

方程 $x + y = xyz$ 的正整数解及其应用*

付尚朴

(中国工程物理研究院 工学院, 四川 绵阳 621900)

关键词: 非线性方程; 最大公因数; 最小公倍数;
中图分类号: O156.1

文献标识码: B

文章编号: 1672-6693(2007)03-0087-02

文献[1]给出了 M. Bencze 提出的方程 $\gcd(a_1, a_2, \dots, a_n) + \text{lcm}(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1 a_2 \dots a_n$
 $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{N}^+$ (1)

求解过程及解。其中 \mathbf{N}^+ 为正整数集, $\gcd(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 为 a_1, a_2, \dots, a_n 的最大公因数, $\text{lcm}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 是 a_1, a_2, \dots, a_n 的最小公倍数。本文利用非线性方程 $x + y = xyz$ 的正整数解有效地求出方程(1)式的解。

1 定理及其证明

定理1 $x + y = xyz$ 的正整数解满足 $x = y$ 且 $x = y = 2, z = 1$ 或 $x = y = 1, z = 2$ 。

证明 因 $x, y, z \in \mathbf{N}^+$, 而

$$x + y = xyz \quad (2)$$

所以 $x | (x + y)$, $x | x$, 则 $x | y$, 故存在正整数 q 使

$$y = qx \quad (3)$$

代入(2)式, 得 $x + qx = x(qx)z$

因 x 是正整数, 两边消去 x 得

$$1 + q = qxz \quad (4)$$

由(4)式知 $q | (1 + q)$, 从而 $q | 1$, 即 $q = 1$, 代入(4)式得

$$xz = 2 \quad (5)$$

故 $z | 2$, 得 $z = 1$ 或 $z = 2$ 。由(5)式得 $x = 2$ 或 $x = 1$, 将 $q = 1$ 代入(3)式得 $x = y$, 所以(2)式的解为

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases} \quad \text{证毕}$$

定理2 $\gcd(a_1, a_2, \dots, a_n) \text{lcm}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{k}$, $n \geq 2$, 其中 k 为正整数。

证明 设 $a_1 a_2 \dots a_n$ 中的不同素因子为 p_1, p_2, \dots, p_m , 则有

$$a_i = p_1^{s_{1i}} p_2^{s_{2i}} \dots p_m^{s_{mi}} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\begin{aligned} u_j &= \min\{s_{1j}, s_{2j}, \dots, s_{nj}\} \quad j = 1, 2, \dots, m \\ v_j &= \max\{s_{1j}, s_{2j}, \dots, s_{nj}\} \quad j = 1, 2, \dots, m \\ w_j &= \sum_{i=1}^n s_{ij} \quad j = 1, 2, \dots, m \\ w_j &\geq u_j + v_j \quad j = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \gcd(a_1, a_2, \dots, a_n) &= p_1^{u_1} p_2^{u_2} \dots p_m^{u_m} \\ \text{lcm}(a_1, a_2, \dots, a_n) &= p_1^{v_1} p_2^{v_2} \dots p_m^{v_m} \\ a_1 a_2 \dots a_n &= p_1^{w_1} p_2^{w_2} \dots p_m^{w_m} \\ \gcd(a_1, a_2, \dots, a_n) \text{lcm}(a_1, a_2, \dots, a_n) &= p_1^{u_1+v_1} p_2^{u_2+v_2} \dots p_m^{u_m+v_m} \\ \gcd(a_1, a_2, \dots, a_n) \text{lcm}(a_1, a_2, \dots, a_n) &= p_1^{w_1-(w_1-u_1-v_1)} p_2^{w_2-(w_2-u_2-v_2)} \dots p_m^{w_m-(w_m-u_m-v_m)} \\ \gcd(a_1, a_2, \dots, a_n) \text{lcm}(a_1, a_2, \dots, a_n) &= \frac{p_1^{w_1} p_2^{w_2} \dots p_m^{w_m}}{p_1^{(w_1-u_1-v_1)} p_2^{(w_2-u_2-v_2)} \dots p_m^{(w_m-u_m-v_m)}} \end{aligned}$$

$$\gcd(a_1, a_2, \dots, a_n) \text{lcm}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{k}$$

其中 $k = p_1^{(w_1-u_1-v_1)} p_2^{(w_2-u_2-v_2)} \dots p_m^{(w_m-u_m-v_m)}$, 由(6)式知 k 为整数。证毕

定理3 若 $\gcd(a_1, a_2, \dots, a_n) = \text{lcm}(a_1, a_2, \dots, a_n)$, 则 $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \gcd(a_1, a_2, \dots, a_n) = \text{lcm}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 。

证明 因 $\gcd(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i, a_i | \text{lcm}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 则

$$\gcd(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq a_i \leq \text{lcm}(a_1, a_2, \dots, a_n), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

由已知得 $a_1 = a_2 = \dots = a_n =$

$$\gcd(a_1, a_2, \dots, a_n) = \text{lcm}(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad \text{证毕}$$

2 应用

应用上述定理可以求解 M. Bencze 提出的方程

* 收稿日期: 2007-01-16

作者简介: 付尚朴(1963-)男, 四川遂宁人, 副教授, 研究方向为计算机信息安全和算法。

(1)式。

令 $x = \gcd(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $y = \text{lcm}(a_1, a_2, \dots, a_n)$, 由定理 2 知

$a_1 a_2 \dots a_n = \gcd(a_1, a_2, \dots, a_n) \text{lcm}(a_1, a_2, \dots, a_n) k$
得 $a_1 a_2 \dots a_n = xyk$ 。所以 M. Bencze 提出的方程(1)式变为 $x + y = xyk$ 。

由定理 1 可知, 此方程的解满足 $x = y$, 即

$$\gcd(a_1, a_2, \dots, a_n) = \text{lcm}(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

由定理 3 知

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n =$$

$$\gcd(a_1, a_2, \dots, a_n) = \text{lcm}(a_1, a_2, \dots, a_n),$$

由(1)式得 $2a_1 = a_1^n = 4$, 解得 $a_1 = 2, n = 2$, 所以 M.

Bencze 提出的方程(1)式仅当 $n = 2, a_1 = a_2 = 2$ 时有解。

参考文献:

- [1] 乐茂华. 关于最大公因数和最小公倍数的一个方程 [J]. 海南师范学院学报(自然科学版) 2006, 19(1): 1-2.
[2] 覃中平, 张焕国. 信息安全数学基础 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2006. 68-69.

(责任编辑 黄颖)

(上接第 56 页)

程中温度变化的曲线图。

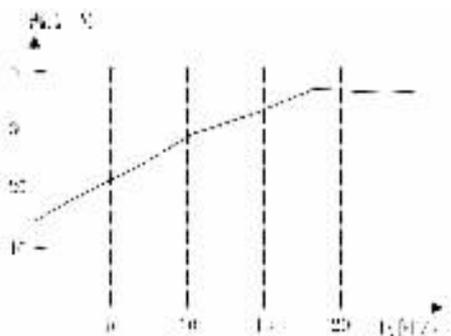


图 5 温度实验曲线

7 结束语

本文提出了基于 GPRS 模块的无线传感器网络网关节点的设计和实现方案;该方案采用低功耗 ARM 处理器 AT91R40008 为核心, 利用内嵌 TCP/IP 协议栈的 GPRS 模块 SIM100 为网络的数据出口, 较好地解决了无线传感器网络数据到监控中心的传输

问题。

参考文献:

- [1] 孙利民, 李建中, 陈渝, 等. 无线传感器网络 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2005.
[2] 欧杰峰, 刘兴华. 基于 CDMA 模块的无线传感器网络网关的实现 [J]. 计算机工程, 2007, 33(1): 115-124.
[3] AT91R40008 summary [EB/OL]. (2006-04-12) [2007-03-19]. http://www.atmel.com/dyn/resources/prod_documents/doc1354.pdf.
[4] AT91R40008 electrical characteristics [EB/OL]. (2005-12-12) [2007-03-19]. http://www.atmel.com/product/AT91SAM32-bit_ARM-based_Microcontrollers/AT91R40008.
[5] TR3000 433.92mhz Hybrid Transceiver [EB/OL]. [2007-03-21] <http://doc.chipfind.ru/rfm/tr3000.htm>.
[6] SHT1X/SHT7X Humidity & Temperature Sensor [EB/OL]. (2003-03) [2007-03-23]. <http://www.parallax.com/dl/docs/prod/datast/shtx.pdf>.

(责任编辑 游中胜)