2007 年 4 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Apr. 2007
第 24 卷 第 2 期 Journal of Chongqing Normal University(Natural Science Edition) Vol. 24 No. 2

涉及微分多项式的亚纯函数的正规族*

夏 玉 玲
(重庆大学 数理学院, 重庆 400044)

摘 要:设 F 为区域 D 上的亚纯函数族,k、m、q 是正整数,$p(w)=w^q+a_{q-1}(z)w^{q-1}+\cdots+a_1(z)w$ 是多项式,$H(f,f',\cdots,f^{(k)})$ 是满足 $r_H{}^*>0$ 的微分多项式,$a(z)$、$b(z)$、$c(z)$ 是 D 上的解析函数,且 $a(z)\neq b(z)$,$b(z)\neq 0$,$c(z)\neq 0$,如果对任意的 $f\in F$,f 的零点重数至少为 $k+1$,$p(f^{(k)})+H(f,f',\cdots,f^{(k)})=a(z)\Rightarrow f(z)=0$,$p(f^{(k)})+H(f,f',\cdots,f^{(k)})=b(z)\Rightarrow f(z)=c(z)$,则 F 在 D 上正规。

关键词:亚纯函数;微分多项式;正规族
中图分类号:O174.52 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-6693(2007)-02-0029-03

Normal Families of Mermorphic Functions Concerning Differential Monomials

XIA Yu-ling
(College of Mathematics and Physics, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: Let F be a family of mermorphic functions in a domain D, and k,m,q be positive integers, $p(w)=w^q+a_{q-1}(z)w^{q-1}+\cdots a_1(z)w$. Let $H(f,f',\cdots f^{(k)})$ be a differential polynomial that satisfies $r_h{}^*>0$, $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$ be some analytic functions in D. $a(z)\neq b(z)$, $b(z)\neq 0$, $c(z)\neq 0$. If for each, $f\in F$, all zeros of f are of multiplicity at least $k+1$, and $P(f^{(k)})+H(f,f',\cdots,f^{(k)})=a(z)\Rightarrow f(z)=0$, $P(f^{(k)})+H(f,f'\cdots,f^{(k)})=b(z)\Rightarrow f(z)=c(z)$, then F is normal in D.

Key words: Meromorphic function; differential polynomial; normal family

本文引用 Nevanlinna 值分布理论中常用记号及基本结果[1-2]。设 $f(z)$ 是区域 D 上亚纯函数,k、m、q 是正整数,$a_i(z)$ $(i=1,\cdots,q-1)$,$b_j(z)$ $(j=1,\cdots,m)$ 是 D 上的解析函数,n_0、n_1、$\cdots$、n_k 是正整数。

$$P(w)=w^q+a_{q-1}(z)w^{q-1}+\cdots+a_1(z)w,$$

$$M(f,f',\cdots,f^{(k)})=f^{n_0}(f')^{n_1}\cdots(f^{(k)})^{n_k},$$

$$\gamma_M{}^*=n_0+n_1+\cdots+n_{k-1},$$

$$\gamma_M=n_0+n_1+\cdots+n_k,$$

$$\Gamma_M=n_0+2n_1+\cdots+(k+1)n_k$$

$M(f,f',\cdots,f^{(k)})$ 是 f 的微分单项式,γ_M 是 $M(f,f',\cdots,f^{(k)})$ 的次数,Γ_M 是 $M(f,f',\cdots,f^{(k)})$ 的权。设 $M_1(f,f',\cdots,f^{(k)})$,$M_2(f,f',\cdots,f^{(k)})$,$\cdots$,$M_n(f,f',\cdots f^{(k)})$ 是 f 的微分单项式,则 $H(f,f',\cdots,f^{(k)})=b_1(z)M_1(f,f',\cdots,f^{(K)})+\cdots+b_n(z)M_n(f,f',\cdots,f^{(k)})$ 称为 f 的微分多项式。$\gamma_H{}^*=\min\{\gamma_{M_1}{}^*,\cdots,\gamma_{M_m}{}^*\}$。

设 f 和 g 为 D 内的两个亚纯函数,a 和 b 是两个复数。如果当 $f(z)=a$ 时,$g(z)=b$,记为 $f(z)=a\Rightarrow g(z)=b$;如果 $f(z)=a\Rightarrow g(z)=b$,且 $g(z)=b\Rightarrow f(z)=a$,记 $f(z)=a\Leftrightarrow g(z)=b$ 如果 $f(z)=a\Leftrightarrow g(z)=a$,就说 f 和 g 在 D 上分担 a。

1992 年,Schwick 首先把分担值与正规族联系起来,证明了

定理 1[3] 设 F 为单位圆盘 Δ 上的亚纯函数族,a_1、a_2、a_3 为三个互为判别的有穷复数。如果任意的 $f\in F$,a_1、a_2、a_3 为 f 和 f' 在 Δ 上的 IM 分担值,则 F 在 Δ 上正规。

庞学诚和 Zalcman 证明了

定理 2[4] 设 F 为区域 D 上的亚纯函数族,a 和 b 是两个不同的复数,c 为非零复数,如果对任意的 $f\in F$,$\overline{F}_f(0)=\overline{E}_{f'}(a)$,$\overline{E}_{f'}(b)=\overline{E}_f(c)$,则 F 在 D 上正规。

---

* 收稿日期:2006-09-22
作者简介:夏玉玲(1979-),女,山东临沂人,硕士研究生,研究方向为复分析。

1 引理

引理1[5] 设 F 是单位圆盘 Δ 上的亚纯函数族,k 为一正整数,若对任意的 $f\in F$,f 零点重数至少为 k,且存在 $A>0$,使得当 $f=0$ 时有 $|f^{(k)}(z)|\le A$,则若 F 在 Δ 上不正规,那么对于 $0\le\partial\le k$,存在

1) 一个实数 r,$0<r<1$;

2) 一个点列 z_n,$|z_n|<r$;

3) 一个函数列 f_n,$f_n\in F$;

4) 正数列 $\rho_n\to 0^+$

使得

$$g_n(\xi)=\frac{f_n(z_n+\rho_n\xi)}{\rho_n^{\partial}}\to g(\xi)$$

其中收敛按球面距离内闭一致收敛,g 是复平面 C 上的非常数亚纯函数,满足 $g^{\#}(\xi)\le g^{\#}(0)=kA+1$,且 g 的级至多为2。

引理2[6] $f(z)$ 是有穷级的超越亚纯函数,k 是一正整数,b 是非零有穷复数,如果 $f(z)$ 的零点重数至少为 $k+1$,则 $f^{(k)}$ 取 b 无穷多次。

引理3[7] $R(z)$ 是非零常数的有理函数,k 是一非负整数,b 是非零复数,如果 $R(z)$ 的零点重数至少为 $k+1$,$R^{(k)}(z)\ne b$,则

$$R(z)=\frac{(\gamma z+\delta)^{(k+1)}}{\alpha z+\beta}$$

其中 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 是常数,满足 $\alpha\gamma\ne0$,$|\beta|+|\delta|\ne0$。

2 主要结果

定理3 设 F 为区域 D 上的亚纯函数族,k、m、q 是正整数,$p(w)=w^q+a_{q-1}(z)w^{q-1}+\cdots+a_1(z)w$ 是多项式,$H(f,f',\cdots,f^{(k)})$ 是满足 $r_H{}^*>0$ 的微分多项式,$a(z)$、$b(z)$、$c(z)$ 是 D 上的解析函数,且 $a(z)\ne b(z)$,$b(z)\ne0$,$c(z)\ne0$。如果对任意的 $f\in F$,f 的零点重数至少为 $k+1$,$P(f^{(k)})+H(f,f',\cdots,f^{(k)})=a(z)\Rightarrow f(z)=0$,$P(f^{(k)})+H(f,f'\cdots,f^{(k)})=b(z)\Rightarrow f(z)=c(z)$,则 F 在 D 上正规。

证明 假设 F 在 $D=\Delta$ 上不正规,不失一般性,不妨假设 F 在 $z_0=0$ 处不正规[8]。由引理1,存在 $z_n\to0$,$f_n\in F$,$\rho_n\to0$ 使

$$g_n(\xi)=\frac{f_n(z_n+\rho_n\xi)}{\rho_n{}^k}$$

按球面距离内闭一致收敛于复平面 C 上的非常数亚纯函数 $g(\xi)$,且 $g(\xi)$ 的级至多为2。令 $Q(W)=w^q+a_{q-1}(0)w^{q-1}+\cdots+a_1(0)w$,现需证明以下结论。

1) $g(\xi)$ 零点重数至少为 $k+1$;

2) $Q(g^{(k)}(\xi))=a(0)\Rightarrow g(\xi)=0$;

3) $Q(g^{(k)}(\xi))\ne b(0)$。

结论1)是显然的,下证结论2)。令 $L(f)=P(f^{(k)})+H(f,f',\cdots,f^{(k)})$,由 $\gamma_H{}^*>0$ 知

$$\frac{\Gamma_{M_i}}{\gamma_{M_i}}=\frac{n_0+2n_1+\cdots+(k+1)n_k}{n_0+n_1+\cdots+n_k}<k+1$$
$$(i=1,2,\cdots,n)$$

假设存在 ξ_0 使 $Q(g^{(k)}(\xi_0))=a(0)$,则 $g(\xi_0)\ne\infty$。因为

$$L(f_n(z_n+\rho_n\xi))-a(z_n+\rho_n\xi)=$$
$$H(f_n(z_n+\rho_n\xi),\cdots,f_n{}^{(k)}(z_n+\rho_n\xi))+P(f_n{}^{(k)}(z_n+\rho_n\xi))-a(z_n+\rho_n\xi)=(f_n{}^{(k)}(z_n+\rho_n\xi))^q+$$
$$\sum_{i=1}^{q-1}a_i(z_n+\rho_n\xi)(f_n{}^{(k)}(z_n+\rho_n\xi))^i+$$
$$\sum_{i=1}^{m}b_i(z_n+\rho_n\xi)M_i(f_n(z_n+\rho_n\xi),\cdots,f_n{}^{(k)}(z_n+\rho_n\xi))-$$
$$a(z_n+\rho_n\xi)=(g_n{}^{(k)}(\xi))^q+$$
$$a_{q-1}(z_n+\rho_n\xi)(g_n{}^{(k)})^{q-1}+\cdots+a_1(z_n+\rho_n\xi)g_n{}^{(k)}(\xi)+$$
$$\sum_{i=1}^{m}b_i(z_n+\rho_n\xi)\rho_n{}^{(k+1)\gamma_{M_i}-\tau_{Mi}}M_i(g_n(\xi),\cdots,g_n{}^{(k)}(\xi))-$$
$$a(z_n+\rho_n\xi)$$

由 $\frac{\Gamma_{M_i}}{\gamma_{M_i}}<k+1(i=1,2,\cdots,n)$ 知,$\sum_{i=1}^{m}b_i(z_n+\rho_n\xi)\rho_n{}^{(k+1)\gamma_{M_i}-\Gamma_{Mi}}M_i(g_n(\xi),\cdots,g_n{}^{(k)}(\xi))$ 在 δ_0 的某个领域内一致收敛于0,所以在 δ_0 的某个领域内 $L(f_n(z_n+\rho_n\xi))-a(z_n+\rho_n\xi)$ 一致收敛于 $Q(g^{(k)}(\xi))-a(0)$。

$Q(g^{(k)}(\xi))$ 恒不等于 $a(0)$,否则 $g^{(k)}(\xi)\equiv$ 常数,$g(\xi)$ 就是次数为 k 次的多项式,这与 $g(\xi)$ 零点重数至少为 $k+1$ 矛盾。故由 Hurwitz 定理可知,存在 $\xi_n\to\xi_0$,使

$$L(f_n(z_n+\rho_n\xi_n))=a(z_n+\rho_n\xi_n)$$

因为 $L(f)=a(z)\Rightarrow f=0$,所以

$$f_n(z_n+\rho_n\xi_n)=0,$$

$$g(\xi_0)=\lim_{n\to\infty}g_n(\xi_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{f_n(z_n+\rho_n\xi_n)}{\rho_n{}^k}=0,$$ 故结论2)得证。下证结论3)。

同理假设存在 ξ_0,使 $Q(g^{(k)}(\xi_0))=b(0)$,则 $g(\xi_0)\ne\infty$。因为 $Q(g^{(k)}(\xi))$ 恒不等于 $b(0)$,则存在 $\xi_n{}^*\to\xi_0$,使得

$$L(f_n(z_n+\rho_n\xi_n{}^*))=b(z_n+\rho_n\xi_n{}^*)$$

因为 $L(f)=b(z)\Rightarrow f(z)=c(z)$

所以 $f_n(z_n+\rho_n\xi_n{}^*)=c(z_n+\rho_n\xi_n{}^*)$

$$g(\zeta_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{f_n(z_n+\rho_n\zeta_n^{*})}{\rho_n^{k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{c(z_n+\rho_n\zeta_n^{*})}{\rho_n^{k}}=\infty$$

与 $g(\zeta_0)\neq\infty$ 矛盾,故 $Q(g^{(k)}(\zeta))\neq b(0)$,即结论3)得证。

$b(z)\neq 0$,显然 0 不是 $Q(w)-b(0)$ 的根。

由于 $b(0)\neq 0$,$Q(g^{(k)}(\zeta))\neq b(0)$,所以存在非零数 a_1 使 $g^{(k)}(\zeta)\neq a_1$,又因为 $g(\zeta)$ 零点重数至少为 $k+1$,故由引理2可知,g 是有理函数。

如果多项式 $Q(w)-b(0)$ 仅有一个根,则 $Q(w)-b(0)=(w-\alpha_1)^q$,$\alpha_1\neq 0$。因为 $Q(g^{(k)}(\zeta))\neq b(0)$,所以 $g^{(k)}(\zeta)\neq\alpha_1$。由引理3可得

$$g(\zeta)=\frac{(\gamma\zeta+\delta)^{(k+1)}}{\alpha\zeta+\beta},$$

$$g^{(k)}(\zeta)=\alpha_1+\frac{A}{(\alpha\zeta+\beta)^{k+1}}(A\text{ 是非零常数}),$$

$$Q(g^{(k)}(\zeta))-a(0)=(g^{k}(\zeta)-\alpha_1)^q-a(0)-b(0)=\left(\frac{A}{(\alpha z+\beta)^{k+1}}\right)^q-a(0)-b(0)。$$

因为 $a(0)\neq b(0)$,$g(\zeta)$ 零点重数至少为 $k+1$,所以 $\{\zeta\in C:Q(g^{(k)}(\zeta))=a(0)\}$ 有 $(k+1)q$ 个不同的元素。$\{\zeta\in C:g(\zeta)=0\}$ 至多有1个不同的元素. 这与 $Q(g^{(k)}(\zeta))=a(0)\Rightarrow g(\zeta)=0$ 矛盾。

如果多项式 $Q(w)-b(0)$ 至少有两个不同的根,则存在 $b_1,b_2,b_1\neq b_2,b_1b_2\neq 0$ 使 $g^{(k)}(\zeta)\neq b_i$,$i=1,2$。g 是有理函数,则 $g^{(k)}$ 也是有理函数,这与有理函数的 Picard 例外值至多有一个相矛盾,从而 F 在 D 上正规。　　证毕

参考文献:

[1] HAYMAN W. Meromorphic Functions [M]. Oxford:Clareon Press,1964.

[2] YANG L. Value Distribution Theory [M]. Berlin:Springer-Verlag and Science Press,1993.

[3] SCHWICK W. Sharing Values and Normality [J]. Arch Math, 1992,59(3):50-54.

[4] PANG X C,ZALCMAN L. Normality and Shared Values [J]. Arkiv for Mate matik,2000,38(6):171-182.

[5] PANG X C,ZALCMAN L. Normal Families and Shared Values[J]. The Bulletin of the London Mathematical Society,2000,32:325-331.

[6] RERGWEILER W,EREMENKO A. On the Singularities of the Inverse to a Mermorphic Function of Finite Order [J]. Rev Nat Iber,1995,11:355-357.

[7] WANG Y F,FANG M L. Picard Values and Normal Families of Mermorphic Functions with Multiple Zeros [J]. Acta Math Sinica,New Series,1998,14(1):17-26.

[8] 秦春艳,张庆德. 与分担值相关的亚纯函数的正规性[J]. 四川师范大学学报(自然科学版),2006,29(5):530-533.

(责任编辑　游中胜)