一类新型变分包含问题的扰动算法和稳定性*

叶志强[1,2]，张　旭[1,2]
(1. 重庆师范大学 初等教育学院，重庆 400700；2. 西南大学 数学与财经学院，重庆 400715)

摘　要：引入了一类新的含 (h,η)-单调算子和 α-h-强单调算子的广义非线性混合拟变分包含，并建立了关于 (h,η)-单调算子的广义图像收敛理论。依据广义图像收敛理论，并应用关于 h,η-单调算子的预解算子技巧，作者提出了一种新的扰动迭代算法来解这类变分不等式。进而，研究了这类算法的收敛性和稳定性。结果是新的，并推广和统一了近期文献中的一些相关结论。

关键词：广义非线性；拟变分包含；单调算子；广义图像收敛；预解算子；扰动算法；稳定性
中图分类号：O177.91　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2007)02-0010-06

Perturbed Algorithm and Stability of a New Variational Inclusion

YE Zhi-qiang[1,2]，*ZHANG　Xu*[1,2]
(1. Elementary Education College, Chongqing Normal University, Chongqing 400700；
2. School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China)

Abstract: In this paper, we introduce a new generalized nonlinear mixed quasi-variational inclusion involving (h,η)-monotone mappings and α-h-strongly monotone mappings, and establish the generalized-graph- convergence theory about (h,η)-monotone mappings. Based on the generalized-graph-convergence theory, by using the resolvent operator technique about (h,η)-monotone mappings, we suggest a new perturbed iterative algorithm to compute approximate solutions of this class of variational inequality. Further-more, we also discuss the convergence and stability of the perturbed algorithm. Our results are new, unify and generalize some corresponding results in recent literatures.

Key words: generalized nonlinear; mixed quasi-variational inclusion; monotone mapping; quasi-graph-convergence; resolvent operator; perturbed algorithm; stability

众所周知，变分不等式及相补问题理论是当今数学技术中的有力工具。近些年来，经典变分不等式的多种形式的拓展和推广一直被许多人所研究[1-19]。与此同时，提出更新、更有效的算法来计算各种各样的变分不等式，变分包含的近似解，也是人们最为关心的问题之一。

在近期的文献[2]中，方和黄引入了一类称为 (h,η)-单调算子的广义单调算子，其为极大单调算子、极大 η-单调算子和 H-单调算子提供了一致的框架[3-5]。利用关于 (h,η)-单调算子的预解算子，他们研究了一类变分包含。最近，在文献[6]中，刘利用关于极大单调算子的图像收敛理论[7]，研究了一类完全广义非线性拟变分不等式。

本文中，作者首先引入了一类含 (h,η)-单调算子和 α-h-强单调算子的广义非线性混合拟变分包含，并且建立了关于 (h,η)-单调算子的广义图像收敛理论。其次，利用关于 (h,η)-单调算子的广义图像收敛理论和预解算子技巧，证明了这类广义非线性混合拟变分包含的解的存在性和唯一性，并提出了一种新的扰动逼近算法。进而，研究了这类算法的收敛性和稳定性。结果推广了许多已知的结果和算法。

1　预备知识

设 H 是实的 Hilbert 空间，其范数与内积分别为 $\|\cdot\|$ 与 $<\cdot>$。设 2^H 表示 H 的所有非空子集组成的

* 收稿日期：2006-09-26
资助项目：国家自然科学基金(No. 10471113)；重庆市科委自然科学基金(No. CSTC2005BB2097)
作者简介：叶志强(1978-)，男，河南漯河人，硕士研究生，研究方向为应用泛函分析。

集族，I 是 H 上的恒等映射。设 $A,B:H\to H$ 和 $N:H\times H\to H$ 是单值算子。设 $M_n,M:H\to 2^H$ 是集值映射，并且对任意给定 $y\in H$，$M_n(\cdot,y)$，$M(\cdot,y):H\to 2^H$ 是 (h,η)-单调算子。给定 $f\in H$，作者考虑下列问题：求 $x\in H$ 使得

$$f\in N(A(x),B(x))+M(x,x) \tag{1}$$

成立，上式称为含 (h,η)-单调算子的广义非线性混合拟变分包含。

(1)式有如下一些特例。

1)如果 (h,η)-单调算子 M 退化为 一个极大 η-单调算子，并且 $M(x,x)=M(x)$，对于任意 $x\in H$ 那么，(1)式等价于求 $x\in H$ 使得

$$f\in N(A(x),B(x))+M(x) \tag{2}$$

成立，(2)式称为含极大 η-单调算子的一般非线性混合拟变分包含。

2)如果 $M(x)=\triangle_\eta\varphi(x)$，对于所有 $x\in H$，这里 $\varphi:H\to R\cup+\infty$，是一个正常 η-次可微泛函，并且 $\triangle_\eta\varphi(x)$ 表示 φ 的 η-次可微算子[8]，那么(2)式退化为 求 $x\in H$ 使得

$$\langle N(A(x),B(x))-f,\eta(y,x)\rangle+\varphi(y)-\varphi(x)\geq 0,\quad \forall y\in H \tag{3}$$

成立，(3)式称为广义非线性混合拟变分不等式。

3)如果 $M(x)=\partial\varphi(x)$，对于任意 $x\in H$，这里 $\varphi:H\to R\cup\{+\infty\}$ 是一个真凸下半连续泛函，并且 $\partial\varphi(x)$ 表示 φ 的次可微算子，那么(2)式退化为求 $x\in H$ 使得

$$\langle N(A(x),B(x))-f,y-x\rangle+\varphi(y)-\varphi(x)\geq 0,\forall y\in H \tag{4}$$

成立，(4)式称为非线性混合拟变分不等式。

4)如果 $N(x,y)=x-y$，对于任意 $x,y\in H$，并且 $f\equiv 0$，那么(3)式等价于求 $x\in H$ 使得

$$\langle A(x)-B(x),y-x\rangle+\varphi(y)-\varphi(x)\geq 0,\qquad \forall y\in H \tag{5}$$

成立，(5)式称为强非线性似变分包含，其被 Lee 在文献[9]中研究过。

5)如果 M 退化为极大单调算子，$f\equiv 0$，$A=I$，并且 $B=I$，那么 (1)式等价于求 $x\in H$ 使得

$$0\in N(x,x)+M(x,x) \tag{6}$$

成立，(6)式称为广义强非线性拟变分包含，其被 Agarwal 在文献[10]中研究过。

6)如果 $N(x,x)=Tx$，对于任意 $x\in H$，这里 $T:H\to H$ 是一个非线性算子，那么(6)式退化为求 $x\in H$ 使得 $0\in Tx+M(x,x)$ 成立，其被称为混合拟变分包含[11]。

定义1[1] 令 $S:H\to H$ 是一个单值算子，则称算子 S 是

(i) 单调的，如果 $(Sx-Sy,x-y)\geq 0,\forall x,y\in H$ 成立；

(ii) 严格单调的，如果 S 是单调的且 $(Tx-Ty,x-y)=0$ 成立，当且仅当 $x=y$ 成立；

(iii) γ-强单调的，如果存在一个常数 γ 使得 $(Tx-Ty,x-y)\geq\gamma\|x-y\|^2,\forall x,y\in H$ 成立；

(iv) s-Lipschitz 连续的，如果存在一个常数 $s>0$ 使得 $\|Sx-Sy\|\leq s\|x-y\|,\qquad\forall x,y\in H$ 成立。

定义2 令 $N:H\times H\to H$ 和 $A,h:H\to H$ 是单值算子，则称

(i) A 是关于 N 的第一变元 α-h-强单调的，如果存在一个常数 $\alpha>0$，使得 $\langle N(A(u),x)-N(A(v),x),hu-hv\rangle\geq\alpha\|u-v\|^2,\quad\forall u,v,x\in H$ 成立；

(ii) N 是关于第一变元 β-Lipschitz 连续的，如果存在一个常数 $\beta>0$ 使得 $\langle N(A(u),x)-N(A(v),x),u-v\rangle\leq\beta\|u-v\|^2,\quad\forall u,v,x\in H$ 成立；

类似地，可以定义 N 关于第二变元的 Lipschitz 连续性。

注1 1) 如果 $h\equiv I$，那么 A 退化为关于 N 的第一变元 α-强单调[6]；2) 如果 $h\equiv I,A\equiv I$，那么定义2(i)退化为 N 关于第一变元 α-强单调的定义。

定义3[1] 令 $\eta:H\times H\to H$ 和 $h:H\to H$ 是两个单值算子，又令 $M:H\to 2^H$ 是一个集值算子，则称集值算子 M 是

1) 单调的，如果 $\langle x-y,u-v\rangle\geq 0,\forall u,v\in H,x\in Mu,y\in Mv$ 成立；

2) η-单调的，如果 $\langle x-y,\eta(u-v)\rangle\geq 0,\forall u,v\in H,x\in Mu,y\in Mv$ 成立；

3) 严格 η-单调的，如果 M 是 η-单调的且等号成立，当且仅当 $x=y$ 成立；

4) 强 η-单调的，如果存在一个常数 $r>0$ 使得 $\langle x-y,\eta(u,v)\rangle\geq r\|u-v\|^2,\forall u,v\in H,x\in Mu,y\in Mv$ 成立；

5）极大单调的，如果 M 是单调的且 $(I+\lambda M)(H)=H$，对于任意 $\lambda>0$ 成立，这里 I 表示 H 上的恒等算子；

6）极大 η-单调的，如果 M 是 η-单调的且 $(I+\lambda M)(H)=H$，对于任意 $\lambda>0$ 成立；

7）h-单调的，如果 M 是单调的且 $(h+\lambda M)(H)=H$，对于任意 $\lambda>0$ 成立；

8）(h,η)-单调的，如果 M 是 η-单调的且 $(h+\lambda M)(H)=H$，对于任意 $\lambda>0$ 成立。

引理 1[1]　令 $\eta: H\times H\to H$ 是一个单值算子，$h: H\to H$ 是一个严格 η-单调算子，且 $M: H\to 2^H$ 是一个 (h,η)-单调算子。那么，算子 $(h+\lambda M)^{-1}$ 是单值的。

定义 4[1]　令 $\eta: H\times H\to H$ 是一个单值算子，$h: H\to H$ 是一个严格 η-单调算子且 $M: H\to 2^H$ 是一个 (h,η)-单调算子。预解算子 $R_{M,\lambda}^{h,\eta}: H\to H$ 被定义为 $R_{M,\lambda}^{h,\eta}(u)=(h+\lambda M)^{-1}(u)$，$\forall u\in H$。

引理 2[1]　令 $\eta: H\times H\to H$ 是一个关于常数 τ-Lipschitz 连续的单值算子，$h: H\to H$ 是关于常数 r 强 η-单调算子，且 $M: H\to 2^H$ 是一个 (h,η)-单调算子。那么预解算子 $R_{M,\lambda}^{h,\eta}: H\to H$ 关于常数 $\frac{\tau}{r}$ 是 Lipschitz 连续的，即

$\| R_{M,\lambda}^{h,\eta}(u)-R_{M,\lambda}^{h,\eta}(v)\| \le \frac{\tau}{r}\| u-v\|$，$\forall u,v\in H$。

引理 3　x 是（1）式的解，当且仅当 $x=R_{M(\cdot,x),\lambda}^{h,\eta}(hx-\lambda N(A(x),B(x))+f)$。

引理 3 可由 $R_{M,\lambda}^{h,\eta}$ 的定义直接得到。

引理 4[8]　$\{\mu_n\}$ 是非负实数列，$\{u_n\}$ 是实数序列，且满足：$u_n\in[0,1]$，$\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=+\infty$。如果存在常数 u_1 使得 $\mu_{n+1}\le(1-u_n)\mu_n+u_n\delta_n$，$\forall n\ge n_1$，这里 $\delta_n\ge 0$，$\forall n\ge 0$ 且 $\delta_n\to 0(n\to+\infty)$，那么 $\lim_{n\to\infty}\mu_n=0$。

定义 5　令 $M,M_n: H\to 2^H$ 是 (h,η)-单调算子，对于 $n\ge 0$。序列 $\{M_n\}$，$n\ge 0$ 称为广义图像收敛到 M（记为 $M_n\xrightarrow{GG}M$，如果对于任意 $(x,y)\in Graph(M)$，存在 H 中序列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，满足 $(x_n,y_n)\in Graph(M_n)$，$x_n\to x$ 且 $y_n\to y$。

注 2　如果对于 $n\ge 0$，$M,M_n: H\to 2^H$ 是极大单调算子，那么广义图像收敛退化为图像收敛[5]。

引理 5　令 $h: H\to H$ 是 δ-Lipschitz 连续且严格 η-单调算子，$M,M_n: H\to 2^H$ 是 (h,η)-单调算子，对于 $n\ge 0$。那么 $M_n\xrightarrow{GG}M$ 当且仅当 $R_{M_n,\lambda}^{h,\eta}(z)\to R_{M,\lambda}^{h,\eta}(z)$，对于任意 $z\in H$ 和 $\lambda>0$。

证明　充分性。对于 $(x,y)\in Graph(M)$，可得 $\lambda y+hx\in hx+\lambda M(x)$，这里 $\lambda>0$。由定义 4 知 $R_{M,\lambda}^{h,\eta}(\lambda y+hx)=x$。

又令 $R_{M_n,\lambda}^{h,\eta}(\lambda y+hx)=x_n$。由假设 $R_{M_n,\lambda}^{h,\eta}(z)\to R_{M,\lambda}^{h,\eta}(z)$，对于任意 $z\in H$ 和 $\lambda>0$ 成立。于是 $R_{M_n,\lambda}^{h,\eta}(\lambda y+hx)\to R_{M,\lambda}^{h,\eta}(\lambda y+hx)$ 也成立，即 $x_n\to x$。

既然 $R_{M_n,\lambda}^{h,\eta}(\lambda y+hx)=x_n$，由 $R_{M_n,\lambda}^{h,\eta}$ 的定义，可得 $\lambda y+hx\in hx_n+\lambda M_n(x_n)$，于是 $\lambda y+hx-hx_n\in\lambda M_n(x_n)$。若令 $y_n=\frac{1}{\lambda}(\lambda y+hx-hx_n)$，则 $y_n\in M_n(x_n)$。由于 $y_n=\frac{1}{\lambda}(\lambda y+hx-hx_n)$，$h$ 是 Lipschitz 连续的，且 $x_n\to x$，得到 $y_n\to y$。

既然 $x_n\to x$，$y_n\to y$，且 $y_n\in M_n(x_n)$，则由定义 5，可得 $M_n\xrightarrow{GG}M$。

必要性。令 $y_n=R_{M_n,\lambda}^{h,\eta}(z)$，$y=R_{M,\lambda}^{h,\eta}(z)$（任意 $z\in H$）。下证 $M_n\xrightarrow{GG}M$ 成立，可推得 $y_n\to y$ 成立。

由 $y=R_{M,\lambda}^{h,\eta}(z)$ 和 $R_{M,\lambda}^{h,\eta}(z)$ 的定义，可得 $z\in hy+\lambda M(y)$，于是 $\frac{1}{\lambda}(z-hy)\in M(y)$，即 $(y,\frac{1}{\lambda}(z-hy))\in Graph(M)$，又因为 $M_n\xrightarrow{GG}M$，故存在序列 $(y_n',z_n)\in Graph(M_n)$ 满足 $y_n'\to y$，$z_n\to\frac{1}{\lambda}(z-hy)$，$z_n\in M_n(y_n')$。既然 $z_n\in M_n(y_n')$，则 $\lambda z_n+h(y_n')\in h(y_n')+\lambda M_n(y_n')$。因此，$y_n'=R_{M_n,\lambda}^{h,\eta}(\lambda z_n+h(y_n'))$。

由 $y_n=R_{M_n,\lambda}^{h,\eta}(z)$ 和引理 2，可得

$$\| y_n-y\| \le \| y_n-y_n'\| + \| y_n'-y\| = \| R_{M_n,\lambda}^{h,\eta}(z)-R_{M_n,\lambda}^{h,\eta}(\lambda z_n+h(y_n'))\| + \| y_n'-y\| \le \frac{\tau}{r}\| z-\lambda z_n-h(y_n')\| + \| y_n'-y\|。\tag{7}$$

既然 $y_n'\to y$，$z_n\to\frac{1}{\lambda}(z-hy)$，且 h 是 Lipschitz 连续的，由（7）式可得 $y_n\to y$，即 $R_{M_n,\lambda}^{h,\eta}(z)\to R_{M,\lambda}^{h,\eta}(z)$。　证毕

2 解的存在性、唯一性和算法

本节中,作者首先构建了一种求解含(h,η)-单调算子的广义非线性混合拟变分包含的新的扰动迭代算法。其次,证明了(1)式的解的存在性和唯一性,并且研究了由扰动迭代算法产生的迭代序列的收敛性和稳定性。

定义6[13] 令T是H空间中的自反映射,且$x_0\in H$,由$x_{n+1}=f(T,x_n)$,定义一个H中的迭代序列$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}k$。设$\{x\in H:Tx=x\}\neq\varnothing$,且$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$收敛到$T$的一个不动点$x^*$。令$\{u_n\}\subset H$,$\varepsilon_n=\|u_{n+1}-f(T,u_n)\|$,如果$\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$成立可推得$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=x$,那么由$x_{n+1}=f(T,x_n)$定义的迭代序列$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$被称为$T$-稳定的或关于$H$稳定的。

算法1 对于任意给定的$x_0\in H$,计算

$$x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n R^{h,\eta}_{M_n(\cdot,y_n),\lambda}(h(y_n)-\lambda N(A(y_n),B(y_n))+f)+\alpha_n e_n$$
$$y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_n R^{h,\eta}_{M_n(\cdot,x_n),\lambda}(h(x_n)-\lambda N(A(x_n),B(x_n))+f)+\alpha_n f_n$$

这里$\{e_n\}$和$\{f_n\}$是H的两个元列,它们被引入是由于考虑到计算中的可能误差。$\{\alpha_n\}$,$\{\beta_n\}$满足如下条件

$$0<\alpha_n,\beta_n\leq 1\ (\forall n\geq 0),\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty \tag{9}$$

令$\{u_n\}$和$\{v_n\}$为H中的任意序列,并且定义ε_n为

$$\varepsilon_n=\|v_{n+1}-\{(1-\alpha_n)v_n+\alpha_n R^{h,\eta}_{M_n(\cdot,u_n),\lambda}(h(u_n)-\lambda N(A(u_n),B(u_n))+f)+\alpha_n e_n\}\|,$$
$$u_n=(1-\beta_n)v_n+\beta_n R^{h,\eta}_{M_n(\cdot,v_n),\lambda}(h(v_n)-\lambda N(A(v_n),B(v_n))+f)+\alpha_n f_n \tag{10}$$

定理1 令$\eta:H\times H\to H$是一个关于常数τ-Lipschitz连续的单值算子,单值算子$h:H\to H$分别关于常数r,δ,是强η-单调和Lipschitz连续的。设$N:H\times H\to H$关于第一变元是l_{N_1}-Lipschitz连续的,且关于第二变元是l_{N_2}-Lipschitz连续的。又设是$A:H\to H$是l_A-Lipschitz连续的,并且关于N的第一变元α-h-强单调的。设$B:H\to H$是l_B-Lipschitz连续的。令$M,M_n:H\times H\to 2^H$关于第一变元是(h,η)-单调算子,并且对于每一个$y\in H$和$n\geq 0$,$M_n(\cdot,y)\xrightarrow{GG}M(\cdot,y)$。设存在两个正数$\mu>0$,$\lambda>0$满足

$$\sup\{\|R^{h,\eta}_{M(\cdot,x),\lambda}(z)-R^{h,\eta}_{M(\cdot,y),\lambda}(z)\|,\|R^{h,\eta}_{M_n(\cdot,x),\lambda}(z)-R^{h,\eta}_{M_n(\cdot,y),\lambda}(z)\|\}\leq\mu\|x-y\|,\forall x,y,z\in H \tag{11}$$

和

$$0<\frac{\tau}{r}\sqrt{\delta^2+\lambda^2 l_A{}^2 l_{N_1}{}^2-2\lambda\alpha}+\frac{\tau}{r}\lambda l_{N_2}l_B+\mu<1 \tag{12}$$

如果$\lim\limits_{n\to\infty}\|e_n\|=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n\|=0$,那么可得下列结论:

(i) (1)式有唯一解x^*;

(ii) 由算法1定义的序列$\{x_n\}$强收敛到(1)式的唯一解x^*;

(iii) 进一步,如果$0<a<a_n$,那么$\lim\limits_{n\to\infty}v_n=x^*$当且仅当$\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$,这里$\varepsilon_n$由(10)式定义。

证明 首先,证明(1)式有唯一解x^*。

令$F(x)=R^{h,\eta}_{M(\cdot,x),\lambda}(hx-\lambda N(A(x),B(x))+f)$,$E(x)=hx-\lambda N(A(x),B(x))+f$,则可得

$$\|F(x)-F(y)\|=\|R^{h,\eta}_{M(\cdot,x),\lambda}(E(x))-R^{h,\eta}_{M(\cdot,y),\lambda}(E(y))\|\leq$$
$$\|R^{h,\eta}_{M(\cdot,x),\lambda}(E(x))-R^{h,\eta}_{M(\cdot,x),\lambda}(E(y))\|+\|R^{h,\eta}_{M(\cdot,x),\lambda}(E(y))-R^{h,\eta}_{M(\cdot,y),\lambda}(E(y))\| \tag{13}$$

由引理2可得

$$\|R^{h,\eta}_{M(\cdot,x),\lambda}(E(x))-R^{h,\eta}_{M(\cdot,x),\lambda}(E(y))\|\leq\frac{\tau}{r}\|hx-\lambda N(A(x),B(x))-hy+\lambda N(A(y),B(y))\|\leq \tag{14}$$

$$\frac{\tau}{r}\|hx-\lambda N(A(x),B(x))-hy+\lambda N(A(y),B(x))\|+\frac{\tau}{r}\|\lambda N(A(y),B(x))-\lambda N(A(y),B(y))\|。$$

既然h是δ-Lipschitz连续的,N关于第一变元是l_{N_1}-Lipschitz连续的。另外,A是l_A-Lipschitz连续的,并且关于N的第一变元是α-h-强单调的,那么

$$\|hx-\lambda N(A(x),B(x))-hy+\lambda N(A(y),B(x))\|\leq\sqrt{\delta^2+\lambda^2 l_A{}^2 l_{N_1}{}^2-2\lambda\alpha}\|x-y\| \tag{15}$$

既然$N:H\times H\to H$关于第二变元是l_{N_2}-Lipschitz连续的,B是l_B-Lipschitz连续的,那么

$$\| \lambda N(A(y),B(x)) - \lambda N(A(y),B(y)) \| \le \lambda l_{N_2} l_B \| x-y \| \tag{16}$$

由(13)～(16)式和(11)式,可得到

$$\| F(x) - F(y) \| \le \theta \| x-y \| \tag{17}$$

这里 $\theta = \frac{\tau}{r}\sqrt{\delta^2 + \lambda^2 l_A{}^2 l_{N_1}{}^2 - 2\lambda\alpha} + \frac{\tau}{r}\lambda l_{N_2} l_B + \mu$ (18)

由(12)式知 $0 < \theta < 1$。于是,F 是一个压缩映射。那么 F 有唯一的不动点 $x^* \in H$,即

$$x^* = R^{h,\eta}_{M(\cdot,x^*),\lambda}(h(x^*) - \lambda N(A(x^*),B(x^*)) + f) \tag{19}$$

由引理 3,可得 x^* 是(1)式的唯一解。

现在来证明结论(ii)。由算法 1 和 (19)式,可得

$$\begin{aligned}
&\| x_{n+1} - x^* \| = \\
&\| (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n R^{h,\eta}_{M_n(\cdot,y_n),\lambda}(E(y_n)) + \alpha_n e_n - (1-\alpha_n)x^* - \alpha_n R^{h,\eta}_{M(\cdot,x^*),\lambda}(E(x^*)) \| \le \\
&(1-\alpha_n) \| x_n - x^* \| + \alpha_n \| R^{h,\eta}_{M_n(\cdot,y_n),\lambda}(E(y_n)) - R^{h,\eta}_{M(\cdot,x^*),\lambda}(E(x^*)) \| + \alpha_n \| e_n \| \le \\
&(1-\alpha_n) \| x_n - x^* \| + \alpha_n \| R^{h,\eta}_{M_n(\cdot,y_n),\lambda}(E(y_n)) - R^{h,\eta}_{M_n(\cdot,y_n),\lambda}(E(x^*)) \| + \\
&\alpha_n \| R^{h,\eta}_{M_n(\cdot,y_n),\lambda}(E(x^*)) - R^{h,\eta}_{M(\cdot,x^*),\lambda}(E(x^*)) \| + \alpha_n \| e_n \| \le \\
&(1-\alpha_n) \| x_n - x^* \| + \alpha_n \| R^{h,\eta}_{M_n(\cdot,y_n),\lambda}(E(y_n)) - R^{h,\eta}_{M_n(\cdot,y_n),\lambda}(E(x^*)) \| + \\
&\alpha_n \| R^{h,\eta}_{M_n(\cdot,y_n),\lambda}(E(x^*)) - R^{h,\eta}_{M_n(\cdot,x^*),\lambda}(E(x^*)) \| + \alpha_n \xi_n + \alpha_n \| e_n \|,
\end{aligned} \tag{20}$$

这里

$$\xi_n = \| R^{h,\eta}_{M_n(\cdot,x^*),\lambda}(E(x^*)) - R^{h,\eta}_{M(\cdot,x^*),\lambda}(E(x^*)) \| \ge 0。$$

如同(14)式的证明,可得

$$\begin{aligned}
&\| R^{h,\eta}_{M_n(\cdot,y_n),\lambda}(E(y_n)) - R^{h,\eta}_{M_n(\cdot,y_n),\lambda}(E(x^*)) \| \le \\
&\frac{\tau}{r}\sqrt{\delta^2 + \lambda^2 l_A{}^2 l_{N_1}{}^2 - 2\lambda\alpha} + \frac{\tau}{r} l_{N_2} l_B \| y_n - x^* \|
\end{aligned} \tag{21}$$

从(11)式可得

$$\| R^{h,\eta}_{M_n(\cdot,y_n),\lambda}(E(x^*)) - R^{h,\eta}_{M_n(\cdot,x^*),\lambda}(E(x^*)) \| \le \mu \| y_n - x^* \| \tag{22}$$

由(20)～(22) 式和 (18)式,可得

$$\| x_{n+1} - x^* \| \le (1-\alpha_n) \| x_n - x^* \| + \alpha_n \theta \| y_n - x^* \| + a_n \xi_n + a_n \| e_n \| \tag{23}$$

类似地,可得

$$\| y_n - x^* \| \le (1-\beta_n) \| x_n - x^* \| + \beta_n \theta \| x_n - x^* \| + \beta_n \xi_n + \beta_n \| f_n \| \tag{24}$$

由(23)式和(24)式,可推得

$$\| x_{n+1} - x^* \| \le (1 - \alpha_n(1-\theta)(1+\beta_n\theta)) \| x_n - x^* \| + \alpha_n\beta_n\theta \| f_n \| + \alpha_n\xi_n + \alpha_n \| e_n \| + \alpha_n\beta_n\theta\xi_n$$

由(9)式和(12)式,可推得 $0 < \theta < 1$,$0 \le \beta_n \le 1$,那么

$$\| x_{n+1} - x^* \| \le (1 - \alpha_n(1-\theta)) \| x_n - x^* \| + \alpha_n(1-\theta) h_n \tag{25}$$

这里

$$h_n = \frac{\beta_n\theta \| f_n \| + \xi_n + \| e_n \| + \beta_n\theta\xi_n}{1-\theta}。$$

既然,对于任意 $y \in H$,$M_n(\cdot,y) \xrightarrow{GG} M(\cdot,y)$,则由引理 5 知 $R^{h,\eta}_{M_n(\cdot,x^*),\lambda}(E(x^*)) \to R^{h,\eta}_{M(\cdot,x^*),\lambda}(E(x^*))$,$(n\to\infty)$,于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n = 0$,又由 $\lim\limits_{n\to\infty} \| e_n \| = 0$,$\lim\limits_{n\to\infty} \| f_n \| = 0$ 和(9)式,可推得 $h_n \to 0$,$(n\to\infty)$。于是由引理 4 和(25)式,可推得 $x_n \to x^*$,$(n\to\infty)$。

下面,作者证明结论(iii)是正确的。利用(10)式,可得

$$\begin{aligned}
\| v_{n+1} - x^* \| &\le \| v_{n+1} - \{(1-\alpha_n)v_n + \alpha_n R^{h,\eta}_{M_n(\cdot,u_n),\lambda}(h(u_n) - \lambda N(A(u_n),B(u_n)) + f) + \alpha_n e_n\} \| + \\
&\| (1-\alpha_n)v_n + \alpha_n R^{h,\eta}_{M_n(\cdot,u_n),\lambda}(h(u_n) - \lambda N(A(u_n),B(u_n)) + f) + \alpha_n e_n - x^* \| = \\
&\varepsilon_n + \| (1-\alpha_n)v_n + \alpha_n R^{h,\eta}_{M_n(\cdot,u_n),\lambda}(h(u_n) - \lambda N(A(u_n),B(u_n)) + f) + \alpha_n e_n - x^* \|
\end{aligned} \tag{26}$$

与(25)式的证明类似,可得

$$\begin{aligned}
&\| (1-\alpha_n)v_n + \alpha_n R^{h,\eta}_{M_n(\cdot,u_n),\lambda}(h(u_n) - \lambda N(A(u_n),B(u_n)) + f) + \alpha_n e_n - x^* \| \le \\
&(1 - \alpha_n(1-\theta)) \| v_n - x^* \| + \alpha_n(1-\theta) h_n
\end{aligned} \tag{27}$$

既然 $0<a\le\alpha_n$，由(26)式和(27)式，可得

$$\| v_{n+1}-x^* \| \le (1-\alpha_n(1-\theta)) \| v_n-x^* \| +\alpha_n(1-\theta)\left(h_n+\frac{\varepsilon_n}{\alpha_n(1-\theta)}\right) \tag{28}$$

假设 $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$，于是由 $\lim_{n\to\infty}h_n=0$，$\sum\alpha_n=\infty$，和(28)式，以及引理4，可得 $\lim_{n\to\infty}v_n=x^*$。反之，若设 $\lim_{n\to\infty}v_n=x^*$。于是可得

$$\begin{aligned}\varepsilon_n = &\| v_{n+1}-\{(1-\alpha_n)v_n+\alpha_n R^{h,\eta}_{M_n(\cdot,u_n),\lambda}(h(u_n)-\lambda N(A(u_n),B(u_n))+f)+\alpha_n e_n\} \| \le\\ &\| v_{n+1}-x^* \| + \| (1-\alpha_n)v_n+\alpha_n R^{h,\eta}_{M_n(\cdot,u_n),\lambda}(h(u_n)-\lambda N(A(u_n),B(u_n))+f)+\alpha_n e_n-x^* \| \le\\ &\| v_{n+1}-x^* \| +(1-\alpha_n(1-\theta)) \| v_n-x^* \| +\alpha_n(1-\theta)h_n\end{aligned}$$

由于 $0\le a\le a_n(\forall n\ge 0)$，$0<\theta<1$，$v_n\to x^*$，$h_n\to 0(n\to\infty)$，可得 $\varepsilon_n\to 0(n\to\infty)$。　证毕

参考文献：

[1] FANG Y P, HUANG N J. A New System of Variational Inclusions with (h,η)-Monotone Operators In Hilbert Spaces[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2005, 49:365-374.

[2] FANG Y P, HUANG N J. Research Report[R]. Chengdu:Sichuan University, 2003.

[3] HUANG N J, FANG Y P. A New Class of General Variational Inclusions Involving Maximal η-Monotone Mapping[J]. Publ Math Debrecen, 2003, 62(1-2):83-98.

[4] FANG Y P, HUANG N J. H-monotone Operator and Resolvent Operator Technique for Variational Inclusions[J]. Appl Math Comput, 2003, 145:795-803.

[5] ZEIDLER E. Nonlinear Functional Analysis and its Applications II:Monotone Operators[M]. Berlin:Springer-Verlag, 1985.

[6] LIU Z Q, KANG S M. Convergence and Stability of Perturbed Three-step Iterative Algorithm for Completely Generalized Nonlinear Quasi-variational Inequalities[J]. Appl Math Comput, 2004, 149:245-258.

[7] ATTOUCH H. Variational Convergence for Functions and Operators[M]. London:Applied Mathematical Series, 1974.

[8] DING X P, LUO C L. Perturbed Proximal Point Algorithms for Generalized Quasi-variational-like Inclusions[J]. J Comput Appl Math, 2000, 210:153-165.

[9] LEE C H, ANSARI Q H, YAO J C. A Perturbed Algorithm for Strongly Nonlinear Variational-like Inclusions[J]. Bull Austral Math Soc, 2000, 62:417-426.

[10] AGARWAL R P, YEOL J C,HUANG N J. Sensitivity Analysis for Strongly Nonlinear Quasi-variational Inclusions[J]. Applied Mathematics Letters, 2000, 13:19-24.

[11] NOOR M A, NOOR K I. Sensitivity Analysis for Quasi-variational Inclusions[J]. J Math Anal Appl, 1999, 236:290-299.

[12] CHANG S S. On Chidume's Open Questions and Approximate Solution of Multivalent Strongly Accretive Mapping Equations in Banach Spaces[J]. J Math Anal Appl, 1997, 216:94-111.

[13] AGARAL R P, CHO Y J, LI J,et al. Stability of Iterative Procedures with Errors Approximating Common Fixed Points for Quicontractive Mapping in q-uniformly Smooth Banach Spaces[J]. J Math Anal Appl, 2002, 22:435-447.

[14] ADLY S. Perturbed Algorithm and Sensitivity Analysis for a General Class of Variational Inclusions[J]. J Math Anal Appl, 1996, 201:609-630.

[15] NOOR M A. Some Developments in General Variational Inequalities[J]. Appl Math Comput, 2004, 152:197-277.

[16] GIANNESSI F, MAUGERI A. Variational Inequalities and Network Equilibrium Problems[M]. New York:Plenum, 1995.

[17] 张石生. 变分不等式和相补问题理论及其应用[M]. 上海:上海科学技术出版社, 1991.

[18] DING X P. Algorithms of Solutions for Completely Generalized Mixed Iimplicit Quasi-variational Inclusions[J]. Appl Math Comput, 2004, 148:47-66.

[19] 张旭,叶志强. Banach 空间中一类含 H-增生异子的新型广义非线性混合似变分包含组[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2006,23(4):6-9,24.

(责任编辑　游中胜)