非光滑函数的半严格拟不变凸性*

刘 彩 平[1,2]
(1. 重庆师范大学 数学与计算机科学学院,重庆 400047;2. 齐齐哈尔大学 数学系,黑龙江 齐齐哈尔 161006)

摘 要:在 Banach 空间中定义了一种新的广义凸函数——半严格拟不变凸函数。举例说明了半严格拟不变凸函数是比拟不变凸函数和伪不变凸函数更为广泛的一类广义凸函数。对于非光滑的半严格拟不变凸函数,讨论了它的 Clarke 广义次微分性质。讨论了半严格拟不变凸函数与拟不变凸函数之间的关系。此外,在这篇文章里,还给出了半严格拟不变凸函数的两个基本性质。本文的结果扩充了无限维空间中的凸性理论。

关键词:半严格拟不变凸函数;拟不变凸函数;伪不变凸函数;非光滑
中图分类号:O221.2　　文献标识码:A　　文章编号:1672-6693(2007)03-0001-03

Semistrictly Quasi-Invexity of Nonsmooth Functions

LIU Cai-ping[1,2]
(1. College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047;
2. Dept. of Mathematics, Qiqihar University, Qiqihar Heilongjiang 161006, China)

Abstract: In this paper a new class of generalized convex functions in Banach Space, termed as semistrictly quasi-invex functions, is introduced. We give examples to illustrate that semistrictly quasi-invex functions are more wider than quasi-invex functions and pseudo-invex functions. The properties of nonsmooth semistrictly quasi-invex functions for corresponding Clarke's subdifferential are discussed. In particular, the relationships are investigated between semistrictly quasi-invex functions and quasi-invex functions. Moreover, two basic properties of semistrictly quasi-invex functions are given. Our results extend the theory of generalized convexity in infinite dimension space.

Key words: semistrictly quasi-invex functions; quasi-invex functions; pseudo-invex functions; nonsmooth

1979 年 Bazaraa 和 Shetty 在文献[1]中介绍了 n 维欧氏空间中函数的拟凸性,半严格拟凸性(文献[1]中称为严格拟凸)与严格拟凸性(文献[1]中称为强拟凸),讨论了它们之间的关系,得到了在可微条件下拟凸函数的梯度性质;1990 年 Karamardian 和 Schaible 在文献[2]中对于 n 维欧氏空间中可微的拟凸函数,建立了拟凸函数与其梯度拟单调性间的关系,从而可以通过梯度的拟单调性来研究拟凸函数;1997 年 Penot 和 Quang 在文献[3]中将 n 维欧氏空间推广到 Banach 空间,将可微函数推广到不可微函数,通过函数的 Clarke-Rockafeller 次微分的拟单调性给出了拟凸函数的次微分性质;接下来,1999 年 Daniilidis 和 Hadjisavvas 在文献[4]中定义了集值映射的半严格拟单调概念,得到了在局部 Lipschitz 条件下,函数的半严格拟凸性等价于它的 Clarke-广义次微分是半严格拟单调的。

另一方面,人们将凸性和广义凸性推广到不变凸性和广义不变凸性,得到了许多很有意义的结果[5-12]。1995 年 Mohan 和 Neogy 在文献[5]中讨论了不变凸集和不变凸函数,定义了条件 C,证明了在条件 C 下不变凸函数是预不变凸函数;接下来 Yang 等又于 2001 年在文献[6]中给出了 n 维欧氏空间中两类新的广义凸函数——严格预拟不变凸函数和半严格预拟不变凸函数,讨论了它们与预拟不变凸函数之间的关系,并将其应用到优化问题中;2006 年 Jabarootian 和 Zafarani 在文献[7]中提出了 Banach

* 收稿日期:2007-01-16
资助项目:国家自然科学基金(No. 10471159)
作者简介:刘彩平(1974-),女,黑龙江齐齐哈尔人,讲师,硕士研究生,研究方向为最优化理论与算法。

空间中拟不变凸函数与拟不变单调概念,讨论了二者关系。受这些文献的启发,基于凸性和广义凸性在数学规划和最优化理论中的重要地位,本文在Banach空间中定义了一种新的广义凸函数——半严格拟不变凸函数,得到了在局部Lipschitz条件下它的Clarke-广义次微分性质,讨论了半严格拟不变凸函数与拟不变凸函数间的关系。举例说明了半严格拟不变凸函数是比拟不变凸函数和伪不变凸函数更为广泛的一类广义凸函数。

1 预备知识

设X是实Banach空间,定义了范数$\|\cdot\|$,X^*是其对偶空间,范数记为$\|\cdot\|_*$,$\langle\cdot,\cdot\rangle$表示$X$与$X^*$的对偶积,$\eta$: $X\times X\to X$是向量值函数,f: $X\to\mathbf{R}$是不可微实值函数。

定义1[7,9] 设f是X上的局部Lipschitz函数,v是X中的任意向量,f在x沿方向v的Clarke广义方向导数记为$f^0(x;v)$,定义为

$$f^0(x;v)=\limsup_{y\to x,\,t\downarrow 0}\frac{f(y+tv)-f(y)}{t}$$

定义2[7,9] 设f是X上的局部Lipschitz函数,v是X中的任意向量,f在x的Clarke广义次微分记为$\partial^c f(x)$,定义如下

$$\partial^c f(x)=\{\xi\in X^*:\ f^0(x;v)\geq\langle\xi,v\rangle,\forall v\in X\}$$

定义3[5] K是X的子集,称K是关于η: $X\times X\to X$的不变凸集,若$\forall x,y\in K$,$\forall\lambda\in(0,1)$,有$y+\lambda\eta(x,y)\in K$。

定义4[7] 设f是X上的局部Lipschitz函数,称f: $X\to\mathbf{R}$是K上关于η的拟不变凸函数,若$\forall x,y\in K$,$\forall\xi\in\partial^c f(x)$,有

$$f(y)\leq f(x)\Rightarrow\langle\xi,\eta(y,x)\rangle\leq 0$$

定义5[7] 设f是X上的局部Lipschitz函数,称f: $X\to\mathbf{R}$是K上关于η的伪不变凸函数,若$\forall x,y\in K$,$\forall\xi\in\partial^c f(x)$,有

$$f(y)<f(x)\Rightarrow\langle\xi,\eta(y,x)\rangle<0$$

条件C[5] 设η: $X\times X\to X$,则$\forall x,y\in X$,$\forall\lambda\in[0,1]$,有

$$\eta(y,y+\lambda\eta(x,y))=-\lambda\eta(x,y);$$
$$\eta(x,y+\lambda\eta(x,y))=(1-\lambda)\eta(x,y)。$$

引理1[8] 若η: $X\times X\to X$满足条件C,则$\eta(y+\lambda\eta(x,y),y)=\lambda\eta(x,y)$。

引理2[7] (中值定理)设$x,y\in X$,f在含有$[x,y]$的非空闭凸集的每一点是Lipschitz连续,则存在$u\in(x,y)$,使得 $f(x)-f(y)\in\langle\partial^c f(u),x-y\rangle$

2 主要结果

在下面的讨论中,假设X是实Banach空间,$K\subset X$是关于η的不变凸集,η: $X\times X\to X$是向量值函数,f: $X\to\mathbf{R}$是不可微实值函数。

定义6 设f是X上的局部Lipschitz函数,称f: $X\to\mathbf{R}$是K上关于η的半严格拟不变凸函数,若$\forall x,y\in K$,$\forall\xi\in\partial^c f(x)$,有

$$f(y)<f(x)\Rightarrow\langle\xi,\eta(y,x)\rangle\leq 0$$

根据定义,显然有拟不变凸函数是半严格拟不变凸函数,伪不变凸函数也是半严格拟不变凸函数但反之不然。

例 设 $f(x)=\begin{cases}-|x|,|x|\leq 1\\-1,|x|\geq 1\end{cases}$,$x\in\mathbf{R}$,

$$\eta(y,x)=\begin{cases}y-x,x\in(0,1)\cup(1,+\infty),y\geq 0\\-(x+y),x\in(0,1)\cup(1,+\infty),y\leq 0\\x-y,x=1,y\in\mathbf{R}\\x+y,x=-1,y\in\mathbf{R}\\-(x+y),x\in(-\infty,-1)\cup(-1,0),y\geq 0\\y-x,x\in(-\infty,-1)\cup(-1,0),y\leq 0\\0,x=0\end{cases}$$

则f在$\mathbf{R}$上关于η是半严格拟不变凸函数,但关于同一η不是拟不变凸函数,因为令$x=1$,$y=2$,有$f(x)=f(1)=-1=f(2)=f(y)$,$\partial^c f(1)=[-1,0]$,$\exists\xi=-\frac{1}{2}\in\partial^c f(x)$,使得

$$\langle\xi,\eta(y,x)\rangle=\langle\xi,x-y\rangle=\langle-\frac{1}{2},-1\rangle=\frac{1}{2}>0$$

而且f在$\mathbf{R}$上关于同一η也不是伪不变凸函数,因为令$x=0$,$y=2$,则

$$f(y)=f(2)=-1<0=f(0)=f(x)$$
$$\partial^c f(0)=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$$

但是$\forall\xi\in\partial^c f(0)$,使得$\langle\xi,\eta(y,x)\rangle=\langle\xi,0\rangle=0$。

这说明半严格拟不变凸函数是比拟不变凸函数和伪不变凸函数更为广泛的一类广义凸函数。

定理1 设f是K上的局部Lipschitz函数,关于η是半严格拟不变凸函数。则$\forall x,y\in K$,$f(x)\neq f(y)$,$\forall\xi\in\partial^c f(y)$,$\forall\xi\in\partial^c f(x)$,有$\langle\xi,\eta(x,y)\rangle>0\Rightarrow\langle\xi,\eta(y,x)\rangle\leq 0$。若$\eta$还满足条件$C$,且$\eta(x,y)+\eta(y,x)=0$,则

$$\exists z\in\{y+\lambda\eta(x,y)\mid\lambda\in(0,1)\},\exists w\in\partial^c f(z),使得$$
$$\langle\xi,\eta(x,y)\rangle>0\Rightarrow\langle w,\eta(y,x)\rangle<0$$

证明 $\forall x,y\in K$,$f(x)\neq f(y)$,$\forall\xi\in\partial^c f(y)$,若

$$\langle\xi,\eta(x,y)\rangle>0 \tag{1}$$

因为 f 是半严格拟不变凸函数，根据定义 6 得 $f(y)<f(x)$，再根据 f 的半严格拟不变凸性得

$$\langle\zeta,\eta(y,x)\rangle\leq 0,\forall\zeta\in\partial^{c}f(x)\qquad(2)$$

则有 (1)$\Rightarrow$(2)。另一方面，根据(1)式及 η 满足条件 C 得

$$\langle\xi,\eta(y+\lambda\eta(x,y),y)\rangle>0,\forall\lambda\in(0,1)$$

从而根据 f 的半严格拟不变凸性得

$$f(y+\lambda\eta(x,y))\geq f(y),\forall\lambda\in(0,1)$$

且 $\exists\hat{\lambda}\in(0,1)$，使得 $f(y+\hat{\lambda}\eta(x,y))>f(y)$。

事实上，若 $\forall\lambda\in(0,1)$，有

$$f(y+\lambda\eta(x,y))=f(y)$$

则 $f^{0}(y;\eta(x,y))=0$，从而

$$\forall\xi\in\partial^{c}f(y),\langle\xi,\eta(x,y)\rangle\leq f^{0}(y;\eta(x,y))=0$$

与(1)式矛盾。故根据中值定理得

$$\exists\bar{\lambda}\in(0,\hat{\lambda}),\bar{z}=y+\bar{\lambda}\eta(x,y),\exists\bar{w}\in\partial^{c}f(\bar{z}),\text{有}$$

$$f(y+\hat{\lambda}\eta(x,y))-f(y)=\langle\bar{w},\hat{\lambda}\eta(x,y)\rangle>0$$

又因为 $\eta(x,y)+\eta(y,x)=0$，于是得

$$\langle\bar{w},\eta(y,x)\rangle<0。$$

证毕

定理 2　设 f 是 K 上的局部 Lipschitz 函数，关于 η 是半严格拟不变凸函数，若 η 满足条件 C，则 f 在 K 上关于同一 η 是拟不变凸函数。

证明　$\forall x,y\in K$，不妨设 $f(x)\leq f(y)$，因 f 是半严格拟不变凸函数，有

$$f(x)<f(y)\Rightarrow\langle\xi,\eta(x,y)\rangle\leq 0,\forall\xi\in\partial^{c}f(y)$$

欲证 f 在 K 上关于同一 η 是拟不变凸函数，只需证明

$$f(x)=f(y)\Rightarrow\langle\xi,\eta(x,y)\rangle\leq 0,\forall\xi\in\partial^{c}f(y)$$

即可。下面考虑 $f(x)$ 与 $f(y+\eta(x,y))$。

1) 若 $f(y+\eta(x,y))<f(x)$

根据 f 是半严格拟不变凸函数，且 $f(x)=f(y)$，得　$\langle\xi,\eta(y+\eta(x,y),y)\rangle\leq 0,\ \forall\xi\in\partial^{c}f(y)$

根据引理 1 有 $\langle\xi,\eta(x,y)\rangle\leq 0,\ \forall\xi\in\partial^{c}f(y)$。

2) 若 $f(y+\eta(x,y))=f(x)$

a) 若 $\forall\lambda\in[0,1]$，有

$$f(y+\lambda\eta(x,y))=f(x)=f(y)$$

则根据 Clarke 广义次微分定义和 f 的连续性得

$$\langle\xi,\eta(x,y)\rangle\leq\limsup_{z\to y,\,t\downarrow 0}\frac{f(z+t\eta(x,y))-f(z)}{t}=\limsup_{z\to y,\,t\downarrow 0}\frac{f(y+t\eta(x,y))-f(y)}{t}=0$$

于是有 $\langle\xi,\eta(x,y)\rangle\leq 0,\forall\xi\in\partial^{c}f(y)$。

b) 若 $\exists\bar{\lambda}\in(0,1)$，使得 $f(y+\bar{\lambda}\eta(x,y))\neq f(y)$

i) $f(y+\bar{\lambda}\eta(x,y))<f(y)$，根据 f 是半严格拟不变凸函数得

$$\langle\xi,\eta(y+\bar{\lambda}\eta(x,y),y)\rangle\leq 0,\ \forall\xi\in\partial^{c}f(y)$$

根据引理 1 有 $\langle\xi,\eta(x,y)\rangle\leq 0,\forall\xi\in\partial^{c}f(y)$。

ii) $f(y+\bar{\lambda}\eta(x,y))>f(y)$，根据中值定理，有 $\exists\lambda_1\in(0,\bar{\lambda}),z_1=y+\lambda_1\eta(x,y),\exists w_1\in\partial^{c}f(z_1)$，使得　$f(y+\bar{\lambda}\eta(x,y))-f(y)=\bar{\lambda}\langle w_1,\eta(x,y)\rangle$

从而有 $\langle w_1,\eta(x,y)\rangle>0$，根据 η 满足条件 C 得

$$\langle w_1,\eta(x,y+\lambda_1\eta(x,y))\rangle>0$$

再根据 f 是半严格拟不变凸函数，有

$$f(x)\geq f(y+\lambda_1\eta(x,y))$$

从而 $f(y)\geq f(y+\lambda_1\eta(x,y))$。

若 $f(y)>f(y+\lambda_1\eta(x,y))$，则与 i) 同理证得

$$\langle\xi,\eta(x,y)\rangle\leq 0,\forall\xi\in\partial^{c}f(y)。$$

若 $f(y)=f(y+\lambda_1\eta(x,y))$，则与情况 2) 同理进行证明，若为情况 a) 或 b) 中的 i)，则结论得证。否则，继续前面的过程，最终得一个常值函数列

$$\{f(y+\lambda_n\eta(x,y)\mid\lambda_n\in\Lambda\}$$

其中

$$\Lambda=\{\lambda_n\mid\lambda_n\in(0,1),0<\cdots<\lambda_n<\lambda_{n-1}<\cdots\lambda_1<1,\ n\text{ 是自然数},f(y)=f(y+\lambda_n\eta(x,y))\}$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=0$。故根据 f 的连续性得

$$\limsup_{z\to y,\,t\downarrow 0}\frac{f(z+t\eta(x,y))-f(z)}{t}=\limsup_{z\to y,\lambda_n\downarrow 0}\frac{f(z+\lambda_n\eta(x,y))-f(z)}{\lambda_n}=\limsup_{z\to y,\lambda_n\downarrow 0}\frac{f(y+\lambda_n\eta(x,y))-f(y)}{\lambda_n}=0$$

再根据 Clacke 广义次微分的定义，有 $\langle\xi,\eta(x,y)\rangle\leq 0,\forall\xi\in\partial^{c}f(y)$。

3) 若 $f(y+\eta(x,y))>f(x)$

此时与情况 2) 中的 b) 中的 ii) 同理可得

$$\langle\xi,\eta(x,y)\rangle\leq 0,\forall\xi\in\partial^{c}f(y)$$

综上证得　$\forall x,y\in K,\forall\xi\in\partial^{c}f(y)$，

$$f(x)\leq f(y)\Rightarrow\langle\xi,\eta(x,y)\rangle\leq 0$$

根据定义 4 知 f 在 K 上关于同一 η 是拟不变凸函数。

证毕

根据半严格拟不变凸函数的定义及 Clacke 广义次微分的定义，易得下面的两个定理。

定理 3　设 f 是 k 上的局部 Lipschitz 函数，关于 η 是半严格拟不变凸函数，c 是任意常数，则 $f+c$ 在 K 上关于同一 η 也是半严格拟不变凸函数。

定理 4　设 f 是 k 上的局部 Lipschitz 函数，关于 η 是半严格拟不变凸函数，c 是任意正常数，则 cf 在 K 上关于同一 η 也是半严格拟不变凸函数。

（下转第 16 页）

非光滑函数的半严格拟不变凸性*

刘 彩 平[1,2]

(1. 重庆师范大学 数学与计算机科学学院, 重庆 400047 ;2. 齐齐哈尔大学 数学系, 黑龙江 齐齐哈尔 161006)

摘 要:在 Banach 空间中定义了一种新的广义凸函数——半严格拟不变凸函数。举例说明了半严格拟不变凸函数是比拟不变凸函数和伪不变凸函数更为广泛的一类广义凸函数。对于非光滑的半严格拟不变凸函数,讨论了它的 Clarke 广义次微分性质。讨论了半严格拟不变凸函数与拟不变凸函数之间的关系。此外,在这篇文章里,还给出了半严格拟不变凸函数的两个基本性质。本文的结果扩充了无限维空间中的凸性理论。

关键词:半严格拟不变凸函数;拟不变凸函数;伪不变凸函数;非光滑

中图分类号:O221.2 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-6693(2007)03-0001-03

Semistrictly Quasi-Invexity of Nonsmooth Functions

LIU Cai-ping[1,2]

(1. College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047 ;
2. Dept. of Mathematics, Qiqihar University, Qiqihar Heilongjiang 161006, China)

Abstract: In this paper a new class of generalized convex functions in Banach Space, termed as semistrictly quasi-invex functions, is introduced. We give examples to illustrate that semistrictly quasi-invex functions are more wider than quasi-invex functions and pseudo-invex functions. The properties of nonsmooth semistrictly quasi-invex functions for corresponding Clarke's subdifferential are discussed. In particular, the relationships are investigated between semistrictly quasi-invex functions and quasi-invex functions. Moreover, two basic properties of semistrictly quasi-invex functions are given. Our results extend the theory of generalized convexity in infinite dimension space.

Key words: semistrictly quasi-invex functions; quasi-invex functions; pseudo-invex functions; nonsmooth

1979 年 Bazaraa 和 Shetty 在文献[1]中介绍了 n 维欧氏空间中函数的拟凸性,半严格拟凸性(文献[1]中称为严格拟凸)与严格拟凸性(文献[1]中称为强拟凸),讨论了它们之间的关系,得到了在可微条件下拟凸函数的梯度性质;1990 年 Karamardian 和 Schaible 在文献[2]中对于 n 维欧氏空间中可微的拟凸函数,建立了拟凸函数与其梯度拟单调性间的关系,从而可以通过梯度的拟单调性来研究拟凸函数;1997 年 Penot 和 Quang 在文献[3]中将 n 维欧氏空间推广到 Banach 空间,将可微函数推广到不可微函数,通过函数的 Clarke-Rockafeller 次微分的拟单调性给出了拟凸函数的次微分性质;接下来,1999 年 Daniilidis 和 Hadjisavvas 在文献[4]中定义了集值映射的半严格拟单调概念,得到了在局部 Lipschitz 条件下,函数的半严格拟凸性等价于它的 Clarke-广义次微分是半严格拟单调的。

另一方面,人们将凸性和广义凸性推广到不变凸性和广义不变凸性,得到了许多很有意义的结果[5-12]。1995 年 Mohan 和 Neogy 在文献[5]中讨论了不变凸集和不变凸函数,定义了条件 C,证明了在条件 C 下不变凸函数是预不变凸函数;接下来 Yang 等又于 2001 年在文献[6]中给出了 n 维欧氏空间中两类新的广义凸函数——严格预拟不变凸函数和半严格预拟不变凸函数,讨论了它们与预拟不变凸函数之间的关系,并将其应用到优化问题中;2006 年 Jabarootian 和 Zafarani 在文献[7]中提出了 Banach 空间中拟不变凸函数与拟不变单调概念,讨论了二者关系。受这些文献的启发,基于凸性和广义凸性在数学规划和最优化理论中的重要地位,本文在 Banach 空间中定义了一种新的广义凸函数——半

* 收稿日期:2007-01-16
资助项目:国家自然科学基金(No. 10471159)
作者简介:刘彩平(1974-),女,黑龙江齐齐哈尔人,讲师,硕士研究生,研究方向为最优化理论与算法。

严格拟不变凸函数,得到了在局部 Lipschitz 条件下它的 Clarke-广义次微分性质,讨论了半严格拟不变凸函数与拟不变凸函数间的关系。举例说明了半严格拟不变凸函数是比拟不变凸函数和伪不变凸函数更为广泛的一类广义凸函数。

1 预备知识

设 X 是实 Banach 空间,定义了范数 $\|\cdot\|$,X^* 是其对偶空间,范数记为 $\|\cdot\|_*$,$\langle\cdot,\cdot\rangle$表示 X 与 X^* 的对偶积,$\eta: X\times X\to X$ 是向量值函数,$f: X\to \mathbf{R}$ 是不可微实值函数。

定义 1[7,9]　设 f 是 X 上的局部 Lipschitz 函数,v 是 X 中的任意向量,f 在 x 沿方向 v 的 Clarke 广义方向导数记为 $f^0(x;v)$,定义为

$$f^0(x;v)=\limsup_{y\to x,\, t\downarrow 0}\frac{f(y+tv)-f(y)}{t}$$

定义 2[7,9]　设 f 是 X 上的局部 Lipschitz 函数,v 是 X 中的任意向量,f 在 x 的 Clarke 广义次微分记为 $\partial^c f(x)$,定义如下

$$\partial^c f(x)=\{\xi\in X^*:\ f^0(x;v)\geq\langle\xi,v\rangle,\forall v\in X\}$$

定义 3[5]　K 是 X 的子集,称 K 是关于 $\eta: X\times X\to X$ 的不变凸集,若 $\forall x,y\in K$,$\forall\lambda\in(0,1)$,有 $y+\lambda\eta(x,y)\in K$。

定义 4[7]　设 f 是 X 上的局部 Lipschitz 函数,称 $f: X\to\mathbf{R}$ 是 K 上关于 η 的拟不变凸函数,若 $\forall x,y\in K$,$\forall\xi\in\partial^c f(x)$,有

$$f(y)\leq f(x)\Rightarrow\langle\xi,\eta(y,x)\rangle\leq 0$$

定义 5[7]　设 f 是 X 上的局部 Lipschitz 函数,称 $f: X\to\mathbf{R}$ 是 K 上关于 η 的伪不变凸函数,若 $\forall x,y\in K$,$\forall\xi\in\partial^c f(x)$,有

$$f(y)<f(x)\Rightarrow\langle\xi,\eta(y,x)\rangle<0$$

条件 C[5]　设 $\eta: X\times X\to X$,则 $\forall x,y\in X$,$\forall\lambda\in[0,1]$,有

$$\eta(y,y+\lambda\eta(x,y))=-\lambda\eta(x,y);$$
$$\eta(x,y+\lambda\eta(x,y))=(1-\lambda)\eta(x,y)。$$

引理 1[8]　若 $\eta: X\times X\to X$ 满足条件 C,则 $\eta(y+\lambda\eta(x,y),y)=\lambda\eta(x,y)$。

引理 2[7]　(中值定理)设 $x,y\in X$,f 在含有$[x,y]$的非空闭凸集的每一点是 Lipschitz 连续,则存在 $u\in(x,y)$,使得　$f(x)-f(y)\in\langle\partial^c f(u),x-y\rangle$

2 主要结果

在下面的讨论中,假设 X 是实 Banach 空间,$K\subset X$ 是关于 η 的不变凸集,$\eta: X\times X\to X$ 是向量值函数,$f: X\to\mathbf{R}$ 是不可微实值函数。

定义 6　设 f 是 X 上的局部 Lipschitz 函数,称 $f: X\to\mathbf{R}$ 是 K 上关于 η 的半严格拟不变凸函数,若 $\forall x,y\in K$,$\forall\xi\in\partial^c f(x)$,有

$$f(y)<f(x)\Rightarrow\langle\xi,\eta(y,x)\rangle\leq 0$$

根据定义,显然有拟不变凸函数是半严格拟不变凸函数,伪不变凸函数也是半严格拟不变凸函数但反之不然。

例　设　$f(x)=\begin{cases}-|x|,|x|\leq 1\\ -1,|x|\geq 1\end{cases},x\in\mathbf{R}$,

$$\eta(y,x)=\begin{cases}y-x,x\in(0,1)\cup(1,+\infty),y\geq 0\\ -(x+y),x\in(0,1)\cup(1,+\infty),y\leq 0\\ x-y,x=1,y\in\mathbf{R}\\ x+y,x=-1,y\in\mathbf{R}\\ -(x+y),x\in(-\infty,-1)\cup(-1,0),y\geq 0\\ y-x,x\in(-\infty,-1)\cup(-1,0),y\leq 0\\ 0,x=0\end{cases}$$

则 f 在 $\mathbf{R}$ 上关于 η 是半严格拟不变凸函数,但关于同一 η 不是拟不变凸函数,因为令 $x=1$,$y=2$,有 $f(x)=f(1)=-1=f(2)=f(y)$,$\partial^c f(1)=[-1,0]$,$\exists\xi=-\frac{1}{2}\in\partial^c f(x)$,使得

$$\langle\xi,\eta(y,x)\rangle=\langle\xi,x-y\rangle=\langle-\frac{1}{2},-1\rangle=\frac{1}{2}>0$$

而且 f 在 $\mathbf{R}$ 上关于同一 η 也不是伪不变凸函数,因为令 $x=0$,$y=2$,则

$$f(y)=f(2)=-1<0=f(0)=f(x)$$
$$\partial^c f(0)=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$$

但是 $\forall\xi\in\partial^c f(0)$,使得$\langle\xi,\eta(y,x)\rangle=\langle\xi,0\rangle=0$。

这说明半严格拟不变凸函数是比拟不变凸函数和伪不变凸函数更为广泛的一类广义凸函数。

定理 1　设 f 是 K 上的局部 Lipschitz 函数,关于 η 是半严格拟不变凸函数。则 $\forall x,y\in K$,$f(x)\neq f(y)$,$\forall\xi\in\partial^c f(y)$,$\forall\xi\in\partial^c f(x)$,有$\langle\xi,\eta(x,y)\rangle>0\Rightarrow\langle\xi,\eta(y,x)\rangle\leq 0$。若 η 还满足条件 C,且 $\eta(x,y)+\eta(y,x)=0$,则

$$\exists z\in\{y+\lambda\eta(x,y)\mid\lambda\in(0,1)\},\exists w\in\partial^c f(z),使得$$
$$\langle\xi,\eta(x,y)\rangle>0\Rightarrow\langle w,\eta(y,x)\rangle<0$$

证明　$\forall x,y\in K$,$f(x)\neq f(y)$,$\forall\xi\in\partial^c f(y)$,若

$$\langle\xi,\eta(x,y)\rangle>0\tag{1}$$

因为 f 是半严格拟不变凸函数,根据定义 6 得 $f(y)<f(x)$,再根据 f 的半严格拟不变凸性得

$$\langle\zeta,\eta(y,x)\rangle\leq 0,\forall\zeta\in\partial^c f(x)\tag{2}$$

则有(1)$\Rightarrow$(2)。另一方面,根据(1)式及 η 满足条

件C得

$$\langle \xi,\eta(y+\lambda\eta(x,y),y)\rangle>0,\forall\lambda\in(0,1)$$

从而根据f的半严格拟不变凸性得

$$f(y+\lambda\eta(x,y))\geq f(y),\forall\lambda\in(0,1)$$

且$\exists\hat{\lambda}\in(0,1)$,使得$f(y+\hat{\lambda}\eta(x,y))>f(y)$。

事实上,若$\forall\lambda\in(0,1)$,有

$$f(y+\lambda\eta(x,y))=f(y)$$

则$f^0(y;\eta(x,y))=0$,从而

$$\forall\xi\in\partial^c f(y),\langle\xi,\eta(x,y)\rangle\leq f^0(y;\eta(x,y))=0$$

与(1)式矛盾。故根据中值定理得

$$\exists\bar{\lambda}\in(0,\hat{\lambda}),\bar{z}=y+\bar{\lambda}\eta(x,y),\exists\bar{w}\in\partial^c f(\bar{z}),有$$

$$f(y+\hat{\lambda}\eta(x,y))-f(y)=\langle\bar{w},\hat{\lambda}\eta(x,y)\rangle>0$$

又因为$\eta(x,y)+\eta(y,x)=0$,于是得

$$\langle\bar{w},\eta(y,x)\rangle<0。$$

证毕

定理2 设f是K上的局部Lipschitz函数,关于η是半严格拟不变凸函数,若η满足条件C,则f在K上关于同一η是拟不变凸函数。

证明 $\forall x,y\in K$,不妨设$f(x)\leq f(y)$,因f是半严格拟不变凸函数,有

$$f(x)<f(y)\Rightarrow\langle\xi,\eta(x,y)\rangle\leq0,\forall\xi\in\partial^c f(y)$$

欲证f在K上关于同一η是拟不变凸函数,只需证明

$$f(x)=f(y)\Rightarrow\langle\xi,\eta(x,y)\rangle\leq0,\forall\xi\in\partial^c f(y)$$

即可。下面考虑$f(x)$与$f(y+\eta(x,y))$。

1) 若$f(y+\eta(x,y))<f(x)$

根据f是半严格拟不变凸函数,且$f(x)=f(y)$,得

$$\langle\xi,\eta(y+\eta(x,y),y)\rangle\leq0,\ \forall\xi\in\partial^c f(y)$$

根据引理1有$\langle\xi,\eta(x,y)\rangle\leq0,\ \forall\xi\in\partial^c f(y)$。

2) 若$f(y+\eta(x,y))=f(x)$

a) 若$\forall\lambda\in[0,1]$,有

$$f(y+\lambda\eta(x,y))=f(x)=f(y)$$

则根据Clarke广义次微分定义和f的连续性得

$$\langle\xi,\eta(x,y)\rangle\leq\limsup_{z\to y,\,t\downarrow0}\frac{f(z+t\eta(x,y))-f(z)}{t}=$$

$$\limsup_{z\to y,\,t\downarrow0}\frac{f(y+t\eta(x,y))-f(y)}{t}=0$$

于是有$\langle\xi,\eta(x,y)\rangle\leq0,\forall\xi\in\partial^c f(y)$。

b) 若$\exists\bar{\lambda}\in(0,1)$,使得$f(y+\bar{\lambda}\eta(x,y))\neq f(y)$

i) $f(y+\bar{\lambda}\eta(x,y))<f(y)$,根据$f$是半严格拟不变凸函数得

$$\langle\xi,\eta(y+\bar{\lambda}\eta(x,y),y)\rangle\leq0,\ \forall\xi\in\partial^c f(y)$$

根据引理1有$\langle\xi,\eta(x,y)\rangle\leq0,\forall\xi\in\partial^c f(y)$。

ii) $f(y+\bar{\lambda}\eta(x,y))>f(y)$,根据中值定理,有

$$\exists\lambda_1\in(0,\bar{\lambda}),z_1=y+\lambda_1\eta(x,y),\exists w_1\in\partial^c f(z_1),使$$

得 $$f(y+\bar{\lambda}\eta(x,y))-f(y)=\bar{\lambda}\langle w_1,\eta(x,y)\rangle$$

从而有$\langle w_1,\eta(x,y)\rangle>0$,根据$\eta$满足条件C得

$$\langle w_1,\eta(x,y+\lambda_1\eta(x,y))\rangle>0$$

再根据f是半严格拟不变凸函数,有

$$f(x)\geq f(y+\lambda_1\eta(x,y))$$

从而$f(y)\geq f(y+\lambda_1\eta(x,y))$。

若$f(y)>f(y+\lambda_1\eta(x,y))$,则与i)同理证得

$$\langle\xi,\eta(x,y)\rangle\leq0,\forall\xi\in\partial^c f(y)。$$

若$f(y)=f(y+\lambda_1\eta(x,y))$,则与情况2)同理进行证明,若为情况a)或b)中的i),则结论得证。否则,继续前面的过程,最终得一个常值函数列

$$\{f(y+\lambda_n\eta(x,y)\mid\lambda_n\in\Lambda\}$$

其中

$$\Lambda=\{\lambda_n\mid\lambda_n\in(0,1),0<\cdots<\lambda_n<\lambda_{n-1}<\cdots\lambda_1<1,$$
$$n是自然数,f(y)=f(y+\lambda_n\eta(x,y))\}$$

且$\lim_{n\to\infty}\lambda_n=0$。故根据$f$的连续性得

$$\limsup_{z\to y,\,t\downarrow0}\frac{f(z+t\eta(x,y))-f(z)}{t}=$$

$$\limsup_{z\to y,\lambda_n\downarrow0}\frac{f(z+\lambda_n\eta(x,y))-f(z)}{\lambda_n}=$$

$$\limsup_{z\to y,\lambda_n\downarrow0}\frac{f(y+\lambda_n\eta(x,y))-f(y)}{\lambda_n}=0$$

再根据Clacke广义次微分的定义,有$\langle\xi,\eta(x,y)\rangle\leq0,\forall\xi\in\partial^c f(y)$。

3) 若$f(y+\eta(x,y))>f(x)$

此时与情况2)中的b)中的ii)同理可得

$$\langle\xi,\eta(x,y)\rangle\leq0,\forall\xi\in\partial^c f(y)$$

综上证得 $\forall x,y\in K,\forall\xi\in\partial^c f(y)$,

$$f(x)\leq f(y)\Rightarrow\langle\xi,\eta(x,y)\rangle\leq0$$

根据定义4知f在K上关于同一η是拟不变凸函数。 证毕

根据半严格拟不变凸函数的定义及Clacke广义次微分的定义,易得下面的两个定理。

定理3 设f是k上的局部Lipschitz函数,关于η是半严格拟不变凸函数,c是任意常数,则$f+c$在K上关于同一η也是半严格拟不变凸函数。

定理4 设f是k上的局部Lipschitz函数,关于η是半严格拟不变凸函数,c是任意正常数,则cf在K上关于同一η也是半严格拟不变凸函数。

参考文献:

[1] BAZARAA M S, SHETTY C M. Nonlinear Programming Theory and Algorithms[M]. New York :Wiley,1979.

[2] KARAMARDIAN S, SCHAIBLE S. Seven Kinds of Monotone Maps[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1990, 66(1) :37-46.

[3] PENOT J P, QUANG P H. Generalized Convexity of Functions and Generalized Monotonicity of Set-Valued Maps [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1997,92(2) :343-356.

[4] DANIILIDIS A, HADJISAVVAS N. Characterization of Nonsmooth Semistrictly Quasiconvex and Strictly Quasiconvex Functions[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1999,102(3) :525-536.

[5] MOHAN S R, NEOGY S K. On Invex Sets And Preinvex Functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1995,189 :901-908.

[6] YANG X M, YANG X Q, TEO K L. Characterizations and Applications of Prequasi - Invex Functions[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2001,110(3) :645-668.

[7] JABAROOTIAN T, ZAFARANI J. Generalized Invariant Monotonicity and Invexity of Non-differentiable Functions [J]. Journal of Global Optimization, 2006,12 :537-564.

[8] YANG X M, YANG X Q, TEO K L. Criteria for Generalized Invex Monotonicities[J]. European Journal of Operational Research, 2005,164 :115-119.

[9] CLARKE F H. Optimization and Nonsmooth Analysis[M]. New York :Wiley,1983.

[10] 刘彩平. Banach 空间中显凸泛函的两个充分条件[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2006,23(4) :18-20.

[11] 赵克全,陈哲. 半严格预拟不变凸函数的一个充分条件[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2006,23(3) :13-15.

[12] 张红琳. 一致光滑 Banach 空间中一类非线性映象的迭代过程[J]. 四川师范大学学报(自然科学版),2000,23(4) :332-336.

(责任编辑 黄 颖)