非齐次 Moisil-Theodorsco 方程组的 Riemann 边值问题*

李觉友
(重庆师范大学 数学与计算机科学学院，重庆 400047)

摘　要：考虑了在 $\mathbf{R}^3$ 空间中的非齐次 Moisil-Theodorsco 方程组的 Riemann 边值问题。本文首先研究 Moisil-Theodorsco 方程组的 Cauchy 型积分，Plemelj 公式，进而得到了非齐次 Moisil-Theodorsco 方程组解的积分表示和它的 Plemelj 公式，在此基础上还讨论了它的一个 Riemann 边值问题。最后运用积分方程方法和 Banach 不动点定理证明了该 Riemann 边值问题解的存在性和唯一性，同时也给出了其解的积分表示式。

关键词：Moisil-Theodorsco 方程组；Plemelj 公式；Riemann 边值问题
中图分类号：O175.5　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2007)04-0026-04

1 预备知识

各种边值问题的研究意义重大。在平面上已有很多经典结果[1-2]。近年来，许多国内外学者把研究平面上边值问题的理论和方法推广并运用到高维空间中来，得到了许多优美的结果。如文献[3]研究了空间中的 Cauchy-Riemann 方程组，文献[4]研究了空间中线性和非线性 Riemann 边值问题。在 2006 年，杨丕文又研究了 $\mathbf{R}^3$ 中的 Moisil-Theodorsco 方程组 Riemann-Hilbert 边值问题。随后，文献[5]考察了 Moisil-Theodorsco 方程组的一个带常系数的 Riemann 边值问题。

本文主要在文献[5-6]工作基础上，运用高维空间研究边值问题的方法[7-9]讨论了 $\mathbf{R}^3$ 空间中的非齐次 Moisil-Theodorsco 方程组的 Plemelj 公式和一个带变系数的 Riemann 边值问题，从而推广了文献[4，6]的某些结果。

Moisil 和 Theodorsco 在文献[3]中考虑了 $\mathbf{R}^3$ 中的复值函数 $\Psi_1(x,y,t)$，$\Psi_2(x,y,t)$ 的一阶偏微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Psi_1}{\partial t}-\left(\dfrac{\partial}{\partial x}-\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\Psi_2=0\\[2mm] \dfrac{\partial\Psi_2}{\partial t}-\left(\dfrac{\partial}{\partial x}-\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial y}\right)\Psi_1=0\end{cases}\tag{1}$$

设 $\partial=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial t} & -2\dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2\dfrac{\partial}{\partial\bar z} & \dfrac{\partial}{\partial t}\end{pmatrix}$，$\bar\partial=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial t} & 2\dfrac{\partial}{\partial z}\\ -2\dfrac{\partial}{\partial\bar z} & \dfrac{\partial}{\partial t}\end{pmatrix}$，这里 $\dfrac{\partial}{\partial\bar z}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}+\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$，$\dfrac{\partial}{\partial z}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}-\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$。

记 $\mathbf{R}^3=\mathbf{C}\times\mathbf{R}$，$\mathbf{R}^3$ 中的点 $\eta=(x,y,t)=(z,t)$，于是方程(1)式可写为 $\partial\Psi(\eta)=0$，$\eta\in D\subset\mathbf{R}^3$，此时则称 $\Psi(\eta)$ 是 D 内的正则函数，其中 $\Psi(\eta)=\begin{pmatrix}\Psi_1(\eta)\\ \Psi_2(\eta)\end{pmatrix}$是复值向量函数。

若 $U=\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}$是一复值向量函数，定义其范数 $U=\sqrt{|u_1|^2+|u_2|^2}$，设

$$\Theta=\left\{Z\mid Z=\begin{pmatrix}z_1 & \bar z_2\\ -\bar z_2 & \bar z_1\end{pmatrix}\text{是一个 }2\times 2\text{ 的复距阵}\right\},$$

并定义其范数 $Z=\sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2}$。

对 $\forall Z,Z'\in\Theta$，易验证 $|ZZ'|=|Z||Z'|$。设 $Z\in\Theta$，U 是个 2×1 复矩阵，则 $|ZU|\leqslant|Z||U|$。

在文献[6]中，作者研究了非齐次 Moisil-Theodorsco 方程组

$$\partial F=f\tag{2}$$

在 $\mathbf{R}^3$ 中的解及其性质，提出并解决了相应的 Riemann-Hilber 边值问题。

以下设 D 是 $\mathbf{R}^3$ 中的一个有界区域，并具有光滑边界或分片光滑的边界 Γ，并记 Γ 的内部为 D^+，记 $\mathbf{R}^3\backslash\bar D$ 为 D^-。由散度定理可得如下引理。

引理 1　(Pempeiu 公式) 若向量函数 $U(\eta)\in C^1(D)\cap C(\bar D)$，则

* 收稿日期：2007-03-19　修回日期：2007-07-30
资助项目：国家自然科学基金(No. 10671207)
作者简介：李觉友(1980-)，男，四川大竹人，助教，研究方向为复分析中的边值问题。

$$U(\eta)=\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma}\frac{(\zeta-\eta)}{|\zeta-\eta|^{3}}n(\zeta)U(\zeta)\mathrm{d}S_{\zeta}-\frac{1}{4\pi}\int_{D}\frac{(\zeta-\eta)}{|\zeta-\eta|^{3}}\partial U(\zeta)\mathrm{d}V_{\zeta},\eta\in D。$$

其中 $\zeta=(z',t'),\eta=(z,t)$,$(\zeta-\eta)=\begin{pmatrix}t'-t & \bar{z}'-\bar{z}\\-(z'-z) & t'-t\end{pmatrix}$ 是复二阶矩阵,$n(\zeta)=\begin{pmatrix}\cos\gamma & -\cos\alpha+\mathrm{i}\cos\beta\\ \cos\alpha+\mathrm{i}\cos\beta & \cos\gamma\end{pmatrix}$,$\alpha,\beta,\gamma$ 分别是曲面 Γ 上点 ζ 处的外法线方向与 x,y,t 轴的夹角。设 $f(\eta)$ 为 D 中的复值向量函数,引进积分算子 $\tilde{T}f=-\frac{1}{4\pi}\int_{D}\frac{(\zeta-\eta)}{|\zeta-\eta|^{3}}f(\zeta)\mathrm{d}V_{\zeta}$。

引理2[5] 若 $f\in L_p(\bar{D})$,$p>3$,则 $\tilde{T}f$ 是(2)式的分布解,即 $\partial(\tilde{T}f)=f$,且 $\tilde{T}f\in C_{\alpha}(\bar{D})$,其中 $\alpha=1-\frac{3}{p}$。

定义1 设 $\lambda(x)$ 是一个 $n\times m$ 的复值矩阵函数,如果 $\lambda(x)$ 满足以下条件

$$|\lambda(x)-\lambda(y)|=\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}|\lambda_{ij}(x)-\lambda_{ij}(y)|^{2}}\leqslant B|x-y|^{\beta},x,y\in\Gamma,0<\beta<1。$$

其中 B 是一个不依赖于 x,y 的正常数,则称 $\lambda(x)$ 为 Γ 上的 Hölder 连续函数,记 Γ 上的 Hölder 连续函数集合为 $H(\Gamma,\beta)$。任取 $\varphi\in H(\Gamma,\beta)$,定义 φ 的范数为 $\|\varphi\|_{\beta}=C(\varphi,\Gamma)+H(\varphi,\Gamma,\beta)$,其中

$$C(\varphi,\Gamma)=\max_{t\in\Gamma}|\varphi(t)|,$$

$$H(\varphi,\Gamma,\beta)=\sup_{t_1\neq t_2,t_1,t_2\in\Gamma}\frac{|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|}{|t_1-t_2|^{\beta}},$$

显然 $H(\Gamma,\beta)$ 构成 Banach 空间,并且易证 $\|f+g\|_{\beta}\leqslant\|f\|_{\beta}+\|g\|_{\beta}$,$\|fg\|_{\beta}\leqslant J\|f\|_{\beta}\|g\|_{\beta}$,其中 J 为正常数,$f,g\in H(\Gamma,\beta)$。

2 方程 $\partial F=f$ 的解和 Plemelj 公式

设 $\varphi(\zeta)$ 为 Γ 上的 Hölder 连续函数,定义 Cauchy 型积分

$$\Phi(\eta)=\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma}\frac{(\zeta-\eta)}{|\zeta-\eta|^{3}}n(\zeta)\varphi(\zeta)\mathrm{d}S_{\zeta},\eta\notin\Gamma \quad (3)$$

显然 $\Phi(\eta)$ 在 Γ 外正则,且 $\Phi(\infty)=0$。

定理1 (Plemelj 公式)设 $\varphi(\zeta)\in H(\Gamma,\beta)$,$0<\beta<1$,当 ζ 分别从 D^+,D^- 趋于 $\eta\in\Gamma$ 时,Cauthy 型积分(3)式的极限值相应的记为 $\Phi^+(\eta)$,$\Phi^-(\eta)$,则有

$$\begin{cases}\Phi^+(\eta)=\frac{1}{2}\varphi(\eta)+\frac{1}{2}(K\varphi)(\eta),\eta\in\Gamma\\ \Phi^-(\eta)=-\frac{1}{2}\varphi(\eta)+\frac{1}{2}(K\varphi)(\eta),\eta\in\Gamma\end{cases}$$

其中

$$(K\varphi)(\eta)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{(\zeta-\eta)}{|\zeta-\eta|^{3}}n(\zeta)\varphi(\zeta)\mathrm{d}S_{\zeta},\eta\in\Gamma。$$

根据引理1和 Cauchy 型积分(3)式有定理2。

定理2 设 $f\in L_p(\bar{D})$,$p>3$,则非齐次 Moisil-Theodorsco 方程组(2)式的解可积分表示为

$$F(\zeta)=\Phi(\zeta)+\tilde{T}f(\zeta),\zeta\in D \quad (4)$$

其中 $\Phi(\zeta)$ 是 D 内的正则函数。

定理3 $f(\zeta)\in L_p(\mathbf{R}^3)$,$p>3$,且 $f(\infty)=0$,则

$$\begin{cases}F^+(\eta)=\frac{1}{2}\varphi(\eta)+\frac{1}{2}(K\varphi)(\eta)+\tilde{T}f(\eta),\eta\in\Gamma\\ F^-(\eta)=-\frac{1}{2}\varphi(\eta)+\frac{1}{2}(K\varphi)(\eta)+\tilde{T}f(\eta),\eta\in\Gamma\end{cases} \quad (5)$$

定理4 设 $\varphi\in H(\Gamma,\beta)$,$0<\beta<1$,则

$$\|K\varphi\|_{\beta}\leqslant c\|\varphi\|_{\beta} \quad (6)$$

这里 c 是不依赖于 φ 的正常数。

证明 由 Cauchy 积分主值知

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{(\zeta-\eta)}{|\zeta-\eta|^{3}}n(\zeta)\mathrm{d}S_{\zeta}=1,\eta\in\Gamma,$$

所以

$$|K\varphi|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{(\zeta-\eta)}{|\zeta-\eta|^{3}}n(\zeta)[\varphi(\zeta)-\varphi(\eta)]\mathrm{d}S_{\zeta}+\varphi(\eta)\right|\leqslant c'_0H(\varphi,\Gamma,\beta)\int_{\Gamma}\frac{1}{|\zeta-\eta|^{2-\beta}}\mathrm{d}S_{\zeta}+|\varphi(\eta)|\leqslant c_0H(\varphi,\Gamma,\beta)+C(\varphi,\Gamma) \quad (7)$$

这里 c_0 是不依赖于 φ 的正常数。

为了考察 $H(K\varphi,\Gamma,\beta)$,任取 $\eta_1,\eta_2\in\Gamma$,记 $\delta=|\eta_1-\eta_2|$,先设 $4\delta<d$(d 为 D 的直径),以 η_1 为球心,2δ 为半径作球,记 Γ 的位于该球内部的部分为 Γ_1,记 $\Gamma_2=\Gamma-\Gamma_1$,由此有

$$|K\varphi(\eta_1)-K\varphi(\eta_2)|\leqslant\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_1}\frac{(\zeta-\eta_1)}{|\zeta-\eta_1|^{3}}n(\zeta)[\varphi(\zeta)-\varphi(\eta_1)]\mathrm{d}S_{\zeta}\right|+\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_1}\frac{(\zeta-\eta_2)}{|\zeta-\eta_2|^{3}}n(\zeta)[\varphi(\zeta)-\varphi(\eta_2)]\mathrm{d}S_{\zeta}\right|+\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_2}\frac{(\zeta-\eta_1)}{|\zeta-\eta_1|^{3}}n(\zeta)[\varphi(\zeta)-\varphi(\eta_1)]\mathrm{d}S_{\zeta}-\right.$$

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_2}\frac{(\zeta-\eta_2)}{|\zeta-\eta_2|^3}n(\zeta)[\varphi(\zeta)-\varphi(\eta_2)]\mathrm{d}S_\zeta\right| +$$

$$|\varphi(\eta_1)-\varphi(\eta_2)| = J_1+J_2+J_3+|\varphi(\eta_1)-\varphi(\eta_2)|$$

对 J_1 估计，有 $J_1 \leqslant c_1H(\varphi,\Gamma,\beta)\int_{\Gamma_1}\frac{\mathrm{d}S_\zeta}{|\zeta-\eta_1|^{2-\beta}} \leqslant$

$$c''_1H(\varphi,\Gamma,\beta)\int_0^{2\delta}\frac{\mathrm{d}\delta}{\delta^{1-\beta}} = c_1H(\varphi,\Gamma,\beta)|\eta_1-\eta_2|^\beta$$

类似地有 $J_2 \leqslant c_2H(\varphi,\Gamma,\beta)|\eta_1-\eta_2|^\beta$，以下再估计 J_3。

$$J_3 \leqslant \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_2}\left[\frac{(\zeta-\eta_1)}{|\zeta-\eta_1|^3}-\frac{(\zeta-\eta_2)}{|\zeta-\eta_2|^3}\right]n(\zeta)[\varphi(\zeta)-\varphi(\eta_2)]\mathrm{d}S_\zeta\right| +$$

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_2}\frac{(\zeta-\eta_1)}{|\zeta-\eta_1|^3}n(\zeta)[\varphi(\eta_1)-\varphi(\eta_2)]\mathrm{d}S_\zeta\right| = J_3^1+J_3^2$$

利用 Hile 引理[7]，有

$$\left|\frac{(\zeta-\eta_1)}{|\zeta-\eta_1|^3}-\frac{(\zeta-\eta_2)}{|\zeta-\eta_2|^3}\right| \leqslant$$

$$\frac{|\eta_1-\eta_2|}{|\zeta-\eta_1|\,|\zeta-\eta_2|^2}+\frac{|\eta_1-\eta_2|}{|\zeta-\eta_1|^2\,|\zeta-\eta_2|}$$

因为对任何 $\zeta\in\Gamma_2$，有 $\frac{2}{3}\leqslant\frac{|\zeta-\eta_1|}{|\zeta-\eta_2|}\leqslant 2$，故 $|\zeta-\eta_2|\geqslant\frac{1}{2}|\zeta-\eta_1|$。于是有

$$J_3^1 \leqslant c_3^1H(\varphi,\Gamma,\beta)|\eta_1-\eta_2|^\beta$$

再由 $\varphi\in H(\Gamma,\beta)$，易知

$$J_3^2 \leqslant c_3^2H(\varphi,\Gamma,\beta)|\eta_1-\eta_2|^\beta$$

所以 $J_3\leqslant c_3H(\varphi,\Gamma,\beta)|\eta_1-\eta_2|^\beta$，此处 c_3 是与 η_1，η_2 无关的正常数。综上，当 $4|\eta_1-\eta_2|<d$ 时，有

$$|K\varphi(\eta_1)-K\varphi(\eta_2)| \leqslant cH(\varphi,\Gamma,\beta)|\eta_1-\eta_2|^\beta \quad (8)$$

此处 c' 是与 η_1，η_2 无关的正常数。明显，对 $4|\eta_1-\eta_2|>d$ 也有上式估计式。从而由(7)和(8)式知，存在正常数 c 使 $\|K\varphi\|_\beta\leqslant c\|\varphi\|_\beta$。　证毕

3 Riemann 边值问题

问题 R　寻求 D^+，D^- 内满足方程(2)式的解 $F(\zeta)$，使它在 $D^++\Gamma$，$D^-+\Gamma$ 上连续，且 $F(\infty)=0$，并适合 Riemann 边值条件

$$F^+(\eta) = G(\eta)F^-(\eta)+g(\eta) \quad (9)$$

其中 $G(\eta)=\begin{pmatrix} g_{11}(\eta) & g_{12}(\eta)\\ g_{21}(\eta) & g_{22}(\eta)\end{pmatrix}$，$g(\eta)=\begin{pmatrix} g_1(\eta)\\ g_2(\eta)\end{pmatrix}$ 是 Γ 上已知的 Hölder 连续函数，称以上 Riemann 问题为问题 **R**。

将(5)式代入(9)式，并整理得

$$\varphi(\eta) = \frac{E-G(\eta)}{2}[\varphi(\eta)-(K\varphi)(\eta)] +$$

$$g(\eta)+[G(\eta)-E](\tilde{T}f)(\eta),\ \eta\in\Gamma \quad (10)$$

这里 E 为二阶单位矩阵。若令

$$(R\varphi)(\eta) = \frac{E-G(\eta)}{2}[\varphi(\eta)-(K\varphi)(\eta)] +$$

$$g(\eta)+[G(\eta)-E](\tilde{T}f)(\eta)$$

于是问题 R 就转化为求解以下与之等价的奇异积分方程

$$R\varphi = \varphi \quad (11)$$

定理 5　设 $G(\eta)$，$g(\eta)\in H(\Gamma,\beta)$，$f\in L_p(\mathbf{R}^3)$，$p>3$，$1>\beta>\alpha$，$\alpha=1-\frac{3}{p}$，且 $\|g\|_\beta\leqslant l$，$\|\tilde{T}f\|_\beta\leqslant l$，$l$ 是正常数，则当 $m>l>0$，且满足不等式 $0<\|E-G(\eta)\|_\beta<\frac{m-l}{m(1+c)+l}$ 时，问题 R 存在唯一解，解的积分表示可由(4)式和(3)式给出，其中常数 c 由(6)式确定，m 是给定的正常数（满足 $\|\varphi\|_\beta\leqslant m$）。

证明　取 Banach 空间 $H(\Gamma,\beta)$ 中的一个闭子集 $B=\{\varphi\,|\,\varphi\in H(\Gamma,\beta),\|\varphi\|_\beta\leqslant m\}$，由于

$$\|R\varphi\|_\beta \leqslant \frac{\|E-G\|_\beta}{2}(1+c)\|\varphi\|_\beta+\|g\|_\beta+$$

$$\|E-G\|_\beta\|\tilde{T}f\|_\beta \leqslant$$

$$\|E-G\|_\beta[m(1+c)+l]+l\leqslant m$$

表明 R 是把集合 B 映到自身的一个映射。

又对 $\forall\varphi_1$，$\varphi_2\in H(\Gamma,\beta)$，有

$$\|R\varphi_1-R\varphi_2\|_\beta \leqslant \frac{\|E-G\|_\beta}{2}[\|\varphi_1-\varphi_2\|_\beta+$$

$$c\|\varphi_1-\varphi_2\|_\beta] \leqslant \frac{m-l}{m(1+c)+l}(1+c)\|\varphi_1-\varphi_2\|_\beta$$

由此可得 $\|R\varphi_1-R\varphi_2\|_\beta\leqslant q\|\varphi_1-\varphi_2\|_\beta$，$0<q<1$，则 R 是从集合 B 映到自身的一个压缩映射。

根据 Banch 不动点定理可知线性奇异积分方程(11)式存在唯一满足 H（Hölder 连续）的解，从而问题 R 有唯一适合 H 的解，解可由(4)式和(3)式积分表示，且解还可用逐次逼近法求得。　证毕

注　当 $G(\eta)$ 为可逆常数矩阵时，定理 5 即文献[6]的定理 5。

参考文献：

[1] VEKUA I N. Generalized Analytic Functions [M]. London: Pergamon Press, 1962.

[2] 闻国椿. 共形映射与边值问题[M]. 北京:高等教育出版社, 1985.

[3] MOISIL G C, THEODORESCO N. Fonections Holomorphies Dans l'Espass [J]. Mathematica, 1931, 5:142-159.

[4] 黄烈德. 空间的线性和非线性 Hilbert 边值问题解的存在性和唯一性定理[J]. 同济大学学报, 1981(2): 58-71.

[5] 姚益民. Moisil-Theodorsco 方程组的 Riemann 边值问题[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2006, 29(2): 188-191.

[6] YANG Pi-wen. The Riemann-Hilbert Boundary Value Problem for the Moisil-Theodorsco System [J]. 数学物理学报, 2006, 26A(7): 1057-1063.

[7] 黄沙. Clifford 分析中的一个带位移的非线性边值问题[J]. 系统科学与数学, 1991, 11(4): 336-345.

[8] XU Zhen-yuan. On Linear and Nonlinear Riemann-Hilbert Problem for Regular Functon with in a Clifford Algebra [J]. Chin Ann of Math, 1990, 11B(3): 349-358.

[9] 李觉友, 杨丕文. Clifford 分析中的一类广义正则函数的非线性边值问题[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2006, 29(1): 30-33.

The Riemann Boundary Value Problem in Inhomogeneous Moisil-Theodorsco System

LI Jue-you

(College of Mathematics and Computer, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: It is well known that function theory methods becomes, in recent years, a powerfull mathematical tool for the treatment of boundary value problems which have a lots of application in mathematical physics and engineering in domains over Eulidean spaces of higher dimension. In this paper, the Riemann boundary value problem is investigated in inhomogeneous Moisil-Theodorsco system $\partial F = f$ in the D which is a bounded domain of $\mathbf{R}^3$ with smooth or piece smooth boundary Γ. Found is a solution $F(\eta)$ of equation $\partial F = f$ in the D, which is continuous in $\overline{D}$ and satisfying the Riemann boundary condition $F^+(\eta) = G(\eta) F^-(\eta) + g(\eta), \eta \in \Gamma$ where $G(\eta), g(\eta) \in H(\Gamma, \beta)$ are given complex value function on Γ. To deal with the Riemann boundary value problem, first of all, we study some properties of the Cauchy type integral and the Plemelj formula in Moisil-Theodorsco system, and then give the Plemelj formula and the integral expression of the solution in inhomogeneous Moisil-Theodorsco system. Secondly, we estimate the singular integral operator K understood in the sense of Cauchy principal value, which is a bounded linear operator mapping from the function space $H(\Gamma, \beta)$ into itself. Finally, we apply the method of integral equations and Banach fixed point theorem, existence and uniqueness of the solution for the above mentioned boundary value problem have already proved. At the same time, the precisely integral expression of its solution is also obrained.

Key words: Moisil-Theodorsco system; plemelj formula; riemann boundary value problem

(责任编辑 黄 颖)