不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=11y(y+1)(y+2)(y+3)$*

程 瑶，马玉林
(重庆师范大学 数学与计算机科学学院，重庆 400047)

摘 要 运用了一种初等的证明方法，对一个不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=11y(y+1)(y+2)(y+3)$ 的正整数解进行了研究。证明过程中仅涉及到了初等的数论知识，就是采用了递归序列的方法，证明了不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=11y(y+1)(y+2)(y+3)$ 无正整数解，同时这个证明过程也给出了这个不定方程组的全部整数解，它们是 $(x,y)=(-3,0),(-3,-1),(-3,-2),(-3,-3),(-2,0),(-2,-1),(-2,-2),(-2,-3),(-1,0),(-1,-1),(-1,-2),(-1,-3),(0,0),(0,-1),(0,-2),(0,-3)$。

关键词 不定方程；整数解；递归序列
中图分类号：O156.1 **文献标识码**：A **文章编号**：1672-6693(2007)03-0027-04

The Diophantine Equation $x(x+1)(x+2)(x+3)=11y(y+1)(y+2)(y+3)$

CHENG Yao, *MA Yu-lin*
(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: In this paper using the method of recurrence sequences we show that there does not exist positive solution in the equation of the title. In fact, we obtain a more general result that the only integer solutions of the Diophantine equation is as follows: $x(x+1)(x+2)(x+3)=11y(y+1)(y+2)(y+3)$ are $(x,y)=(-3,0),(-3,-1),(-3,-2),(-3,-3),(-2,0),(-2,-1),(-2,-2),(-2,-3),(-1,0),(-1,-1),(-1,-2),(-1,-3),(0,0),(0,-1),(0,-2),(0,-3)$.

Key Words: Diophantine equation; positive integer solution; recurrence sequence

设 p 是素数，对于不定方程

$$x(x+1)(x+2)(x+3)=py(y+1)(y+2)(y+3) \quad (1)$$

曾引起许多人的兴趣[1-7]。1971 年，Cohn[1] 证明了当 $p=2$ 时仅有正整数解 $(x,y)=(5,4)$；1975 年，Ponnudurai[2] 证明了当 $p=3$ 时仅有正整数解 $(x,y)=(3,2),(7,5)$；1982 年，宣体佐[3] 证明了当 $p=5$ 时仅有正整数解 $(x,y)=(2,1)$；1991 年，罗明[4] 证明了当 $p=7$ 时仅有正整数解 $(x,y)=(4,2)$。

本文将证明当 $p=11$ 时的情况，证明出不定方程(1)式无正整数解。

先将 $p=11$ 时，方程(1)化为

$$(x^2+3x+1)^2-11(y^2+3y+1)=-10 \quad (2)$$

容易知道方程 $x^2-11y^2=-10$ 的全部整数解[5]，由以下两个(非结合)类给出。

$$x_n+y_n\sqrt{11}=\pm(1+\sqrt{11})(u_n+v_n\sqrt{11})=\pm(1+\sqrt{11})(10+3\sqrt{11})^n, n\in\mathbf{Z}$$

$$\bar{x}_n+\bar{y}_n\sqrt{11}=\pm(-1+\sqrt{11})(u_n+v_n\sqrt{11})=\pm(-1+\sqrt{11})(10+3\sqrt{11})^n, n\in\mathbf{Z}$$

其中 $1+\sqrt{11}$ 是 $x^2-11y^2=-10$ 的最小正整数解，$10+3\sqrt{11}$ 是 Pell 方程 $u^2-11v^2=1$ 的基本解。

* 收稿日期：2006-09-06 修回日期：2007-05-08
资助项目：重庆市教委科研基金项目(No. 010204)
作者简介：程瑶(1981-)，女，沈阳人，硕士研究生，研究方向为数论。

于是方程(2)的解应满足

$$(2x+3)^2=4x_n+5 \tag{3}$$

或

$$(2x+3)^2=4\bar{x}_n+5 \tag{4}$$

显然必需 $x_n\geq -1$,$\bar{x}_n\geq -1$,从而(3)、(4)式中的 x_n、$\bar{x}_n$ 只需取自

$$x_n+y_n\sqrt{11}=(1+\sqrt{11})(u_n+v_n\sqrt{11})=$$
$$(1+\sqrt{11})(10+3\sqrt{11})^n,n\geq 0$$
$$\bar{x}_n+\bar{y}_n\sqrt{11}=(-1+\sqrt{11})(u_n+v_n\sqrt{11})=$$
$$(-1+\sqrt{11})(10+3\sqrt{11})^n,n\geq 0$$

由这两个式子不难推出下列关系式。

$$x_{n+1}=20x_n-x_{n-1},x_0=1,x_1=43 \tag{5}$$
$$\bar{x}_{n+1}=20\bar{x}_n-\bar{x}_{n-1},\bar{x}_0=-1,\bar{x}_1=23 \tag{6}$$
$$u_{n+1}=20u_n-u_{n-1},u_0=1,u_1=10 \tag{7}$$
$$v_{n+1}=20v_n-v_{n-1},v_0=0,v_1=3 \tag{8}$$
$$u_{2n}=2u_n^2-1,v_{2n}=2u_nv_n,u_{-n}=u_n,v_{-n}=-v_n \tag{9}$$
$$x_n=u_n+11v_n,\bar{x}_n=-u_n+11v_n,\bar{x}_n=-x_{-n} \tag{10}$$
$$u_{n+2h}\equiv -u_n\pmod{u_h},v_{n+2h}\equiv -v_n\pmod{u_h} \tag{11}$$
$$x_{n+2h}\equiv -x_n\pmod{u_h},\bar{x}_{n+2h}\equiv -\bar{x}_n\pmod{u_h} \tag{12}$$

下面将证明(3)式仅有当 $n=0$ 时成立,(4)式仅有当 $n=0,2$ 时成立。由此求得方程 $(x^2+3x+1)^2-11y^2=-10$ 的全部整数解,进而作为推论得到 $p=11$ 时方程(1)式的全部整数解。

1 $(2x+3)^2=4x_n+5$

本节考察(3)式的解,即 n 取何值时 $4x_n+5$ 为完全平方数。

引理 1 设 $2\mid n,n>0$,则

$$\left(\frac{\pm 44v_{2n}+5}{u_{2n}}\right)=\left(\frac{5u_n\pm 44v_n}{201}\right)$$

证明 因为 $2\mid n$ 时,$u_n\equiv \pm 1\pmod 8$,$v_n\equiv 4,0\pmod 8$,$u_n\equiv \pm 1\pmod 5$,$v_n\equiv 0\pmod 5$,$u_n\equiv 1\pmod{11}$,$u_n\equiv 1\pmod 4$;$4\mid n$ 时,$u_n\equiv 1\pmod 8$,$v_n\equiv 0\pmod 8$

$$\left(\frac{\pm 44v_{2n}+5}{u_{2n}}\right)=\left(\frac{\pm 88u_nv_n+10u_n^2}{u_{2n}}\right)=$$
$$\left(\frac{u_n}{u_{2n}}\right)\left(\frac{44v_n\pm 5u_n}{u_{2n}}\right)=\left(\frac{u_{2n}}{u_n}\right)\left(\frac{u_{2n}}{44v_n\pm 5u_n}\right)=$$
$$\left(\frac{-1}{u_n}\right)\left(\frac{u_{2n}}{44v_n\pm 5u_n}\right)=\left(\frac{-1}{u_n}\right)\left(\frac{11v_n^2+u_n^2}{44v_n/5\pm u_n}\right)=$$
$$\left(\frac{-1}{u_n}\right)\left(\frac{11}{44v_n/5\pm u_n}\right)\left(\frac{201}{44v_n/5\pm u_n}\right)=$$
$$\pm\left(\frac{44v_n/5\pm u_n}{201}\right)\left(\frac{44v_n/5\pm u_n}{11}\right)=\left(\frac{5u_n\pm 44v_n}{201}\right)$$ 证毕

引理 2 设 $n\equiv 0\pmod{900}$ 且 $n>0$,则(3)式不成立。

证明 令 $n=2\cdot k\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 2^t$,$t\geq 1$,$2\nmid k$。对 $\{5u_n\pm 44v_n\}$ 取 mod 201 所得的两个剩余序列周期均为 34,而 $\{2^t\}$ 对 mod 34 的剩余序列具有周期 8,对 k 分两种情况讨论。

1) $k\equiv 1\pmod 4$

$$令\quad m=\begin{cases}2^t,t\equiv 0,1,4,6,7\pmod 8\\ 3^2\cdot 2^t,t\equiv 2,5\pmod 8\\ 5^2\cdot 2^t,t\equiv 3\pmod 8\end{cases}$$

则有表 1。

表 1 $k\equiv 1\pmod 4$ 情况下的数据

$t(\geq 1)\pmod 8$	0	1	2	3
$m\pmod{34}$	18	2	2	30
$5u_m+44v_m\pmod{201}$	86	17	17	143
$t(\geq 1)\pmod 8$	4	5	6	7
$m\pmod{34}$	16	16	30	26
$5u_m+44v_m\pmod{201}$	149	149	143	188

表中所有 m 均有 $\left(\frac{5u_m+44v_m}{201}\right)=-1$。

于是,由(10)、(12)式及引理 1 有

$$4x_n+5\equiv 4x_{2m}+5\equiv 44v_{2m}+5\pmod{u_{2m}}$$
$$\left(\frac{4x_n+5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{44v_{2m}+5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{5u_m+44v_m}{201}\right)=-1$$

从而 $4x_n+5$ 非平方数,(3)式不成立。

2) $k\equiv -1\pmod 4$

$$令\quad m=\begin{cases}2^t,t\equiv 0,2,3,4,5\pmod 8\\ 3^2\cdot 2^t\equiv 1,6\pmod 8\\ 5^2\cdot 2^t,t\equiv 4,7\pmod 8\end{cases}$$

则有表 2。

表 2 $k\equiv -1\pmod 4$ 情况下的数据

$t(\geq 1)\pmod 8$	0	1	2	3
$m\pmod{34}$	18	18	4	8
$5u_m-44v_m\pmod{201}$	149	149	143	188
$t(\geq 1)\pmod 8$	4	5	6	7
$m\pmod{34}$	16	32	32	4
$5u_m-44v_m\pmod{201}$	86	17	17	143

表中所有 m 均有 $\left(\frac{5u_m-44v_m}{201}\right)=-1$。

于是,由(10)、(12)式及引理 1 有

$$4x_n+5\equiv -4x_{2m}+5\equiv -44v_{2m}+5\pmod{u_{2m}}$$
$$\left(\frac{4x_n+5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{-44v_{2m}+5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{5u_m-44v_m}{201}\right)=-1$$

从而 $4x_n+5$ 非平方数,(3) 式不成立。　　证毕

引理 3　若(3) 式成立,则必须 $n\equiv 0 \pmod{900}$。

证明　用对序列 $\{4x_n+5\}$ 取模的方法证明。

mod 5 时,排除 $n\equiv 1,3 \pmod 4$,此时 $4x_n+5\equiv 2,3 \pmod 5$,剩 $n\equiv 0,2 \pmod 4$。这说明排除了所有奇数项,以下只考虑偶数项。

上面的 mod 5 是对 $\{4x_n+5\}$ 取的,mod 4 指出所得剩余序列周期为 4,“此时”这句话是“排除”的理由,2,3 均为 mod 5 的平方非剩余。为节省篇幅,将按这种方式叙述。

mod 577,排除 $n\equiv 2,4,6,22,24,30 \pmod{36}$,此时 $4x_m+5\equiv 556,39,292,548,295,299 \pmod{577}$,剩 $n\equiv 0,8,10,12,14,16,18,20,26,28,32,34 \pmod{36}$。

mod 2953,排除 $n\equiv 12,14,32 \pmod{36}$,此时 $4x_n+5\equiv 734,1557,1386 \pmod{2953}$,剩 $n\equiv 0,8,10,16,18,20,26,28,34 \pmod{36}$。

mod 17,排除 $n\equiv 2,8,10,16 \pmod{18}$,此时 $4x_n+5\equiv 7,12,3,14 \pmod{17}$,因此排除 $n\equiv 8,10,16,20,26,28,34 \pmod{36}$,剩 $n\equiv 0,18 \pmod{36}$。

用下面计算排除 $n\equiv 18 \pmod{36}$。令 $n=36k+18$。若 $2\mid k$,则 $n\equiv 18 \pmod{24}$。由于对序列 $\{4x_n+5\}$ 取 mod 23,排除 $n\equiv 18 \pmod{24}$,此时 $4x_n+5\equiv 15 \pmod{23}$,可知(3) 式不成立。故设 $2\nmid k$,于是,由(12) 式有

$$4x_n+5\equiv -4x_{18}+5\equiv -44v_{18}+5 \pmod{u_{18}}$$

由

$$u_{18}=125\,283\,240\,358\,674\,708\,816\,199,$$
$$v_{17}=377\,743\,182\,536\,031\,523\,205\,40$$

可计算出

$$\left(\frac{-44v_{18}+5}{u_{18}}\right)=$$
$$\left(\frac{-166\,207\,000\,315\,853\,870\,210\,375\,5}{125\,283\,240\,358\,674\,708\,816\,199}\right)=-1$$

从而排除 $n\equiv 18 \pmod{36}$,剩 $n\equiv 0 \pmod{36}$。

$n\equiv 0 \pmod{36}$ 等价于 $n\equiv 0,36,72,108,144 \pmod{180}$。

mod 421,排除 $n\equiv 36,12,48,24 \pmod{60}$,此时 $4x_n+5\equiv 215,267,183,193 \pmod{421}$,因此排除 $n\equiv 36,72,108,144 \pmod{180}$,还剩 $n\equiv 0 \pmod{180}$。

$n\equiv 0 \pmod{180}$ 等价于 $n\equiv 0,180,360,540,720 \pmod{900}$。

mod 108 280 1,排除 $n\equiv 60,40,20 \pmod{100}$,此时 $4x_n+5\equiv 139\,749,263\,838,214\,252 \pmod{108\,280\,1}$,因此排除 $n\equiv 360,540,720 \pmod{900}$ 还剩 $n\equiv 0,180 \pmod{900}$。

mod 453 601,排除 $n\equiv 180 \pmod{300}$,此时 $4x_n+5\equiv 430\,970 \pmod{453\,601}$,则排除 $n\equiv 180 \pmod{900}$,最后剩 $n\equiv 0 \pmod{900}$。　　证毕

$$2(2x+3)^2=4\bar{x}_n+5$$

对(4) 式进行讨论。

引理 4　设 $n\equiv 0 \pmod{900}$ 且 $n>0$,则(4) 式不成立。

证明　令 $n=2\cdot k\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 2^t, t\geq 1, 2\nmid k$。只要完全按照引理 2 证明过程中的方式选取 m,根据(10)、(12) 式和引理 1 同样可得

$$\left(\frac{4\bar{x}_n+5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{\pm 44v_{2m}+5}{u_{2m}}\right)=$$
$$-\left(\frac{5u_m\pm 44v_m}{201}\right)=-1$$

从而(4) 式不成立。　　证毕

引理 5　设 $n\equiv 2 \pmod{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7}$ 且 $n>0$,则(4) 式不成立。

证明　令 $n=2+2\cdot k\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 2^t, 2\nmid k, t\geq 0$。若取 m 为 $2^t, 3\cdot 2^t, 5\cdot 2^t, 3\cdot 7\cdot 2^t$ 之一,则由(12) 式,

$$4\bar{x}_n+5\equiv -4x_2+5\equiv -1839 \pmod{u_m}$$
$$\left(\frac{4\bar{x}_n+5}{u_m}\right)=\left(\frac{-1839}{u_m}\right)=\left(\frac{1839}{u_m}\right)=$$
$$\left(\frac{u_m}{1839}\right)=\left(\frac{u_m}{3}\right)\left(\frac{u_m}{613}\right)=\left(\frac{u_m}{613}\right)$$

$\{u_m\}$ 对 mod 613 的剩余序列周期为 307,而 $\{2^t\}$ 对 mod 307 的剩余序列具有周期 102。

令

$A=\{2,3,5,6,9,11,13,17,18,20,25,26,32,33,35,38,40,41,42,43,44,45,46,47,48,49,50,53,54,56,57,60,62,64,68,69,71,76,77,83,84,86,89,91,92,93,94,95,96,97,98,99,100,101\}$

$B=\{0,1,4,7,8,12,14,15,22,27,29,34,51,52,55,58,59,63,65,66,73,78,80,85\}$

$C=\{16,21,23,24,30,31,36,37,67,72,74,75,81,82,87,88\}$

$D=\{10,19,28,39,61,70,79,90\}$

使得 $A\cup B\cup C\cup D=[0,101]$ 之间的正整数。

具体选取 $m=\begin{cases}2^t, t\in A\\ 3\cdot 2^t, t\in B\\ 5\cdot 2^t, t\in C\\ 3\cdot 7\cdot 2^t, t\in D\end{cases}$

令$E=\{5,23,52,85,91,98,101,109,113,124,173,205,229,235,262,273,278,292,296,302,315,319,327,334,337,350,375,396,404,419,450,456,485,499,503,527,553,559,589,607\}$

使得所有$u_m(\mathrm{mod}\ 613)$(其中m取$\mathrm{mod}\ 307$的余数)属于E中的元素,而E中所有元素均为$\mathrm{mod}\ 613$的平方非剩余,所以u_m均为$\mathrm{mod}\ 613$的平方非剩余,从而$\left(\frac{4\bar{x}_n+5}{u_m}\right)=-1$,(4)式不成立。 证毕

由引理4和引理5可得以下推论。

推论1 设$n\equiv 0,2(\mathrm{mod}\ 6300)$且$n>2$,则(4)式不成立。

引理6 若(4)式成立,则必需$n=0,2(\mathrm{mod}\ 6300)$。

类似于引理3的证明,也采用对序列$\{4\bar{x}_n+5\}$取模的方法来证明,证明略。

3 结果

根据前两节的讨论,现在可给出本文的主要结果。

定理1 不定方程

$$(x^2+3x+1)^2-11y^2=-10 \tag{13}$$

的全部整数解是$(x,\pm y)=(-3,1)(0,1),(-2,1),(-1,1),(20,139),(-23,139)$。

证明 由引理2和引理3知(3)式若成立,必须$n=0$,此时$(x,\pm y)=(-3,1),(0,1)$。

又由引理4和引理5知(4)式若成立,必须$n=0,2$,此时$(x,\pm y)=(-2,1),(-1,1),(20,139),(-23,139)$。 证毕

定理1的推论,得到如下推论。

推论2 不定方程

$x(x+1)(x+2)(x+3)=11y(y+1)(y+2)(y+3)$

无正整数解。

证明 由(2)式和定理1,应有$y^2+3y+1=\pm 1,\pm 139$,然而没有一个方程的解是正整数,故方程

$x(x+1)(x+2)(x+3)=11y(y+1)(y+2)(y+3)$

无正整数解。 证毕

由此,容易知道方程

$x(x+1)(x+2)(x+3)=11y(y+1)(y+2)(y+3)$

共有16组整数解。这16组都是平凡解,使方程

$x(x+1)(x+2)(x+3)=11y(y+1)(y+2)(y+3)$

两端都为零,即

$$(x,y)=(-3,0),(-3,-1),(-3,-2),(-3,-3),\\(-2,0),(-2,-1),(-2,-2),(-2,-3),\\(-1,0),(-1,-1),(-1,-2),(-1,-3),\\(0,0),(0,-1),(0,-2),(0,-3)。$$

参考文献:

[1] COHN J H E. The Diophantine Equation $x(x+1)(x+2)(x+3)=2y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. Pacific J Math, 1971, 37: 331-335.

[2] PONNUDURAI T. The Diophantine Equation $x(x+1)(x+2)(x+3)=3y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. J London Math Soc, 1975, 10: 232-240.

[3] 宣体佐. 关于不定方程$x(x+1)(x+2)(x+3)=5y(y+1)(y+2)(y+3)$[J]. 北京师范大学学报(自然科学版), 1982(2): 27-34.

[4] 罗明. 关于不定方程$x(x+1)(x+2)(x+3)=7y(y+1)(y+2)(y+3)$[J]. 重庆师范学院学报(自然科学版), 1991, 8(1): 1-8.

[5] 柯召,孙琦. 谈谈不定方程[M]. 上海:上海教育出版社, 1980.

[6] 戴中林. 多元线性不定方程的矩阵解法[J]. 四川师范学院学报(自然科学版), 2001, 22(3): 270-273.

[7] 郭育红,张先迪. 关于一类不定方程的正整数解数[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2006, 29(2): 197-199.

(责任编辑 黄 颖)