关于不定方程 $x^3 \pm 8 = 35y^2$ *

黄勇庆, 廖江东
(重庆师范大学 数学与计算机科学学院, 重庆 400047)

摘　要：利用同余式、递归序列的方法证明了不定方程 $x^3+8=35y^2$ 仅有整数解 $(x,y)=(-2,0),(3,\pm1)$；$x^3-8=35y^2$ 仅有整数解 $(x,y)=(2,0)$。

关键词：不定方程；整数解；递归数列；Jacobi 符号
中图分类号：O156　　文献标识码：A　　文章编号：1672-6693(2007)02-0019-03

On the Diophantine Equation $x^3 \pm 8 = 35y^2$

HUANG Yong-qing, LIAO Jiang-dong
(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: In this paper the author has proved that the diophantine equation $x^3+8=35y^2$ has only integer solutions $(x,y)=(-2,0),(3,\pm1)$；$x^3-8=35y^2$ has only integer solution $(x,y)=(2,0)$.

Key words: diophantine equation; integer solution; recurrent sequence; Jacobi symbol

不定方程 $x^3\pm8=Dy^2$(其中 D 是无平方因子的正整数)是一类基本而重要的 Diophantine 方程。对于它已有不少的研究,1942 年 Ljunggren[1] 证明了当 D 不能被 3 或 $6k+1$ 形的素因数整除时,这两个方程最多只有一组正整数解。1981 年柯召、孙琦[2] 进一步证明了,如果 D 满足前述条件并且如果 $D\equiv0,2,3\pmod4$ 时,则方程 $x^3+8=Dy^2$ 仅有整数解 $(x,y)=(-2,0)$；如果 D 满足前述条件并且如果 $D\equiv0,1,2\pmod4$ 时,则方程 $x^3-8=Dy^2$ 仅有整数解 $(x,y)=(2,0)$。显然对于 D 含有 $6k+1$ 形的素因数的情况需要进一步讨论。1991 年曹玉书[3] 讨论 D 含有 $6k+1$ 形的素因数使 $x^3\pm8=Dy^2$ 仅有平凡解的情况。1995 年罗明[4] 证明了 $x^3-8=7y^2$ 仅有整数解 $(x,y)=(2,0)$, $x^3+8=7y^2$ 仅有整数解 $(x,y)=(-2,0),(-1,\pm1),(10,\pm12)$。本文将利用某些 Pell 方程的解所构成的递归数列的性质与同余式来讨论不定方程 $x^3\pm8=35y^2$ 的全部整数解。为此,需要在此之前给出如下的引理。

引理 1[5]　不定方程 $x^3+1=70y^2$ 仅有整数解 $(x,y)=(-1,0)$。

引理 2[6]　不定方程 $x^3-1=70y^2$ 仅有整数解 $(x,y)=(1,0)$。

定理 1　不定方程

$$x^3+8=35y^2 \tag{1}$$

仅有整数解 $(x,y)=(-2,0),(3,\pm1)$。

证明　如果 $x\equiv0\pmod2$,则由(1)式有 $y\equiv0\pmod4$,方程(1)化为 $\left(\frac{x}{2}\right)^3+1=70\left(\frac{y}{4}\right)^2$,由引理 1 知,有 $(x,y)=(-2,0)$。

现设 $x\equiv1\pmod2$,此时 $(x+2,x^2-2x+4)=1$ 或 3,并且 5 不能整除 x^2-2x+4,故(1)式给出下列 4 种分解。

1) $x+2=35a^2, x^2-2x+4=b^2, y=ab$；
2) $x+2=5a^2, x^2-2x+4=7b^2, y=ab$；
3) $x+2=105a^2, x^2-2x+4=3b^2, y=3ab$；
4) $x+2=15a^2, x^2-2x+4=21b^2, y=3ab$。

以下分别讨论这 4 种情形所给的(1)式的整数解。

1) 由第二个式子得 $x=0,2$,均不适合第一个式子,故该情形无(1)式的整数解。

* 收稿日期：2006-09-04
资助项目：重庆市教委科研基金项目(No. 010204)
作者简介：黄勇庆(1978-),男,四川西充人,硕士研究生,研究方向为基础数学。

2) 将第二个式子化为 $(x-1)^2-7b^2=-3$,因为方程 $X^2-7Y^2=-3$ 有两个结合类解,其基本解分别是 $\pm 2+\sqrt{7}$,故全部整数解 (x,y) 由下面两式给出。

$$X+Y\sqrt{7}=\pm(x_n+y_n\sqrt{7})=\pm(2+\sqrt{7})(u_n+v_n\sqrt{7})=\pm(2+\sqrt{7})(8+3\sqrt{7})^n,n\in\mathbf{Z};$$

$$X+Y\sqrt{7}=\pm(\bar{x}_n+\bar{y}_n\sqrt{7})=\pm(-2+\sqrt{7})(u_n+v_n\sqrt{7})=\pm(-2+\sqrt{7})(8+3\sqrt{7})^n,n\in\mathbf{Z}$$

其中 $\pm(u_n+v_n\sqrt{39})=\pm(8+3\sqrt{7})^n$,给出 Pell 方程 $X^2-7Y^2=1$ 的全部整数解,$8+3\sqrt{7}$是其基本解。因此有 $x-1=5a^2-3=\pm x_n,\pm\bar{x}_n,n\in\mathbf{Z}$。但是容易知道 $\bar{x}=-x_n$,所以只需考虑 $5a^2=\pm x_n+3,n\in\mathbf{Z}$。

容易验证下列各式成立

$$u_{n+2}=16u_{n+1}-u_n,u_0=1,u_1=8 \tag{2}$$

$$v_{n+2}=16v_{n+1}-v_n,v_0=0,v_1=3 \tag{3}$$

$$x_{n+2}=16x_{n+1}-x_n,x_0=2,x_1=37 \tag{4}$$

$$x_{n+2m}\equiv -x_n(\mathrm{mod}\,u_m) \tag{5}$$

因 $x\equiv1(\mathrm{mod}\ 2)$,所以 $a\equiv1(\mathrm{mod}\ 2)$,故 $x_n\equiv0(\mathrm{mod}\ 2)$,从而 $n\equiv0(\mathrm{mod}\ 2)$。对 x_n 的递归关系(4)式取 mod3,得到周期为 2 的剩余类序列。当 $n\equiv0(\mathrm{mod}2)$时,有 $x_n\equiv2(\mathrm{mod}3)$,若 $5a^2=-x_n+3$,则有 $2a^2\equiv1(\mathrm{mod}3)$,显然不可能。所以只需考虑

$$5a^2=x_n+3 \tag{6}$$

中 $n\equiv0(\mathrm{mod}2)$的情况。

对 x_n 的递归关系(4)式取 mod8,得到周期为 4 的剩余类序列。当 $n\equiv2(\mathrm{mod}4)$时,有 $x_n\equiv6(\mathrm{mod}8)$,由(6)式有 $5a^2\equiv1(\mathrm{mod}8)$,显然不可能,故 $n\equiv0(\mathrm{mod}4)$。

若 $n\neq0$,则可以令 $n=2\cdot3^r\cdot m$,其中 $r\geq0$,$m\equiv\pm2(\mathrm{mod}6)$,利用性质(5)式得到 $x_n\equiv-x_0\equiv-2(\mathrm{mod}\ u_m)$,由(6)式有 $5a^2\equiv1(\mathrm{mod}\ u_m)$,即$\left(\frac{5a^2}{u_m}\right)=\left(\frac{1}{u_m}\right)=1$。

另一方面,对 u_n 的递归关系(2)式取 mod5,得到周期为 6 的剩余类序列。当 $m\equiv\pm2(\mathrm{mod}6)$时,有 $u_m\equiv2(\mathrm{mod}5)$,即有$\left(\frac{5a^2}{u_m}\right)=\left(\frac{u_m}{5}\right)=\left(\frac{2}{5}\right)=-1$,矛盾。

最后仅剩下 $n=0$,此时有 $x_n=2$,从而有 $a^2=1$,故给出方程(1)的整数解$(x,y)=(3,\pm1)$。

3) 因 $x\equiv1(\mathrm{mod}2)$,故 $a\equiv1(\mathrm{mod}2)$。由第一个式子有 $x\equiv1(\mathrm{mod}8)$,代入第二个式子得 $7\equiv3b^2(\mathrm{mod}8)$,这不可能,故该情形无(1)式的整数解。

4) 因 $x\equiv1(\mathrm{mod}2)$,故 $a\equiv1(\mathrm{mod}2)$。由第一个式子有 $x\equiv5(\mathrm{mod}8)$,代入第二个式子得 $5\equiv3b^2(\mathrm{mod}8)$,这也不可能,故该情形无(1)式的整数解。

综合上述情形的讨论结果知不定方程(1)式仅有整数解$(x,y)=(-2,0),(3,\pm1)$。　证毕

定理2　不定方程

$$x^3-8=35y^2 \tag{7}$$

仅有整数解$(x,y)=(2,0)$。

证明　如果 $x\equiv0(\mathrm{mod}2)$,则由(7)式有 $y\equiv0(\mathrm{mod}4)$,方程(1)式化为$\left(\frac{x}{2}\right)^3-1=70\left(\frac{y}{4}\right)^2$,由引理2知,有$(x,y)=(-2,0)$。

现设 $x\equiv1(\mathrm{mod}2)$,此时$(x-2,x^2+2x+4)=1$或3,并且5不能整除 x^2+2x+4,故(7)式给出下列4种分解。

1) $x-2=35a^2,x^2+2x+4=b^2,y=ab$;

2) $x-2=5a^2,x^2+2x+4=7b^2,y=ab$;

3) $x-2=105a^2,x^2+2x+4=3b^2,y=3ab$;

4) $x-2=15a^2,x^2+2x+4=21b^2,y=3ab$。

以下分别讨论这4种情形所给的(7)式的整数解。

1) 由第二个式子得 $x=0,-2$,均不适合第一个式子,故该情形无(7)式的整数解。

2) 因 $x\equiv1(\mathrm{mod}2)$,故 $a\equiv1(\mathrm{mod}2)$。由第一个式子有 $x\equiv7(\mathrm{mod}8)$,代入第二个式子得 $3\equiv7b^2(\mathrm{mod}8)$,这不可能。故该情形无(7)式的整数解。

3) 将第二个式子化为$(x+1)^2+3=3b^2$,再将第一个式子代入,有 $b^2-3(35a^2+1)^2=1$。因此

$$|b|+(35a^2+1)\sqrt{3}=r_n+s_n\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^n,n\geq0$$

其中$2+\sqrt{3}$是 Pell 方程 $R^2-3S^2=1$ 的基本解,从而有

$$35a^2+1=s_n,n\geq0 \tag{8}$$

易知 s_n 满足递归关系

$$s_{n+2}=4s_{n+1}-s_n,s_0=0,s_1=1$$

因 $x\equiv1(\mathrm{mod}2)$,故 $a\equiv1(\mathrm{mod}2)$,所以有 $2|s_n$,从而$2|n$。对 s_n 的递归关系取 mod8,得到周期为 4 的剩余类序列。当 $n\equiv0(\mathrm{mod}4)$时,有 $s_n\equiv0(\mathrm{mod}8)$,由(8)式有 $3a^2\equiv7(\mathrm{mod}8)$,显然不可能。故 $n\equiv2(\mathrm{mod}4)$,即 $n\equiv2,6(\mathrm{mod}8)$。

对 s_n 的递归关系取 mod7,得到周期为 8 的剩余类序列。当 $n\equiv2,6(\mathrm{mod}8)$时,有 $s_n\equiv4,3(\mathrm{mod}7)$,由(8)式有 $0\equiv3,2(\mathrm{mod}7)$,显然不可能。故该情形无(7)式的整数解。

4) 因 $x\equiv1(\mathrm{mod}2)$,故 $a\equiv1(\mathrm{mod}2)$。由第一个

式子有 $x \equiv 1 \pmod 8$,代入第二个式子得 $7 \equiv 5b^2 \pmod 8$,这不可能。故该情形无(7)式的整数解。

综合上述情形的讨论结果知,不定方程(7)式仅有整数解 $(x,y) = (2,0)$。　　证毕

致谢:作者对罗明教授的热情帮助和鼓励深表感谢!

参考文献:

[1] LJUNGGREN W. Satze Uber Unbestimmte Gleichungen [J]. Skr Norske Vid Akad Oslo I, 1942, 9:1-55.

[2] 柯召,孙琦. 关于不定方程 $x^3 \pm 8 = Dy^2$ 和 $x^3 \pm 8 = 3Dy^2$ [J]. 四川大学学报(自然科学版), 1981, 18(4):1-5.

[3] 曹玉书. 关于丢蕃图方程 $x^3 \pm 8 = 3Dy^2$ [J]. 黑龙江大学学报(自然科学版), 1991(1):18-21.

[4] 罗明. 关于不定方程 $x^3 \pm 8 = 7y^2$ [J]. 重庆师范学院学报(自然科学版), 1995(3):29-31.

[5] 倪谷炎. 关于不定方程 $x^3 + 1 = Dy^2$ [J]. 哈尔滨师范大学学报(自然科学版), 1999(3):13-15.

[6] 佟瑞洲,王镇江. 关于不定方程 $x^3 - 1 = Dy^2$ [J]. 江汉大学学报(自然科学版), 1991(6):40-48.

(责任编辑　黄　颖)

研究快讯

P 型 ZnO 薄膜的制备及特性研究*

孔春阳, 王　楠, 朱仁江, 秦国平, 戴特力, 南　貌, 阮海波

(重庆师范大学 物理学与信息技术学院, 重庆 400047)

关键词:离子注入;P 型 ZnO 薄膜;退火;射频磁控溅射

中图分类号:TN304.055　　文献标识码:B　　文章编号:1672-6693(2007)02-0021-01

ZnO 是一种新型的自激活宽带隙半导体材料,是一种理想的短波长发光器件材料,在光电子、高温大功率器件、高频微波器件以及信息技术领域等方面有着广阔的应用前景,实现和控制高质量 P 型掺杂是 ZnO 薄膜光电子应用的关键。本文用射频磁控溅射技术,在直径为 100 mm 的单晶 Si(110)衬底上制备 ZnO 薄膜,薄膜厚度为 1.8 μm。用多功能离子注入机对 ZnO 薄膜进行 N 离子注入。通过退火实现了 ZnO 薄膜的 P 型转变。扫描电镜(SEM)观察表明,离子注入使薄膜表面形貌产生损伤和缺陷,粗糙度明显增加,但退火对表面形貌有很大改善。X 射线衍射(XRD)给出样品具有对应于 ZnO(002)面的衍射峰,表明薄膜具有较好的 c 轴择优取向。在不同温度下(500℃, 650℃, 800℃, 900℃, 950℃),对样品进行了不同时间的退火(1 min, 3 min, 7 min, 15 min),实验结果表明,退火温度为 800℃ 时结晶度最好,退火温度过高会导致结晶度降低。霍尔测试给出了样品的电学性质,结果表明退火温度和退火时间对 ZnO 薄膜的 P 型转变以及载流子浓度和电阻率有重要影响,较高温度和较长时间的退火有利于提高载流子浓度和降低电阻率,但较高温度和较长时间的退火对薄膜结构的影响较大。在 950℃ 退火 7 min 时,样品的载流子浓度达到 $1.86 \times 10^{16}\ cm^{-3}$,电阻率降到 41.5 Ω·cm。根据实验结果探讨了 ZnO 薄膜的 P 型转变机理,给出了载流子浓度和 1/kT 的实验关系,估算了填隙原子跃迁到邻近格点位置成为激活离子需克服的势垒。

(责任编辑　李若溪)

* 收稿日期:2007-03-02

资助项目:重庆市自然科学基金(No. AC4034);重庆市教委科研基金项目(No. KJ050812)

作者简介:孔春阳(1958-),男,安徽舒城人,教授,博士,研究方向为材料物理。