关于不定方程 $x^3+27=19y^2$ *

李双娥
（重庆师范大学 数学与计算机科学学院，重庆 400047）

摘 要：不定方程 $x^3\pm 27=Dy^2(D>0)$ 的研究曾引起了一些学者的兴趣，曹玉书确立了当 D 不含 $6k+1$ 形状的素数奇次幂因子时的全部整数解，而当含有 $6k+1$ 形状的素数因子时，方程的求解比较困难。本文利用递归数列、同余式和平方剩余的方法，讨论了不定方程 $x^3+27=19y^2$ 在 $3|x$ 及 $3\nmid x$ 情况下的整数解。其中 $3\nmid x$ 对又分了情形 Ⅰ $x+3=19u^2, x^2-3x+9=v^2, y=uv$；情形 Ⅱ $x+3=u^2, x^2-3x+9=19v^2, y=uv$ 这两种情况。最后得到不定方程 $x^3+27=19y^2$ 仅有整数解 $(x,y)=(-3,0),(24,\pm 9),(-2,\pm 1)$ 的结论。

关键词：不定方程；整数解；递归数列；平方剩余
中图分类号：O156.1 文献标识码：A 文章编号：1672-6693(2007)04-0030-03

关于不定方程 $x^3\pm 27=Dy^2(D>0)$ 的研究曾引起一些学者的兴趣[1-2]，当 D 无 $6k+1$ 形状的素数奇次幂因子时，其全部解已由曹玉书[3]得到；但当 D 有 $6k+1$ 形状的素因数时，方程的求解较为困难。笔者证明了 $x^3-27=7y^2$ 仅有平凡解[4]。利用递归数列、同余式和平方剩余证明了不定方程 $x^3+27=19y^2$ 仅有整数解 $(x,y)=(-3,0),(24,\pm 9),(-2,\pm 1)$。

引理[5] 不定方程 $x^3+1=57y^2$ 仅有整数解 $(x,y)=(-1,0),(8,\pm 3)$。

定理 不定方程

$$x^3+27=19y^2 \tag{1}$$

仅有整数解 $(x,y)=(-3,0),(24,\pm 9),(-2,\pm 1)$。

证明 当 $3|x$ 时，易知 $9|y$，设 $x=3x_1, y=9y_1$，则(1)式化为 $x_1^3+1=57y_1^2$，由引理可知 $(x_1,y_1)=(-1,0),(8,\pm 3)$，故 $(x,y)=(-3,0),(24,\pm 9)$。

当 $3\nmid x$ 时，(1)式化为 $(x+3)(x^2-3x+9)=19y^2$，易知 $(x+3,x^2-3x+9)=1$，故(1)式存在下列两种可能的分解：

$$x+3=19u^2, x^2-3x+9=v^2, y=uv \tag{2}$$

$$x+3=u^2, x^2-3x+9=19v^2, y=uv \tag{3}$$

以下分别讨论这两种情形下(1)式的整数解。

由(2)式中的第二式得 $(2x-3)^2-(2v)^2=-27$，解得 $x=-5,8,0,3$ 均不满足(2)式的第一式，故该情形无(1)式的解。

将(3)式中的第二式化为 $(2x-3)^2-19(2v)^2=-27$，易知方程 $x^2-19y^2=-27$ 的全部整数解[6]由以下 4 个非结合类：

$$x_n+y_n\sqrt{19}=\pm(7+2\sqrt{19})(u_n+v_n\sqrt{19})=\pm(7+2\sqrt{19})(170+39\sqrt{19})^n, n\in Z \tag{4}$$

$$\bar{x}_n+\bar{y}_n\sqrt{19}=\pm(-7+2\sqrt{19})(u_n+v_n\sqrt{19})=\pm(-7+2\sqrt{19})(170+39\sqrt{19})^n, n\in Z \tag{5}$$

$$x'_n+y'_n\sqrt{19}=\pm(12+3\sqrt{19})(u_n+v_n\sqrt{19})=\pm(12+3\sqrt{19})(170+39\sqrt{19})^n, n\in Z \tag{6}$$

$$\bar{x}'_n+\bar{y}'_n\sqrt{19}=\pm(-12+3\sqrt{19})(u_n+v_n\sqrt{19})=\pm(-12+3\sqrt{19})(170+39\sqrt{19})^n, n\in Z \tag{7}$$

其中 $\pm(u_n+v_n\sqrt{19})=\pm(170+39\sqrt{19})^n$ 给出 Pell 方程 $U^2-19V^2=1$ 的全部整数解，$170+39\sqrt{19}$ 是其基本解，因此有 $2x-3=\pm x_n$ 或 $\pm\bar{x}_n$ 或 $\pm x'_n$ 或 $\pm\bar{x}'_n$。但易证 $\bar{x}_n=-x_n, \bar{x}'_n=-x'_n$，因此有 $2x-3=x_n$ 或 $\bar{x}_n$ 或 x'_n 或 $\bar{x}'_n$。由 $x+3=u^2$ 得

$$2u^2=x_n+9 \tag{8}$$

或

$$2u^2=\bar{x}_n+9 \tag{9}$$

或

$$2u^2=x'_n+9 \tag{10}$$

或

$$2u^2=\bar{x}'_n+9 \tag{11}$$

但对于(10)、(11)式，由(6)、(7)式可得 $3|u$，

* 收稿日期：2006-12-13
作者简介：李双娥(1978-)，女，江西鹰潭人，硕士研究生，研究方向为数论。

因 $y = uv$,从而 $3 \mid y$,故 $3 \mid x$ 与 $3 \nmid x$ 矛盾,所以只须考虑(8)、(9)式。显然必须 $x_n \geqslant -9$,$\bar{x}_n \geqslant -9$,从而(4)、(5)式只须取

$$x_n + y_n\sqrt{19} = \pm(7+2\sqrt{19})(u_n + v_n\sqrt{19}) = (7+2\sqrt{19})(170+39\sqrt{19})^n, n \geqslant 0 \quad (12)$$

$$\bar{x}_n + \bar{y}_n\sqrt{19} = \pm(-7+2\sqrt{19})(u_n + v_n\sqrt{19}) = (-7+2\sqrt{19})(170+39\sqrt{19})^n, n \geqslant 0 \quad (13)$$

先讨论(8)式,由(12)式得递归关系

$$x_{n+2} = 340x_{n+1} - x_n, x_0 = 7, x_1 = 2672$$

由上式易知 $n \equiv 0 \pmod 2$,但对上式取模3,当 $n \equiv \pmod 2$ 时,$x_n \equiv 1 \pmod 3$,故 $2u^2 \equiv 1 \pmod 3$,这不可能。

下面再来讨论(9)式,由(13)式易得递归关系

$$\bar{x}_{n+2} = 340\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n, \bar{x}_0 = -7, \bar{x}_1 = 292 \quad (14)$$

$$u_{n+2} = 340u_{n+1} - u_n, u_0 = 1, u_1 = 170 \quad (15)$$

$$v_{n+2} = 340v_{n+1} - v_n, v_0 = 0, v_1 = 39 \quad (16)$$

$$\bar{x}_n = -7u_n + 38v_n, x_{n+2kt} \equiv (-1)^t x_n \pmod{u_k} \quad (17)$$

$$u_{2n} = u_n^2 + 19v_n^2, v_{2n} = 2u_nv_n, u_n^2 - 19v_n^2 = 1 \quad (18)$$

由(14)易知 $n \equiv 0 \pmod 2$,即 $n \equiv 0,2 \pmod 4$。

1) mod 5,排除 $n \equiv 2 \pmod 4$,此时 $\bar{x}_n + 9 \equiv 1 \pmod 5$,剩下 $n \equiv 0 \pmod 4$,等价于 $n \equiv 0,4,8 \pmod{12}$。

2) mod 31,排除 $n \equiv 1,2 \pmod 3$,此时 $\bar{x}_n + 9 \equiv 22,3 \pmod{31}$,剩下 $n \equiv 0 \pmod 3$,又 $n \equiv 0 \pmod 4$,故 $n \equiv 0 \pmod{12}$,即 $n \equiv 0,12,24,36 \pmod{48}$。

3) mod 47,排除 $n \equiv 12,36 \pmod{48}$,此时 $\bar{x}_n + 9 \equiv 35,30 \pmod{47}$,剩下 $n \equiv 0,24 \pmod{48}$,故 $n \equiv 0 \pmod{24}$。

4) mod 431,排除 $n \equiv 2,3 \pmod 5$ 时,此时 $\bar{x}_n + 9 \equiv 166,84 \pmod{431}$,剩下 $n \equiv 0,1,4 \pmod 5$,又 $n \equiv 0 \pmod 2$,故 $n \equiv 0,4,6 \pmod{10}$。

5) mod 115259,排除 $n \equiv 6 \pmod{10}$,此时 $\bar{x}_n + 9 \equiv 114976 \pmod{15259}$,剩下 $n \equiv 0,4 \pmod{10}$,又 $n \equiv 0 \pmod{12}$,故 $n \equiv 0,24 \pmod{60}$。

6) mod 61,排除 $n \equiv 24 \pmod{60}$,此时 $\bar{x}_n + 9 \equiv 49 \pmod{61}$,剩下 $n \equiv 0 \pmod{60}$。

7) mod 131,排除 $n \equiv 1,2,3,4,6,7,8,9 \pmod{11}$ 时,此时 $\bar{x}_n + 9 \equiv 39,129,38,55,107,33,80,21 \pmod{131}$,剩下 $n \equiv 0,5,10 \pmod{11}$,又 $n \equiv 0 \pmod 2$,故 $n \equiv 0,10,16 \pmod{22}$。

8) mod 43,排除 $n \equiv 10 \pmod{22}$,此时 $\bar{x}_n + 9 \equiv 15 \pmod{43}$,故剩下 $n \equiv 0,16 \pmod{22}$,又 $n \equiv 0 \pmod 3$,故 $n \equiv 0,60 \pmod{66}$。

9) mod 67,排除 $n \equiv 60 \pmod{66}$ 时,此时 $\bar{x}_n + 9 \equiv 62 \pmod{67}$,故剩下 $n \equiv 0 \pmod{66}$。

综上 $n \equiv 0 \pmod{1320}$。当 $n = 0$ 时,此时 $\bar{x}_0 = -7$,给出(1)式的解 $(x,y) = (-2, \pm 1)$。

当 $n \equiv 0 \pmod{1320}$,且 $n \neq 0$ 时,令 $n = 2 \times 3 \times 5 \times 11 \times k \times 2^t$,其中 $t \geqslant 2$,$2 \nmid k$。现对 k 分两种情况讨论:

1) 当 $k \equiv -1 \pmod 4$ 时,令

$$m = \begin{cases} 3 \times 2^t, t \equiv 1,2,3,7,10,11 \pmod{12} \\ 11 \times 2^t, t \equiv 0,8,9 \pmod{12} \\ 15 \times 2^t, t \equiv 4,5,6 \pmod{12} \end{cases}$$

由(17)、(18)式可得

$$2u^2 \equiv \bar{x}_{2m} + 9 \equiv -7u_{2m} + 38v_{2m} + 9 \equiv 2u_m^2 - 304v_m^2 + 76u_mv_m \pmod{u'_{2m}} \equiv -7(u_m^2 + 19v_m^2) + 76u_mv_m + 9(u_m^2 - 19v_m^2)$$

注意到 $m \equiv 0 \pmod 4$ 时,$v_m \equiv 0 \pmod 8$,$u_m \equiv 1 \pmod 8$,$u_m^2 + 19v_m^2 \equiv 1 \pmod 8$,故

$$u^2 \equiv u_m^2 - 152v_m^2 + 38u_mv_m \pmod{u_{2m}} \quad (19)$$

又 $\left(\dfrac{u_m^2 - 152v_m^2 + 38u_mv_m}{u_{2m}}\right) = \left(\dfrac{-171v_m^2 + 38u_mv_m}{u_m^2 + 19v_m^2}\right) =$

$$\left(\frac{19v_m}{u_m^2 + 19v_m^2}\right)\left(\frac{2u_m - 9v_m}{u_m^2 + 19v_m^2}\right) = \left(\frac{u_m - 9v_m/2}{u_m^2 + 19v_m^2}\right) =$$

$$\left(\frac{u_m^2 + 19v_m^2}{|u_m - 9v_m/2|}\right) = \left(\frac{157}{|u_m - 9v_m/2|}\right) = -\left(\frac{2u_m - 9v_m}{157}\right)$$

利用递归数列(15)、(16)式对 $\{2u_m - 9v_m\}$ 取模157得周期为156的剩余类序列。根据 m 的取法,同时注意到 $\{2^t\}$ 对模156有周期12,有表1。

表1 $k \equiv -1 \pmod 4$ 情况下的数据

$t(\geqslant 2) \pmod{12}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$m \pmod{156}$	128	84	12	24	84	12	24	72	8	16	108	60
$2u_m - 9v_m \pmod{157}$	27	52	3	39	52	3	39	75	25	37	140	31

对于表1中所有 m 均有 $\left(\dfrac{2u_m - 9v_m}{157}\right) = 1$,从而(19)式给出 $1 = \left(\dfrac{u^2}{u_{2m}}\right) = -\left(\dfrac{2u_m - 9v_m}{157}\right) = -1$,矛盾。

2) 当 $k \equiv 1 \pmod 4$ 时,令

$$m = \begin{cases} 3 \times 2^t, t \equiv 1 \pmod{12} \\ 11 \times 2^t, t \equiv 3,4,9 \pmod{12} \\ 55 \times 2^t, t \equiv 0,2,5,6,7,8,10,11 \pmod{12} \end{cases}$$

由(17)、(18)式可得

$$2u^2 \equiv -\bar{x}_{2m} + 9 \equiv 7u_{2m} - 38v_{2m} + 9 \equiv 7(u_m^2 + 19v_m^2) -$$

$$76u_m v_m + 9(u_m^2 - 19v_m^2) \equiv 16u_m^2 - 38v_m^2 - 76u_m v_m \pmod{u_{2m}}$$

即 $$u^2 \equiv 8u_m^2 - 19v_m^2 - 38u_m v_m \pmod{u_{2m}} \quad (20)$$

类似地，有 $\left(\frac{8u_m^2 - 19v_m^2 + 38u_m v_m}{u_{2m}}\right) = -\left(\frac{2u_m + 9v_m}{157}\right)$，对 $\{2u_m + 9v_m\}$ 取模 157 同样得周期为 156 的剩余类序列。根据 m 的取法，有表 2。

表 2 $k \equiv 1 \pmod 4$ 情况下的数据

$t(\geqslant 2) \pmod{12}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$m \pmod{156}$	16	84	64	88	20	44	88	20	40	16	4	8
$2u_m + 9v_m \pmod{157}$	44	75	122	46	100	101	46	100	11	44	51	110

对于表 2 中所有 m 均有 $\left(\frac{2u_m + 9v_m}{157}\right) = 1$，从而 (20) 式给出 $1 = \left(\frac{u^2}{u_{2m}}\right) = -\left(\frac{2u_m - 9v_m}{157}\right) = -1$，矛盾。

故情形 2) 给出不定方程 (1) 的整数解 $(x, y) = (-2, \pm 1)$。

综上所述，不定方程 (1) 仅有整数解 $(x, y) = (-3, 0), (24, \pm 9), (-2, \pm 1)$。 证毕

参考文献：

[1] 罗明. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3) = 7y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 重庆师范学院学报(自然科学版)，1991, 8(1): 1-8.

[2] 郭育红，张先迪. 关于一类不定方程的正整数解数 [J]. 四川师范大学学报(自然科学版)，2006, 29(2): 197-199.

[3] 曹玉书. 关于丢番图方程 $x^3 \pm 27 = Dy^2$ [J]. 黑龙江大学自然科学学报，1988(2): 4-8.

[4] 李双娥. 关于不定方程 $x^3 - 27 = 7y^2$ [J]. 重庆文理学院学报(自然科学版)，2007(2): 16-17.

[5] 段辉明. 关于丢番图方程 $x^3 + 1 = Dy^2$ [D]. 重庆师范大学硕士毕业论文，重庆: 重庆师范大学，2006: 27-33.

[6] 柯召，孙琦. 谈谈不定方程 [M]. 上海: 上海教育出版社，1980: 28-35.

On the Diophantine Equation $x^3 + 27 = 19y^2$

LI Shuang-e

(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: The study of the Diophantine equation $x^3 \pm 27 = Dy^2 (D > 0)$ has caused some authors´ interests, such as Cao Yushu, who determines all the integer solutions when D has no prime odd powers factors in the form of $6k + 1$. But it is difficult when D has prime factors in the form of $6k + 1$. In this paper it is by using recursive series, and with the I-square residual method, discussed the Diophantine equation $x^3 + 27 = 19y^2$ in both cases of $3 \mid x$ and $3 \nmid x$ the integer solution. The case of $3 \nmid x$ also divided into case Ⅰ $x + 3 = 19u^2$, $x^2 - 3x + 9 = v^2$, $y = uv$; And case Ⅱ $x + 3 = u^2$, $x^2 - 3x + 9 = 19v^2$, $y = uv$. At last, it is proved that the Diophantine equation has only integer solutions $(x, y) = (-3, 0), (24, \pm 9), (-2, \pm 1)$.

Key words: integer solution; diophantine; recurrent sequence; quadratic residue

(责任编辑　欧红叶)