关于不定方程 $x^2-3y^4=22$ *

林丽娟[1],何 波[2]
(1. 重庆师范大学 数学与计算机科学学院,重庆 400047;2. 四川省隆昌县响石中学,四川 隆昌 642152)

摘 要:利用一种初等的证明方法,即递推序列,同余式和平方剩余的方法,对一个不定方程 $x^2-3y^4=22$ 的正整数解进行了研究,证明了不定方程 $x^2-3y^4=22$ 仅有正整数解 $(x,y)=(5,1),(85,7)$。

关键词:递推序列;平方剩余;不定方程
中图分类号:O156.1 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-6693(2007)03-0031-02

On the Diophantine Equation $x^2-3y^4=22$

LIN Li-Juan[1], *HE Bo*[2]
(1. College of Mathematics and Computer, Chongqing Normal University, Chongqing 400047;
2. Longchang Xiangshi Middle School, Longchang Sichuan 642152, China)

Abstract: In this paper the author has proved that the Diophantine equation $x^2-3y^4=22$ has only positive integral solutions $(x,y)=(5,1),(85,7)$ with the methods of recursive sequence, congruence and quadratic remainder.

Key words: recursive sequence; quadratic remainder; Diophantine equation

关于不定方程 $x^2-Dy^4=N$(其中 D,N 为给定的整数,且 $D>0$ 为非平方数)曾引起许多人的兴趣[1-8]。设 $N(D,N)$ 是方程 $x^2-Dy^4=N$ 的正整数解的组数,Cohn[1] 证明了以下几个结果:$N(5,44)=1$,$(x,y)=(7,1)$;$N(5,11)=2$,$(x,y)=(4,1)$ 和 $(56,5)$;$N(5,-44)=1$,$(x,y)=(6,2)$,$(19,3)$ 和 $(181,9)$。Tzanakis[2] 证明了在 $y\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 8)$ 时,$N(2,17)=0$,$N(2,41)=0$,$N(8,17)=0$,$N(2,97)=0$。黎进香[3] 证明了 $N(3,46)=2$,$(x,y)=(7,1)$,$(17,3)$。本文利用递推序列,同余式和平方剩余的方法证明了不定方程 $x^2-3y^4=22$ 仅有正整数解 $(x,y)=(5,1),(85,7)$。

定理 不定方程

$$x^2-3y^4=22 \tag{1}$$

仅有正整数解 $(x,y)=(5,1),(85,7)$。

证明 首先考虑 Pell 方程

$$a^2-3b^2=22 \tag{2}$$

其一般解可由下面两个非结合类给出[4]

$$a+b\sqrt{3}=\pm(5+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n \tag{3}$$

或

$$a+b\sqrt{3}=\pm(-5+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n \tag{4}$$

令 $U_n\sqrt{3}+V_n=(\sqrt{3}+2)^n$,则如果(1)式有解,必有 n 使得 $y^2=\pm(V_n+5U_n)$ 或

$$y^2=\pm(-V_n+5U_n)=\mp(V_{-n}+5U_{-n})$$

当 $n\geq 0$ 时,$V_n+5U_n>0$;当 $n<0$ 时,$V_n+5U_n<0$。因此可归结为

$$y^2=V_n+5U_n,n\geq 0 \tag{5}$$

或

$$y^2=-V_n+5U_n,n<0 \tag{6}$$

容易验证下列关系

$$V_{n+2}=4V_{n+1}-V_n,V_0=1,V_1=2$$
$$U_{n+2}=4U_{n+1}-U_n,U_0=0,U_1=1 \tag{7}$$

$$V_{5n}=V_n(16V_n^4-20V_n^2+5),$$
$$U_{5n}=U_n(16V_n^4-12V_n^2+1) \tag{8}$$

$$V_{2n}=V_n^2+3U_n^2=2V_n^2-1=6U_n^2+1$$
$$U_{2n}=2V_nU_n \tag{9}$$

$$U_{n+2kr}\equiv(-1)^kU_n(\mathrm{mod}\ V_r),$$
$$V_{n+2kr}\equiv(-1)^kV_n(\mathrm{mod}\ V_r) \tag{10}$$

$$U_{n+2kr}\equiv U_n(\mathrm{mod}\ U_r),V_{n+2kr}\equiv V_n(\mathrm{mod}\ U_r) \tag{11}$$

ⅰ)对(5)式取模 8,得剩余序列周期为 4,当 n

---

* 收稿日期:2007-01-16
资助项目:重庆市教委科研基金项目(No.010204)
作者简介:林丽娟(1981-),女,湖北罗田人,硕士研究生,研究方向为基础数学。

$\equiv 1,2,3 \pmod 4$ 时,$V_n + 5U_n \equiv 7,3,5 \pmod 8$ 为模8的平方非剩余,故排除。所以 $n \equiv 0 \pmod 4$。对(5)式取模7,得剩余序列周期为8,当 $n \equiv 4 \pmod 8$ 时,$V_n + 5U_n \equiv 6 \pmod 7$ 为模7的平方非剩余,故排除,所以 $n \equiv 0 \pmod 8$。

若 $n \neq 0$,令 $n = 0 + 2(4k \pm 1)m$,$m = 2^t$,$t > 1$,由(10)式知

$$y^2 = V_n + 5U_n = V_{0+8km\pm2m} + 5U_{0+8km\pm2m} \equiv V_{\pm2m} + 5U_{\pm2m} \equiv \pm 5U_{2m} \pmod{V_{2m}} \quad (12)$$

易知 $V_{2m} \equiv 2 \pmod 5$,所以 $\left(\frac{5}{V_{2m}}\right) = -1$,又 $V_{2m} \equiv 1 \pmod 8$,设 $2^s \parallel U_m$,则

$$\left(\frac{U_m}{V_{2m}}\right) = \left(\frac{U_m/2^s}{V_{2m}}\right) = \left(\frac{V_{2m}}{U_m/2^s}\right) = \left(\frac{6U_m^{\ 2}+1}{U_m/2^s}\right) = 1,$$

$$\left(\frac{V_m}{V_{2m}}\right) = \left(\frac{2V_m^{\ 2}-1}{V_m}\right) = \left(\frac{-1}{V_m}\right) = 1,$$

所以 $\left(\frac{U_{2m}}{V_{2m}}\right) = \left(\frac{2U_mV_m}{V_{2m}}\right) = \left(\frac{U_m}{V_{2m}}\right)\left(\frac{V_m}{V_{2m}}\right) = 1$,

因此 $\left(\frac{y^2}{V_{2m}}\right) = \left(\frac{\pm 5U_{2m}}{V_{2m}}\right) = \left(\frac{5}{V_{2m}}\right)\left(\frac{U_{2m}}{V_{2m}}\right) = -1$,

所以(12)式不成立,此时(5)式无解。

当 $n = 0$ 时,得到方程(1)式的正整数解 $(x,y) = (5,1)$。

ⅱ)对(6)式取模71,得剩余序列周期为7,当 $n \equiv 0,2,4,5 \pmod 7$ 时 $-V_n + 5U_n \equiv 70,13,41,44 \pmod{71}$ 为模71的平方非剩余,故排除。剩 $n \equiv 1,3,6 \pmod 7$,即 $n \equiv 1,3,6,8,10,13 \pmod{14}$。对(6)式取模41,得剩余序列周期为14,当 $n \equiv 1,6,8,13 \pmod{14}$ 时,$-V_n + 5U_n \equiv 3,7,38,34 \pmod{41}$ 为模41的平方非剩余,故排除。剩 $n \equiv 3,10 \pmod{14}$,即 $n \equiv 3,10,17,24 \pmod{28}$。对(6)式取模2521,得剩余序列周期为28,当 $n \equiv 10,24 \pmod{28}$ 时,$-V_n + 5U_n \equiv 377,2144 \pmod{2521}$ 为模2521的平方非剩余,故排除。剩 $n \equiv 3,17 \pmod{28}$。对(6)式取模8,得剩余序列周期为4,当 $n \equiv 0,1,2 \pmod 4$ 时,$-V_n + 5U_n \equiv 7,3,5 \pmod 8$ 为模8的平方非剩余,故排除。于是可排除 $n \equiv 17 \pmod{28}$,所以剩下 $n \equiv 3 \pmod{28}$。

对(6)式取模97,得剩余序列周期为16,当 $n \equiv 7,15 \pmod{16}$ 时,$-V_n + 5U_n \equiv 7,90 \pmod{97}$ 为模97的平方非剩余,故排除。所以 $n \equiv 3,11 \pmod{16}$,即 $n \equiv 3 \pmod 8$。

对(6)式取模19,得剩余序列周期为5,当 $n \equiv 0,1,2,4 \pmod 5$ 时,$-V_n + 5U_n \equiv 18,3,13,12 \pmod{19}$ 为模19的平方非剩余,故排除。所以 $n \equiv 3 \pmod 5$。

由 $n \equiv 3 \pmod{28}$,$n \equiv 3 \pmod 8$ 及 $n \equiv 3 \pmod 5$ 得 $n \equiv 3 \pmod{280}$。

若 $n \neq 3$,令 $n = 3 + 2(4k \pm 1) \times 5 \times 7 \times 2^t$,令

$$m = \begin{cases} 2^t, & t \equiv 2 \pmod 3 \\ 5 \times 2^t, & t \equiv 0 \pmod 3 \\ 7 \times 2^t, & t \equiv 1 \pmod 3 \end{cases}$$

其中 $t > 1$,则有 $2m \equiv 8,10 \pmod{18}$,由(10)式可得

$$y^2 = -V_n + 5U_n = -V_{3+8km\pm2m} + 5U_{3+8km\pm2m} \equiv (-3U_3 + 5V_3)U_{\pm2m} \equiv \pm 85U_{2m} \pmod{V_{2m}} \quad (13)$$

因为 $4 \mid m$,$3 \nmid m$,有 $V_{2m} \equiv 1 \pmod 8$,$V_{2m} \equiv 2 \pmod 5$,所以 $\left(\frac{\pm 5}{V_{2m}}\right) = -1$。又由上面ⅰ)里的计算易知 $\left(\frac{U_{2m}}{V_{2m}}\right) = 1$,所以

$$1 = \left(\frac{y^2}{V_{2m}}\right) = \left(\frac{\pm 85U_{2m}}{V_{2m}}\right) = -\left(\frac{17}{V_{2m}}\right) = -\left(\frac{V_{2m}}{17}\right) \quad (14)$$

对 V_{2m} 取模17,得剩余序列周期为18,而 $2m \equiv 8,10 \pmod{18}$ 时,$V_{2m} \equiv 15 \pmod{17}$。所以 $\left(\frac{V_{2m}}{17}\right) = 1$,这与(14)式矛盾,因此(13)式不成立,此时(6)式无解。

当 $n = 3$ 时,得到方程(1)的正整数解 $(x,y) = (85,7)$。

综合ⅰ)、ⅱ)知方程(1)式仅有正整数解 $(x,y) = (5,1),(85,7)$。 证毕

致谢 感谢罗明教授对本稿写作的指导!

参考文献:

[1] COHN J H E. Some Quartic Diophantine Equations[J]. Pacific J Math, 1968, 26:233-243.

[2] TZANAKIS N. On the Diophantine Equation $y^2 - D = 2^n$ [J]. J Number Theory, 1983,17:144-164.

[3] 曹珍富. 丢番图方程引论[M]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,1989.

[4] 黎进香,张春蕊. 关于不定方程的初等解法[J]. 哈尔滨工业大学学报,1995(5):13-16.

[5] 柯召,孙琦. 数论讲义[M]. 北京:高等教育出版社,2001.

[6] 罗明. 关于不定方程 $x^3 + 1 = 7y^2$ [J]. 重庆师范学院学报(自然科学版),2003,20(1):5-7.

[7] 郭育红,张先迪. 关于一类不定方程的正整数解数[J]. 四川师范大学学报(自然科学版),2006,29(2):197-199.

[8] 戴中林. 多元线性不定方程的矩阵解法[J]. 四川师范学院学报(自然科学版),2001,22(3):270-273.

(责任编辑 黄 颖)