双向联想记忆神经网络的全局指数稳定性*

董　彪[1]，吴文权[1]，蒋自国[1]，蒲志林[2]
(1. 阿坝师范高等专科学校 数学系，四川 汶川 623000；2. 四川师范大学 数学与软件学院，四川 成都 610066)

摘　要：在研究双向联想记忆神经网络时，通常都假设输出响应函数是光滑的增函数，但实际应用中遇到的大多数函数都是非光滑函数。因此，本文将双向联想记忆神经网络的输出响应函数连续可微的假设削弱为满足 Lipschitz 条件，通过引入 Lyapunov 函数，利用不等式的方法，证明了双向联想记忆神经网络全局指数稳定性的一个定理。
关键词：神经网络；双向联想记忆神经网络；全局指数稳定；全局指数收敛；Lipschitz 条件
中图分类号：TP183　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2007)02-0039-04

Global Exponential Stability of Bidirectionall Associate Memory in Neural Networks

DONG Biao[1]，*WU Wen-quan*[1]，*JIANG Zi-guo*[1]，*PU Zhi-lin*[2]
(1. Dept. of Mathematics, Aba Teacher's College, Wenchuan Sichuan 623000；
2. College of Mathematics and Software Science, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, China)

Abstract: Bidirectional associate memory neural networks are usually discussed under the assumption that all output response functions are smooth and monotone increasing. However, output response are nonsmooth in most practical applications . In this paper continuous differentiable conditions of output response functions of bidirectional associate memory neural networks are reduced to Lipschitz condition. Global exponential stability of bidirectional associate memory neural networks is shown by a Lapunov functional with method of inequality.
Key words: neural networks; bidirectional associate memory neural networks; global exponential stability; global exponential convergence; Lipschitz condition.

1987 年，B. Kosko[1] 将单层联想记忆神经网络推广到双层双向结构，建立了双向联想记忆网络(BAMN)，由于这类模型在模式分类和模式辨别等实际中具有很大的应用前景，得到许多学者的重视[1-15]。BAMN 网络的容错能力及恢复能力与各平衡态的吸引域密切相关。因此，有必要对该网络进行稳定性分析，其目的是给出判断这些平衡态渐近稳定的条件，确定平衡态的吸引域及其收敛速度，其全局指数稳定性相关的文献并不多见。本文对双向联想记忆神经网络模型的稳定性进行分析，将不再要求激活输出相应函数在定义域上是可微且严格增加，只须输出响应函数满足 Lipschitz 条件，通过引入 Lyapunov 函数，利用不等式方法证明了双向联想记忆神经网络模型全局指数收敛的一个充分性定理，得到该类模型指数稳定性的一个判据。

1　预备知识

考虑如下双向联想记忆神经网络模型

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t}=-a_ix_i(t)+\sum\limits_{j=1}^{m}u_{ij}f_j(y_j(t))+s_i, i=1,2,\cdots,n, t\geq0\\ \dfrac{\mathrm{d}y_j(t)}{\mathrm{d}t}=-b_jy_j(t)+\sum\limits_{i=1}^{n}v_{ji}g_i(x_i(t))+h_j, j=1,2\cdots,m, t\geqslant0\end{cases}\tag{1}$$

a_i, b_j 是正常数，u_{ij}, v_{ji}, s_i, h_j 是常数，$f_j(\cdot)$: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$g_i(\cdot)$: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是非线性的连续函数。上述各量的物理意义参见文献[1-3]，并且赋予系统(1)初始条件

$$\begin{cases}x_i(s)=\varphi_i(s), s\in[-\tau,0], i=1,2,\cdots,n\\ y_j(s)=\Psi_j(s), s\in[-\tau,0], j=1,2,\cdots,m\end{cases}\tag{2}$$

其中 $\varphi(\cdot)\in C([-\tau,0],\mathbf{R}), i=1,2,\cdots,n$，$\Psi_j(\cdot)\in C([-\tau,0),\mathbf{R}), j=1,2,\cdots,m$

令 $u(t)=(u_1(t),u_2(t),\cdots,u_{n+m}(t))^{\mathrm{T}}=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t),y_1(t),y_2(t),\cdots,y_m(t))^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^{n+m}$，

$A=\mathrm{diag}(a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_m)\in\mathbf{R}^{n+m}$，

* 收稿日期：2006-12-26
资助项目：四川省教育厅自然科学科研基金项目(No. 2006c056)
作者简介：董彪(1967-)，男，四川南部人，副教授，研究方向为微分方程定性及稳定性。

$$J_0=(s_1,\cdots,s_n,h_1,\cdots,h_m)^{\mathrm T}\in\mathbf R^{n+m},$$
$$F(u(t))=(f_1(y_1(t)),\cdots,f_m(y_m(t)),$$
$$g_1(x_1(t)),\cdots,g_n(x_n(t)))^{\mathrm T}。$$

$W=\begin{pmatrix}U & 0\\ 0 & V\end{pmatrix}$是$(m+n)\times(m+n)$矩阵,其中$U=(u_{ij})_{n\times m}$,$V=(v_{ji})_{m\times n}$。则(1)式可改写为

$$\frac{\mathrm du(t)}{\mathrm dt}=-Au(t)+WF(u(t))+J_0,t\geq0 \quad (3)$$

记号$U(R_0)=\{u\in\mathbf R^{n+m},[u]^+\leq R_0\in\mathbf R_+^{n+m}\}$,$\partial U(R_0)$表示$U(R_0)$的边界,$d(h,U(R_0),0)$表示拓扑度。$M$-矩阵$B=(u_{ij})_{(n+m)\times(n+m)}$:$a_{ij}\leqslant0,b_{ii}\geq0,(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n+m)$。$W=(w_{ij})_{(n+m)\times(n+m)}$,$W^+=(|w_{ij}|)_{(n+m)\times(n+m)}$,$L=\mathrm{diag}(L_1,\cdots,L_m,P_1,\cdots,P_n\in\mathbf R^{n+m}$,$[u]^+=(|u_1|,|u_2|,\cdots,|u_{n+m}|)^{\mathrm T}$。

定义1 一个函数$g(x)$称为在$\mathbf R$上满足Lipschitz条件的,如果存在一个常数P使得$\forall x_1,x_2\in\mathbf R$,有$|g(x_1)-g(x_2)|\leqslant P|x_1-x_2|$称常数$P$是函数$g(x)$的Lipschitz常数,如果

$$P=\inf\{\partial\in\mathbf R^+:|g(x_1)-g(x_2)|\leqslant \partial|x_1-x_2|,\forall x_1,x_2\in\mathbf R\}$$

定理1 如果系统(3)满足下列条件

1) $|f_j(u_1)-f_j(u_2)|\leq L_j|u_1-u_2|$,$(\forall u_1,u_2\in\mathbf R,j=1,2,\cdots,m)$;$|g_i(v_1)-g_i(v_2)|\leq P_i|u_1-u_2|$,$(\forall v_1,v_2\in\mathbf R,i=1,2,\cdots,n)$;

2) $C=A-W^+L$是M-矩阵;

则系统(3)存在平衡点u^*。

证明 由条件1)知,$f_j(u)$,$g_i(u)$在$\mathbf R$上连续,并且$|f_j(u)|\leq L_j|u|+|f_j(0)|$,$|g_i(u)|\leq P_i|u|+|g_i(0)|$,$j=1,2,\cdots,m$;$i=1,2,\cdots,n$。

显然,求(3)式的平衡点u^*等价于求方程$h(u,J_0)\triangleq Au(t)-WF(u)-J_0=0$的根。

考虑同伦映射:$H(u,\lambda)=\lambda h(u,J_0)+(1-\lambda)u$ $(\lambda\in J[0,1])$。下证:存在$R_0\in\mathbf R_+^{n+m}$,使得$\forall\lambda\in J$,$H(u,\lambda)$在$U(R_0)$的边界$\partial U(R_0)$上不为零。事实上,令$H_i(u,\lambda)$是$H(u,\lambda)$的第i个分量。即当$i=1,2,\cdots,n$时,有

$$H_i(u,\lambda)=\lambda[a_ix_i(t)-\sum_{j=1}^m u_{ij}f_j(y_j)-s_i]+(1-\lambda)x_i$$

由条件1),得

$$|H_i(u,\lambda)|=|\lambda[a_ix_i(t)-(\sum_{j=1}^m u_{ij}f_j(y_j)-s_i)]+(1-\lambda)x_i|\geq[1+\lambda(a_i-1)]|x_i|-\lambda(\sum_{j=1}^m|u_{ij}||f_j(y_j)|+|s_i|)\geq[1+\lambda(a_i-1)]|x_i|-\lambda\sum_{j=1}^m|u_{ij}|L_j|y_j|-\lambda(|s_i|+\sum_{j=1}^m|u_{ij}||f_j(0)|),$$

当$i=n+1,n+2,\cdots,n+m$时,即$j=1,2,\cdots,m$。同理有

$$|H_j(u,\lambda)|=|\lambda[b_jy_j(t)-(\sum_{i=1}^n v_{ji}g_i(x_i)-h_j)]+(1-\lambda)y_j|\geq[1+\lambda(b_j-1)]|y_j|-\lambda\sum_{i=1}^n|v_{ji}|p_i|x_i|-\lambda(|h_j|+\sum_{i=1}^n|u_{ji}||g_i(0)|)$$

即$H^+\geq[E+\lambda(A-E)][u]^+-\lambda W^+L[u]^+-\lambda(J_0^++W^+F^+(0))=(1-\lambda)[u]^++\lambda[(A-W^+L)[u]^+-(J_0^++W^+F^+(0))]$。

因为$C=A-W^+L$是M-矩阵,所以[4],$(A-W^+L)^{-1}\geq0$且存在$Q=(Q_1,Q_2,\cdots,Q_{n+m})^{\mathrm T}$,$Q_i\geq0$,$(i=1,2,\cdots,n+m)$,使得$(A-W^+L)Q>0$,取$U(R_0)=\{u:[u]^+\leq R_0\triangleq Q+(A-W^+L)^{-1}(J_0^{-1}+W^+F^+(0))\}$,则$U(R_0)$非空,且当$u\in\partial U(R_0)$时,$H^+\geq(1-\lambda)[u]^++\lambda[(A-W^+L)[[u]^+-(A-W^+L)^{-1}(J_0^++W^+F^+(0))]=(1-\lambda)[u]^++\lambda(A-W^+L)Q>0$,$(\lambda\in[0,1])$。即在$\partial U(R_0)$上,对一切的$\lambda\in[0,1]$,均有$H(u,\lambda)\neq0$。根据同伦不变性[5-6],得到

$$d(h,U(R_0),0)=d(H(u,\lambda),U(R_0),0)=d(H(u,0),U(R_0),0)=1。$$

由拓扑度理论知[5],$h(u,J_0)=0$在$U(R_0)$内至少存在一个根,即系统(3)的平衡点u^*存在。

设$x^*(t)=(x_1^*(t),x_2^*(t),\cdots,x_n^*(t))^{\mathrm T}\in\mathbf R^n$,
$y^*(t)=(y_1^*(t),y_2^*(t),\cdots,y_m^*(t))^{\mathrm T}\in\mathbf R^m$
是系统(1)的一个平衡态,即

$$\begin{cases}-a_ix_i^*(t)+\sum_{j=1}^m u_{ij}f_j(y_j^*))+s_i=0,\ i=1,2,\cdots,n\\ -b_jy_j^*(t)+\sum_{i=1}^n v_{ji}g_i(x_i^*))+h_j=0,\ j=1,2,\cdots,m,t\geq0\end{cases} \quad (4)$$

证毕

定义2[7-8] 设$u^*(t)=(u_1^*(t),u_2^*(t),\cdots,u_{n+m}^*(t))=(x_1^*(t),x_2^*(t),\cdots,x_n^*(t),y_1^*(t),\cdots,y_m^*(t))^{\mathrm T}\in\mathbf R^{n+m}$是系统(3)一个特解,系统(3)被称为全局指数收敛于$u^*(t)$的,如果存在常数$\partial>0$和$M\geq1$,使得它的任一个解$u(t)=(u_1(t),u_2(t),\cdots,u_{n+m}(t))^{\mathrm T}=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t),y_1(t),y_2(t),\cdots,y_m(t))^{\mathrm T}\in\mathbf R^{n+m}$,当$t\geq0$时,恒有

$$\|u(t)-u^*(t)\|\leq M\|u(0)-u^*(0)\|\mathrm e^{-\partial t} \quad (5)$$

其中$\|u(t)-u^*(t)\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n+m}(u_i(t)-u_i^*(t))^2}$。

系统(3)的一个平衡点 $u^*(t)=(u_1^*(t),u_2^*(t),\cdots,u_{n+m}^*(t))$ 称为是全局指数稳定的,如果该系统全局指数收敛于 $u^*(t)$ 的。

2　主要结果及证明

定理 2　设系统(3)满足

1) $g_i(\cdot):\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是满足 Lipschitz 条件,且 Lipschitz 常数是 $P_i(i=1,2,\cdots,n)$;

2) $f_j(\cdot):\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是全局 Lipschitz 连续,且 Lipschitz 常数是 $L_j(j=1,2,\cdots,m)$;

3) $$\sum_{j=1}^{m}(|v_{ji}|P_i+|u_{ij}|L_j)<2a_i,i=1,2,\cdots,n \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(|v_{ji}|P_i+|u_{ij}|L_j)<2b_j,j=1,2,\cdots,m \tag{7}$$

则存在两个常数 $\varepsilon>0$ 和 $M\geq 1$,使得系统(3)的任何一对解 $u(t)$ 和 $v(t)$,对 $\forall t\geq 0$ 时,$\|u(t)-v(t)\|\leq M\|u(0)-v(0)\|e^{-2\varepsilon t}$。

证明　根据(6)式、(7)式,可取到充分小的 $\varepsilon>0$,使得对于每个 i、$j(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$ 有

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}(|v_{ji}|P_i+|u_{ij}|L_j)<a_i-\varepsilon,$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(|v_{ji}|P_i+|u_{ij}|L_j)<b_j-\varepsilon$$

设 $u(t)=(u_1(t),u_2(t),\cdots,u_{n+m}(t))^{\mathrm{T}}=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t),y_1(t),y_2(t),\cdots,y_m(t))^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^{n+m}$,

$v(t)=(v_1(t),v_2(t),\cdots,v_{n+m}(t))^{\mathrm{T}}=(x_1{}^0(t),x_2{}^0(t),\cdots,x_n{}^0(t),y_1{}^0(t),y_2{}^0(t),\cdots,y_m{}^0(t))^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^{n+m}$

是系统(3)的任意一对解,则对每个 $i(i=1,2,...,n+m)$ 有

$$(u_i(t)-v(t))'=-a_i(u_i(t)-v_i(t))+\sum_{j=1}^{m+n}w_{ij}(F_i(u_i(t))-F_i(v_i(t)))=$$
$$\sum_{i=1}^{n}[-a_i(x_i(t)-x_i^0(t))+\sum_{j=1}^{m}u_{ij}(f_j(y_j(t))-f_j(y_j^0(t)))]+$$
$$\sum_{j=1}^{m}[-b_j(y_j(t)-y_j^0(t))+\sum_{i=1}^{n}v_{ji}(g_i(x_i(t))-g_i(x_i^0(t)))]。$$

现在作Lyapunov函数:$W(t)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m+n}(u_i(t)-v_i(t))^2e^{2\varepsilon t}$,则对于 $\forall t\geq 0$ 时,有

$$\left.\frac{\mathrm{d}W(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{u(t)-v(t)}=e^{2\varepsilon t}\sum_{i=1}^{n+m}[(u_i(t)-v_i(t))(u_i(t)-v_i(t))'+$$
$$\varepsilon(u_i(t)-v_i(t))^2]=e^{2\varepsilon t}\{\sum_{i=1}^{n}[(x_i(t)-x_i^0(t))(x_i(t)-x_i^0(t))'+$$
$$\varepsilon(x_i(t)-x_i^0(t))^2]+\sum_{j=1}^{m}[(y_j(t)-y_j^0(t))(y_j(t)-y_j^0(t))'+$$
$$\varepsilon(y_j(t)-y_j^0(t))^2]\}=e^{2\varepsilon t}\{\sum_{i=1}^{n}[(x_i(t)-x_i^0(t))(-a_i(x_i(t)-$$
$$x_i^0(t))+\sum_{j=1}^{m}u_{ij}(f_j(y_j(t))-f_j(y_j^0(t))))+$$
$$\varepsilon(x_i(t)-x_i^0(t))^2]+\sum_{j=1}^{m}[y_j(t)-y_j^0(t))(-b_j(y_j(t)-$$
$$y_j^0(t))+\sum_{i=1}^{n}v_{ji}(g_i(x_i(t))-g_i(x_i^0(t))))+\varepsilon(y_j(t)-y_j^0(t))^2]\}\leq$$
$$e^{2\varepsilon t}\{\sum_{i=1}^{n}[-(a_i-\varepsilon)(x_i(t)-x_i^0(t))^2]+$$
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}|u_{ij}\|x_i(t)-x_i^0(t)\|f_j(y_j(t))-f_j(y_j^0(t))|+$$
$$\sum_{j=1}^{m}[-(b_j-\varepsilon)(y_j(t)-y_j^0(t))^2]+$$
$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}|v_{ji}\|y_j(t)-y_j^0(t)\|g_i(x_i(t))-g_i(x_i^0(t))|\}\leq$$
$$e^{2\varepsilon t}\{\sum_{i=1}^{n}[-(a_i-\varepsilon)(x_i(t)-x_i^0(t))^2]+$$
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}|u_{ij}|L_j|x_i(t)-x_i^0(t)||y_j(t)-y_j^0(t))|+$$
$$\sum_{j=1}^{m}[-(b_j-\varepsilon)(y_j(t)-y_j^0(t))^2]+$$
$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}|v_{ji}|P_i|y_j(t)-y_j^0(t)||x_i(t)-x_i^0(t)|\}\leq$$
$$e^{2\varepsilon t}\{\sum_{i=1}^{n}[-(a_i-\varepsilon)(x_i(t)-x_i^0(t))^2]+$$
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}|u_{ij}|L_j\frac{(x_i(t)-x_i{}^0(t))^2+(y_j(t)-y_j^0(t))^2}{2}+$$
$$\sum_{j=1}^{m}[-(b_j-\varepsilon)(y_j(t)-y_j^0(t))^2]+$$
$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}|v_{ji}|P_i\frac{(x_i(t)-x_i^0(t))^2+(y_j(t)-y_j^0(t))^2}{2}\}\leq$$
$$-e^{2\varepsilon t}\{\sum_{i=1}^{n}[(a_i-\varepsilon-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}(|v_{ji}|P_i+|u_{ij}|L_j))(x_i(t)-x_i^0(t))^2]+$$
$$\sum_{j=1}^{m}[(b_j-\varepsilon-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(|u_{ij}|L_j+|v_{ji}|P_i))(y_j(t)-y_j^0(t))^2]\leq 0,$$

即 $W(t)$ 在无穷区间 $[0,+\infty)$ 上是单调递减的,从而

$$\frac{1}{2}\|u(t)-u^*(t)\|^2e^{2\varepsilon t}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m+n}(u_i(t)-v_i(t))^2e^{2\varepsilon t}=$$
$$W(t)\leqslant W(0)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m+n}(u_i(0)-v_i(0))^2=$$
$$\frac{1}{2}\|u(0)-u^*(0)\|^2。$$

取 $M=1$,则

$$\|u(t)-u^*(t)\|\leq M\|u(0)-u^*(0)\|e^{-2\varepsilon t}。$$

证毕

由定理 2 和(5)式可直接推得下一定理。

定理 3　设系统(1)满足

1) $g_i(\cdot):\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是满足 Lipschitz 条件,且 Lipschitz 常数是 $K_i(i=1,2,\cdots,n)$;

2) $f_j(\cdot):\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是全局 Lipschitz 连续,且 Lipschitz 常数是 $L_j(j=1,2,\cdots,m)$;

3) $\sum_{j=1}^{m}(|v_{ji}|P_i+|u_{ij}|L_j)<2a_i$, $i=1,2,\cdots,n$ (6)

$$\sum_{i=1}^{n}(|v_{ji}|P_i+|u_{ij}|L_j)<2b_j,\ j=1,2,\cdots,m \quad (7)$$

则系统(3)的平衡点 $u=u^*$ 是全局指数稳定的。

参考文献:

[1] KOSKO B. Adaptive, Bidirectional Associate Memories [J]. Appl Opt, 1987, 26(2): 4947-4960.

[2] GOPALSAMY K, HE X Z. Delay-indepent Stability in Bidirectional Associative, Memory Networks [J]. IEEE Trans Neural Net, 1994, 5(5): 998-1002.

[3] LIAO X F, YU J B. Qualitative Analysis of Bidirectional Associate Memory Networks with Time Delay [J]. Int J C irc Theor APPL, 1988, 26(2): 219-229.

[4] 廖晓晰. 动力系统的稳定性理论和应用[M]. 北京:国防工业出版社, 2000.

[5] 胡适耕. 非线性分析理论与方法[M]. 武汉:华中理工大学出版社, 1996.

[6] 沈轶, 廖晓昕. 广义的时滞细胞神经网络的动态分析[J]. 电子学报, 1999, 27(10): 62-64.

[7] ZHANG Qiang, WEI Xiaopeng, XU Jin. Global Exponential Stability of Hopfield Neural Networks with Continuously Distributed Delays [J]. Physics Letters A, 2003, 315: 431-436.

[8] 张继业, 戴换云, 邬平波. Hopfiled 神经网络系统的全局稳定性分析[J]. 控制理论与应用, 2003, 20(2): 180-184.

[9] 文武. 具有时滞的广义细胞神经网络的稳定性分析[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2004, 27(4): 364-367.

[10] 王利生, 谈正, 张志平. 连续双向联想记忆网络局部指数吸引性稳定的充要条件[J]. 电子学报, 1997, 27(7): 119-121.

[11] 周小平. 含时延的双向联想记忆网络的指数吸引性分析[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2005, 28(4): 386-390.

[12] 王林山, 徐道义. Hopfield 型时滞神经网络的稳定性分析[J]. 应用数学和力学, 2002, 23(1): 59-64.

[13] 陈光淦, 蒲志林, 张健. 变时滞 Hopfield 神经网络模型的全局指数稳定性和全局吸引性[J]. 工程数学学报, 2005, 22(5): 821-826.

[14] 张百灵, 徐秉铮, 邝重平. 连续双向联想记忆网络模型的稳定性分析[J]. 电子学报, 1995, 23(1): 60-66.

[15] 韩仲明. Hopfield 型时滞神经网络模型的 K-稳定性[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2003, 26(1)1: 49-53.

(责任编辑 游中胜)