关于 E-拟凸函数几个错误命题的反例及修正*

吴　欧，文乾英，杨玉红
(重庆师范大学 数学与计算机科学学院，重庆 400047)

摘　要：本文对文献[1]的几个错误命题给出了反例,并利用放大映射与压缩映射对几个错误命题进行了修正,得到了几个关于 E-拟凸函数的新结论。同时建立了 E-拟凸函数与 E-水平集之间的等价关系。

关键词：E-凸集；E-凸函数；E-拟凸函数；E-水平集

中图分类号：O156　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2007)02-0022-02

Counterexamples and Modifications of Several Incorrect Results of E-quasiconvex Functions

WU Ou, *WEN Qian-ying*, *YANG Yu-hong*
(College of Mathematics and Computer Science, ChongQing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: In this paper we show several incorrect results in Ref[6], by giving some counterexamples. some incorrect results of E-quasiconvex functions are modified. Meanwhile, the equivalent relation between E-quasiconvex functions and corresponding level sets is proved.

Key Words: E-convex sets; E-convex functions; E-quasiconvex functions; E-level sets

凸性和广义凸性在最优化理论的各个方面起着很关键的作用,因此对各种广义凸性的探索一直是凸分析的重要课题。随着研究的不断深入,各种新的成果不断出现[1-7]。本文对文献[1]中的部分错误结论提出了反例,并进行了相应的修正。同时得到了 E-拟凸函数与 E-水平集之间的等价关系。

1　预备知识

定义 1[2]　称集合 $X\subseteq\mathbf{R}^n$ 是 E-凸集,若存在映射 $E:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$, $\forall x,y\in X,\lambda\in[0,1]$ 有 $\lambda Ex+(1-\lambda)Ey\in X$。

定义 2[2]　称函数 $f:X\subseteq\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 是定义在 E-凸集 X 上的 E-凸函数,如果 $\forall x,y\in X,\lambda\in[0,1]$,有 $f(\lambda Ex+(1-\lambda)Ey)\le\lambda f(Ex)+(1-\lambda)f(Ey)$。

定义 3[1]　称函数 $f:X\subseteq\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 是定义在 E-凸集 X 上的 E-拟凸函数,如果 $\forall x,y\in X,\lambda\in[0,1]$,有 $f(\lambda Ex+(1-\lambda)Ey)\le\max\{f(Ex),f(Ey)\}$。

定义 4[5]　称函数 $f:X\subseteq\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 是定义在 E-凸集 X 上的半 E-凸函数,如果 $\forall x,y\in X,\lambda\in[0,1]$,有 $f(\lambda Ex+(1-\lambda)Ey)\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$。

定义 5[6]　设 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$, $X\subseteq\mathbf{R}^n$, $E:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$,且 X 是 E-凸集,1)如果 $f(Ex)\ge f(x)$, $\forall x\in X$,则称 E 在 X 上关于 f 是放大映射;2)如果 $f(Ex)\le f(x)$, $\forall x\in X$,则称 E 在 X 上关于 f 是压缩映射。

定义 6[1]　设 $X\subseteq\mathbf{R}^n$ 是 E-凸集,f 是定义在 X 上的实值函数,$\forall\alpha\in\mathbf{R}$,称集合 $S_E(f,\alpha)=\{x\in X\mid f(Ex)\le\alpha\}$ 为 f 的 E-水平集。

2　主要结论

文献[1]中的命题 2.3,命题 2.4 都是不正确的,下面给出反例来说明,并且给出了正确的命题。

命题 1[1]　设 $X\subseteq\mathbf{R}^n$,f 是定义在 X 上的 E-凸函数,则集合 $S_E(f,\alpha)$ 是一个 E-凸集。

例 1　设 $Ex=x+1$, $f(x)=x^2$,则

$$f(\lambda Ex+(1-\lambda)Ey)=f(\lambda(x+1)+(1-\lambda)(y+1))=$$
$$(y+1+\lambda(x-y))^2=$$

---

* 收稿日期：2006-09-22　　修回日期：2006-12-22
资助项目：国家自然科学基金(No. 10471113)
作者简介：吴欧(1981-),女,沈阳人,硕士研究生,研究方向为广义凸性及最优化理论。

$$(y+1)^2+(x-y)(2\lambda(y+1)+\lambda^2(x-y))$$
$$\lambda f(Ex)+(1-\lambda)f(Ey)=\lambda(x+1)^2+$$
$$(1-\lambda)(y+1)^2=(y+1)^2+\lambda(x-y)(x+y+2)$$
$$f(\lambda Ex+(1-\lambda)Ey)-\lambda f(Ex)+(1-\lambda)f(Ey)=$$
$$(x-y)(2\lambda(y+1)+\lambda^2(x-y))-$$
$$\lambda(x-y)(x+y+2)=$$
$$(x-y)(\lambda y-\lambda^2y+\lambda^2x-\lambda x)=\lambda(\lambda-1)(x-y)^2$$

因为 $\lambda\in[0,1]$，则

$$f(\lambda Ex+(1-\lambda)Ey)-\lambda f(Ex)+(1-\lambda)f(Ey)\leq 0$$

即 $f(\lambda Ex+(1-\lambda)Ey)\leq\lambda f(Ex)+(1-\lambda)f(Ey)$

则 $f(x)$ 是 E-凸函数。

取 $x=4,y=2,\lambda=\frac{3}{4},\alpha=25$，则 $f(Ex)=25\leq\alpha,f(Ey)=9\leq\alpha$，但

$$f(E(\lambda Ex+(1-\lambda)Ey))=f(\frac{11}{2})=\frac{121}{4}>\alpha$$

则集合 $S_E(f,\alpha)$ 不是一个 E-凸集。

命题1′ 设 $X\subseteq\mathbf{R}^n$ 是 E-凸集，f 为 X 上的 E-凸函数，且 E 在 X 上关于 f 是压缩映射，即 $f(Ex)\leq f(x)$，则集合 $S_E(f,\alpha)$ 是一个 E-凸集。

证明 $\forall x,y\in S_E(f,\alpha)$，有 $f(Ex)\leq\alpha,f(Ey)\leq\alpha$，则 $f(E(\lambda Ex+(1-\lambda)Ey))\leq$

$$f(\lambda Ex+(1-\lambda)Ey)\leq\lambda f(Ex)+(1-\lambda)f(Ey)\leq\alpha$$

即 $\lambda Ex+(1-\lambda)Ey\in S_E(f,\alpha)$

所以集合 $S_E(f,\alpha)$ 是一个 E-凸集。 证毕

因为半 E-凸函数的性质，有以下命题。

命题2 设 $X\subseteq\mathbf{R}^n$ 是 E-凸集，f 为 X 上的 E-凸函数，则集合 $S_E(f,\alpha)$ 是一个 E-凸集。

证明 f 为 E-凸集 X 上的半 E-凸函数，则有 $f(Ex)\leq f(x)$，以下证明过程同上。 证毕

命题3[1] 设 $X\subseteq\mathbf{R}^n$ 是 E-凸集，f 为 X 上的实值函数，$\forall\alpha\in\mathbf{R}$，集合 $S_E(f,\alpha)$ 是一个 E-凸集的充分必要条件 f 是为 X 上的 E-拟凸函数。

例2 设 $Ex=x+1,f(x)=-x^2$，取

$$\bar{\alpha}=\max\{f(Ex),f(Ey)\}=$$
$$\max\{-(x+1)^2,-(y+1)^2\},$$

则 $\forall x,y\in S_E(f,\alpha)$，有 $f(Ex)\leq\bar{\alpha},f(Ey)\leq\bar{\alpha}$，且

$$f(E(\lambda Ex+(1-\lambda)Ey))=$$
$$f(\lambda(x+1)+(1-\lambda)(y+1)+1)=$$
$$-(\lambda(x+1)+(1-\lambda)(y+1)+1)^2$$

若 $x\geq y,\bar{\alpha}=-(y+1)^2$，则

$$f(E(\lambda Ex+(1-\lambda)Ey))\leq-(y+2)^2\leq\bar{\alpha}$$

同理，若 $x\leq y,\bar{\alpha}=-(x+1)^2$，则

$$f(E(\lambda Ex+(1-\lambda)Ey))\leq-(x+2)^2\leq\bar{\alpha}$$

即 $\lambda Ex+(1-\lambda)Ey\in S_E(f,\alpha)$，所以集合 $S_E(f,\alpha)$ 是一个 E-凸集。

取 $x=-2,y=1,\lambda=\frac{1}{2}$，则 $\bar{\alpha}=-1$，但 $f(\lambda Ex+(1-\lambda)Ey)=f(\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}>\bar{\alpha}$，则 f 不是 X 上的 E-拟凸函数。

命题3′ 设 $X\subseteq\mathbf{R}^n$ 是 E-凸集，1) f 是 X 上的 E-拟凸函数，且 E 在 X 上关于 f 是压缩映射，则集合 $S_E(f,\alpha)$ 是一个 E-凸集；2) 集合 $S_E(f,\alpha)$ 是一个 E-凸集，且 E 在 X 上关于 f 是放大映射，则 f 是 X 上的 E-拟凸函数。

证明 1) $\forall x,y\in S_E(f,\alpha)$，有 $f(Ex)\leq\alpha$，$f(Ey)\leq\alpha$，则

$$f(E(\lambda Ex+(1-\lambda)Ey))\leq$$
$$f(\lambda Ex+(1-\lambda)Ey)\leq\max\{f(Ex),f(Ey)\}\leq\alpha$$

即 $\lambda Ex+(1-\lambda)Ey\in S_E(f,\alpha)$，所以集合 $S_E(f,\alpha)$ 是一个 E-凸集。

2) $\forall x,y\in X$，令 $\bar{\alpha}=\max\{f(Ex),f(Ey)\}$，则 $f(Ex)\leq\bar{\alpha},f(Ey)\leq\bar{\alpha}$，即 $x\in S_E(f,\bar{\alpha}),y\in S_E(f,\bar{\alpha})$。

又集合 $S_E(f,\bar{\alpha})$ 是一个 E-凸集，则 $\forall\lambda\in[0,1]$，有 $\lambda Ex+(1-\lambda)Ey\in S_E(f,\bar{\alpha})$，从而

$$f(\lambda Ex+(1-\lambda)Ey)\leq f(E(\lambda Ex+(1-\lambda)Ey))\leq$$
$$\bar{\alpha}=\max\{f(Ex),f(Ey)\}$$

则 f 是 X 上的 E-拟凸函数。 证毕

参考文献：

[1] 王建勇. E-拟凸函数[J]. 聊城大学学报，2003，16：17-19.

[2] YOUNESS E A. E-Convex Sets, E-Convex Functions, and E-Convex Programming[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1999, 102：439-450.

[3] YANG X M. On E-Convex Sets, E-Convex Functions, and E-Convex Programming[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2001, 109：699-704.

[4] JIAN Jin-bao. Incorrect Results for E-Convex Functions and E-Convex Programming[J]. Journal of Mathematical Research and Exposition, 2003, 23：461-466.

[5] CHEN Xiu-su. Some Properities of Semi-E-convex Functions[J]. J Math Appl, 2002, 275：251-262.

[6] 覃义，简金宝. 关于 E-凸函数及 E-凸规划几个错误结论的修正[J]. 数学杂志，2006，26：177-180.

[7] 赵克全，陈哲. 半严格预拟不变凸函数的一个充分条件[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2006，23(3)：13-15.

(责任编辑 黄 颖)