及应用。

$(x,x_0)\in C$,$0<t<a(x_0,x)$。若对 C 上每一点 x,C 在 x 处都是关于 η 的局部不变凸的,则称 C 为关于 η 的局部不变凸集。

注1　每一个局部星形集都是关于 $\eta(x,x_0)=x-x_0$ 的局部不变凸集,反之不一定成立。

例1　令 $C=(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$,则易知它是关于 $\eta(x,x_0)=x_0$ 的局部不变凸集,但当 $x_0=1$,$x=-1$ 时,$(1-t)x_0+tx=1-2t$,对任意的 $a(x_0,x)\le 1$,都存在 $0<t<a(x_0,x)$,使得 $(1-t)x_0+tx=1-2t\notin C$,故它不是局部星形集。

定义4　令 C 在 $x_0\in C$ 处是关于 η 的局部不变凸集,称 f 在 $x_0\in C$ 处是关于 η 的半局部 λ-次不变凸函数,若存在 $\lambda\in(0,1]$,对每个 $x\in C$,存在正数 $a(x_0,x)\le 1$,使得 $f[x_0+t\eta(x,x_0)]\le(<)(1-t\lambda)f(x_0)+t\lambda f(x)$。其中 $0<t<a(x_0,x)$。设 C 为关于 η 的局部不变凸集,若 f 在 C 上每一点是关于 η 的半局部 λ-次不变凸函数,则称 f 为 C 上关于 η 的半局部 λ-次不变凸函数。

注2　每一个半局部 λ-次凸函数都是关于 $\eta(x,x_0)=x-x_0$ 的半局部 λ-次不变凸函数,然而,反之不一定成立。

例2　令 $f(x)\begin{cases}0, & x\le 0 \text{ 或 } x=1\\ x, & 0<x<1 \text{ 或 } x>1\end{cases}$,则 f 是 $\mathbf{R}$ 上关于 $\eta(x,x_0)=\begin{cases}0, & x_0=1\\ -1, & \text{其他}\end{cases}$ 的半局部 λ-次不变凸函数。但取 $x=0$,$x_0=1$ 时,对任何 $\lambda\in(0,1]$ 及任意的 $0<a(x_0,x)\le 1$,均存在 $0<t<a(x_0,x)$,使得

$$f[tx+(1-t)x_0]>t\lambda f(x)+(1-t\lambda)f(x_0)$$

因此,f 不是 $\mathbf{R}$ 上的半局部 λ-次凸函数。

注3　由以上例子可知,局部不变凸集和半局部 λ-次不变凸函数分别是局部星形集和半局部 λ-次凸函数的真推广。

2　半局部 λ-次不变凸函数的性质

定理1　设 C 在 $x_0\in C$ 处是关于 η 的局部不变凸集,$\lambda\in(0,1]$,有

1)若 f 在 $x_0\in C$ 处是关于 η 的半局部 λ-次不变凸函数,则 f 在 x_0 处的右方向导数存在,且

$$\lambda[f(x)-f(x_0)]\ge f_+'(x_0,\eta(x,x_0)),\ \forall x\in C$$

2)若 f 在 x_0 处的右方向导数存在,且 $\lambda[f(x)-f(x_0)]>f_+'(x_0,\eta(x,x_0))$,$\forall x\in C$,则 f 在 $x_0\in C$ 处是关于 η 的半局部 λ-次不变凸函数。

证明　1)由 f 在 $x_0\in C$ 处是关于 η 的半局部 λ-次不变凸函数知,对 $\forall x\in C$,存在正数 $a(x_0,x)\le 1$,使得

$$f[x_0+t\eta(x,x_0)]\le(1-t\lambda)f(x_0)+t\lambda f(x),\ 0<t<a(x_0,x)$$

即

$$\frac{f[x_0+t\eta(x,x_0)]-f(x_0)}{t}\le\lambda[f(x)-f(x_0)],\ 0<t<a(x_0,x)$$

令 $t\to 0^+$,得 $f_+'(x_0,\eta(x,x_0))\le\lambda[f(x)-f(x_0)]$

2)对 $\forall x\in C$,令 $g(t)=\{f(x_0)-f[x_0+t\eta(x,x_0)]\}+\lambda t[f(x)-f(x_0)]$ 则 $g(0)=0$。由已知可得,g 在 $t=0$ 处右方向导数存在,且 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{g(t)-g(0)}{t}=-f_+'(x_0,\eta(x,x_0))+\lambda[f(x)-f(x_0)]>0$。于是,存在正数 $a(x_0,x)\le 1$,使得 $g(t)\ge 0$,$0<t<a(x_0,x)$。即

$$f[x_0+t\eta(x,x_0)]\le(1-\lambda t)f(x_0)+\lambda tf(x),\ 0<t<a(x_0,x)$$

因此,f 在 x_0 处是关于 η 的半局部 λ-次不变凸函数。　证毕

定义5　设 $S\subseteq\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}$,称 S 在 $(x_0,\alpha_0)\in S$ 处是关于 η 的局部 λ-不变凸集,若对每个 $(x,\alpha)\in S$,存在正数 $a(x_0,x)\le 1$,使得 $(x_0+t\eta(x,x_0),(1-t\lambda)\alpha_0+t\lambda\alpha)\in S$,$0<t<a(x_0,x)$。

定理2　f 是 C 上关于 η 的半局部 λ-次不变凸函数的充要条件是 $G(f)=\{(x,\alpha)\mid x\in C,\alpha\in\mathbf{R},f(x)\le\alpha\}$,是关于 η 的局部 λ-不变凸集。

证明　必要性。对 $\forall (x,\alpha),(y,\beta)\in G(f)$，即 $f(x)\le\alpha, f(y)\le\beta$，由 f 是 C 上关于 η 的半局部 λ-次不变凸函数知，存在正数 $a(x,y)\le 1$，使得

$$f[x+t\eta(y,x)]\le(1-t\lambda)f(x)+t\lambda f(y)\le(1-t\lambda)\alpha+t\lambda\beta$$

其中 $0<t<a(x,y)$。即 $[x+t\eta(y,x),(1-t\lambda)\alpha+t\lambda\beta]\in G(f)$。因此，$G(f)$ 是关于 η 的局部 λ-不变凸集。

充分性。设 $G(f)$ 是关于 η 的局部 λ-不变凸集，对 $\forall x,y\in C$ 由 $(x,f(x))\in G(f)$，$(y,f(y))\in G(f)$ 知，存在正数 $a(x,y)\le 1$，使得 $[x+t\eta(y,x),(1-t\lambda)f(x)+t\lambda f(y)]\in G(f)$，其中 $0<t<a(x,y)$。因此，$x+t\eta(y,x)\in C$，且

$$f[x+t\eta(y,x)]\le(1-t\lambda)f(x)+t\lambda f(y),\ 0<t<a(x,y)$$

故 f 是 C 上关于 η 的半局部 λ-次不变凸函数。　　证毕

定理 3　f 是 C 上关于 η 的半局部 λ-次不变凸函数当且仅当对任意的 $x,y\in C$，存在正数 $a(x,y)\le 1$，当 $f(x)<\alpha, f(y)<\beta$ 有 $f[x+t\eta(y,x)]<(1-t\lambda)\alpha+t\lambda\beta$，$0<t<a(x,y)$。

证明　必要性。设 $x,y\in C$，$f(x)<\alpha, f(y)<\beta$，则由已知条件，存在正数 $a(x,y)\le 1$，使得

$$f[x+t\eta(y,x)]\le(1-t\lambda)f(x)+t\lambda f(y),\ 0<t<a(x,y)$$

于是 $f[x+t\eta(y,x)]<(1-t\lambda)\alpha+t\lambda\beta, 0<t<a(x,y)$。

充分性。设 $(x,\alpha)\in G(f)$，$(y,\beta)\in G(f)$，则 $x,y\in C$，且 $f(x)\le\alpha, f(y)\le\beta$。

1）若 $f(x)<\alpha, f(y)<\beta$，由已知条件知，存在正数 $a(x,y)\le 1$，使得

$$f[x+t\eta(y,x)]<(1-t\lambda)\alpha+t\lambda\beta,\ 0<t<a(x,y)$$

2）若 $f(x)=\alpha, f(y)=\beta$，则对任意 $\varepsilon>0$，$f(x)<\alpha+\varepsilon, f(y)<\beta+\varepsilon$，由已知条件，存在正数 $b(x,y)\le 1$，使得 $f[x+t\eta(y,x)]<(1-t\lambda)(\alpha+\varepsilon)+t\lambda(\beta+\varepsilon)$，其中 $0<t<b(x,y)$，由 ε 的任意性，上式即为

$$f[x+t\eta(y,x)]\leqslant(1-t\lambda)\alpha+t\lambda\beta,\ 0<t<b(x,y)$$

3）若 $f(x)=\alpha, f(y)<\beta$ 或 $f(x)<\alpha, f(y)=\beta$，类似于 2）的讨论知，存在 $c(x,y)\le 1$，使得

$$f[x+t\eta(y,x)]\le(1-t\lambda)\alpha+t\lambda\beta,\ 0<t<c(x,y)$$

综合 1）～ 3）知，存在正数 $d(x,y)\le 1$，有

$$[x+t\eta(y,x),(1-t\lambda)\alpha+t\lambda\beta]\in G(f),\ 0<t<d(x,y)$$

由定理 2 知，f 是 C 上关于 η 的半局部 λ-次不变凸函数。　　证毕

3　半局部 λ-次不变凸函数在最优化中的应用

考虑下述非线性规划问题

$$(\mathrm{NP})\ \min f(x)$$
$$\mathrm{s.t.}\ g(x)\le 0,\ x\in C$$

其中，g 是 C 上的 m 维向量函数，令 $D=\{x\in C \mid g(x)\le 0\}$ 是（NP）的可行解集。

向量函数 g 称为关于 η 的半局部 λ-次不变凸函数是指 g 的每个分量函数都是关于 η 的半局部 λ-次不变凸函数。

定义 6　$\bar{x}$ 称为（NP）的最优解，若 $\bar{x}\in D$，且 $f(x)\ge f(\bar{x})$，$\forall x\in D$。

定义 7　$\bar{x}$ 称为（NP）的局部最优解，若 $\bar{x}\in D$，且存在 $\delta>0$，使得 $f(x)\ge f(\bar{x})$，$\forall x\in N_\delta(\bar{x})\cap D$。

定理 4　若 C 是关于 η 的局部不变凸集，f 是 C 上关于 η 的 λ_1-次不变凸函数（$\lambda_1\in(0,1]$），g 是 C 上关于 η 的半局部 λ_2-次不变凸函数（$\lambda_2\in(0,1]$），则（NP）的最优解集是关于 η 的局部不变凸集。

证明　设 $\bar{x},\bar{y}$ 是（NP）的任意两个最优解，则

$$\bar{x}\in C, g(\bar{x})\leqslant 0 \text{ 且 } f(\bar{x})\le f(x),\ \forall x\in D \tag{1}$$

$$\bar{y}\in C, g(\bar{y})\leqslant 0 \text{ 且 } f(\bar{y})\le f(x),\ \forall x\in D \tag{2}$$

由 C 是关于 η 的局部不变凸集知，存在正数 $a(\bar{x},\bar{y})\leqslant 1$，使得

$$\bar{x}+t\eta(\bar{y},\bar{x})\in C,\quad 0<t<a(\bar{x},\bar{y}) \tag{3}$$

由f是C上关于η的半局部λ_1-次不变凸函数知,存在正数$b(\bar{x},\bar{y})\le 1$,使得

$$f[\bar{x}+t\eta(\bar{y},\bar{x})]\le(1-t\lambda_1)f(\bar{x})+t\lambda_1 f(\bar{y}),\quad 0<t<b(\bar{x},\bar{y}) \tag{4}$$

再由g是C上关于η的半局部λ_2-次不变凸函数知,存在正数$c(\bar{x},\bar{y})\le 1$,使得

$$g[\bar{x}+t\eta(\bar{y},\bar{x})]\le(1-t\lambda_2)g(\bar{x})+t\lambda_2 g(\bar{y}),\quad 0<t<c(\bar{x},\bar{y}) \tag{5}$$

令$d(\bar{x},\bar{y})=\min\{a(\bar{x},\bar{y}),b(\bar{x},\bar{y}),c(\bar{x},\bar{y})\}$由(1)~(5)式,并注意到$f(\bar{x})=f(\bar{y})\le f(x)$,$\forall x\in D$,有

$$\bar{x}+t\eta(\bar{y},\bar{x})\in C;\ g[\bar{x}+t\eta(\bar{y},\bar{x})]\le 0$$

$$f(\bar{x})\le f[\bar{x}+t\eta(\bar{y},\bar{x})]\le f(\bar{x})\le f(x),\forall x\in D,\quad 0<t<d(\bar{x},\bar{y})$$

所以,$\bar{x}+t\eta(\bar{y},\bar{x})\in D$,且 $f[\bar{x}+t\eta(\bar{y},\bar{x})]\le f(\bar{x}),\forall x\in D,\quad 0<t<d(\bar{x},\bar{y})$

即(NP)的最优解是关于η的局部不变凸集。 证毕

定理5 设C为$\bar{x}$处关于η的局部不变凸集,其中$\bar{x}$是(NP)的局部最优解,f在$\bar{x}$处为关于η的半局部λ_1-次不变凸函数,g在$\bar{x}$处为关于η的半局部λ_2-次不变凸函数,(这里$\lambda_1,\lambda_2\in(0,1]$),则$\bar{x}$一定是(NP)的整体最优解。

证明 由C在$\bar{x}$处是关于η的局部不变凸集知,对任意$x\in C$,存在正数$a(\bar{x},x)\le 1$,使得

$$\bar{x}+t\eta(x,\bar{x})\in C,\quad 0<t<a(\bar{x},x) \tag{6}$$

由f在$\bar{x}$处为关于η的半局部λ_1-次不变凸函数知,存在正数$b(\bar{x},x)\le 1$,使得

$$f[\bar{x}+t\eta(x,\bar{x})]\le(1-t\lambda_1)f(\bar{x})+t\lambda_1 f(x),\quad 0<t<b(\bar{x},x) \tag{7}$$

再由g在$\bar{x}$处为关于η的半局部λ_2-次不变凸函数知,存在正数$c(\bar{x},x)\le 1$,使得

$$g[\bar{x}+t\eta(x,\bar{x})]\le(1-t\lambda_2)g(\bar{x})+t\lambda_2 g(x),\quad 0<t<c(\bar{x},x) \tag{8}$$

令

$$d(\bar{x},x)=\min\{a(\bar{x},x),b(\bar{x},x),c(\bar{x},x)\}$$

则当$0<t<d(\bar{x},x)$时,对任意$x\in C$,(6)~(8)式均成立。特别地,对任意$\delta>0$,当$t>0$足够小时,有

$$\bar{x}+t\eta(x,\bar{x})\in C\cap N_\delta(\bar{x});\quad g[\bar{x}+t\eta(x,\bar{x})]\le 0$$

所以,$\bar{x}+t\eta(x,\bar{x})\in D\cap N_\delta(\bar{x})$。最后,由(7)式和上式,并注意到$\bar{x}$是(NP)的局部最优解知

$$f(\bar{x})\le f[\bar{x}+t\eta(x,\bar{x})]\le(1-t\lambda_1)f(\bar{x})+t\lambda_1 f(x)$$

故$f(\bar{x})\le f(x)$,$\forall x\in D$。即$\bar{x}$是(NP)的整体最优解。 证毕

参考文献:

[1] TANG H W. Fixed Point Algorithms and Its Application to Nondifferentiable Programming, Approximization Optimization and Computing :Theory and Applications [M]. Horth-Holland :Elsevier Science Publishers, 1990.

[2] WEIR T. Programming with Semilocally Convex Functions[J]. Math Anal Appl,1992,168(1):1-12.

[3] 杨新民. 半局部λ-次凸函数[J]. 重庆师范学院学报,1994,11(2):4-8.

[4] 颜丽佳,刘芙萍. 强预不变凸函数[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2005,22(1):11-15.

[5] 李凤莲,丁协平. 局部凸拓扑线性空间中的广义 Farkas 引理[J]. 四川师范大学学报(自然科学版),2005,28(4):417-418.

(责任编辑 黄 颖)