运筹学与控制论

通过转化来求解广义半无限极大极小规划问题*

刘 芳,王长钰

(曲阜师范大学 运筹与管理学院,山东 曲阜 273165)

摘 要 :研究了一类广义半无限极大极小规划问题,其下层规划的约束集合是一个集值映射。对于这类广义半无限问题,首先利用修正障碍型增广拉格朗日函数将它们在一定条件下转化为标准的半无限极大极小问题,使它们具有相同的局部与全局最优解,从而为这类广义半无限问题提供了可行的解法。给出了实现这种等价转化的两个转化条件 :一个是充分与必要条件,另一个是充分条件。与已有文献中的相关转化条件相比,它们均不需要在紧致集上进行转化,而且后一个充分条件在实际中易于验证。最后通过这种转化,给出了这类广义半无限问题的一个新的一阶最优性条件。

关键词 标准半无限规划 ;广义半无限极大极小规划 ;增广拉格朗日函数 ;一阶最优性条件

中图分类号 :O221.2 文献标识码 :A 文章编号 :1672-6693(2008)01-0005-05

1 预备知识

考虑广义半无限极大极小问题(P):

$$\min_{x\in\mathbf{R}^n}\psi(x) \tag{1}$$

其中,函数 $\psi:\ \mathbf{R}^n\rightarrow\mathbf{R}$ 定义为

$$\psi(x)=\sup_{y\in Z(x)}\phi(x,y) \tag{2}$$

$$Z(x)=\{y\in\mathbf{R}^m\mid f(x,y)\leqslant 0,g(y)\leqslant 0\}$$

$\phi:\ \mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\rightarrow\mathbf{R}$,$f:\ \mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\rightarrow\mathbf{R}^{r_1}$,$g:\ \mathbf{R}^m\rightarrow\mathbf{R}^{r_2}$,对于 $v=(v^1,\cdots,v^q)\in\mathbf{R}^q$,$v\leqslant 0$ 表示 $v^1\leqslant 0,\cdots,v^q\leqslant 0$。

令 $Y=\{y\in\mathbf{R}^m\mid g(y)\leqslant 0\}$,那么(2)式就可写为

$$\psi(X)=\sup_{y\in Y}\{\phi(x,y)\mid f(x,y)\leqslant 0\} \tag{3}$$

广义半无限规划问题在许多工程领域中都有着重要的应用,如最优设计问题,机器人路径问题,随机规划问题等,因此它成为应用数学中非常活跃的一个研究领域。注意到,正是(2)式中的集值映射 $Z(\cdot)$ 对 x 的依赖使得问题(P)成为广义半无限极大极小问题,并且使得问题(P)的求解变得困难起来。因此,目前对问题(P)数值方法的研究很少。如果(2)式中的集值映射 $Z(\cdot)$ 恒为一个常值集合,即 $Z(\cdot)=Z$,那么问题(P)就是一个标准的半无限极大极小问题。现在对标准的半无限规划已经有了许多有效的算法[1-10],因此,近年来有些学者通过罚函数或增广拉格朗日函数消除(3)式中的约束 $f(x,y)\leqslant 0$,从而将问题(P)转化为一个标准的半无限规划来求解。例如,在文献[11]中是通过一个不可微的精确罚函数完成了这种转化。而文献[12]则是利用文献[13]中的一个增广拉格朗日函数完成了这种转化。需要说明的是,虽然文献[12]中的转化条件要比文献[11]中的强,但是文献[12]中得到的等价的标准半无限极大极小问题要比文献[11]中的容易解决。

现在本文利用文献[14]中的修正障碍型增广拉格朗日函数消除了约束 $f(x,y)\leqslant 0$,将问题(P)转化为一个标准的半无限极大极小规划,给出了实现这种等价转化的一个充分与必要条件和一个在实际中易于验证的充分条件。它与文献[12]中的转化条件不同,并且不需要假设 Y 是紧致的,这样就通过标准的半无限极大极小问题为问题(P)提供了可行的解法。最后,在此基础上给出了问题(P)的一个新的一阶最优性条件。

本文安排如下,在第二节中,利用文献[14]中的一类增广拉格朗日函数,将问题(P)转化为一个等价的标准半无限极大极小问题。在第三节中,通过问题(P)与转化后的规划问题的等价关系,建立了问题(P)的一个一阶最优性条件。

* 收稿日期 :2007-09-24 修回日期 :2007-11-01
资助项目 :国家自然科学基金(No. 10571106) ;山东省自然科学基金(No. Y2003A02)
作者简介 :刘芳(1982-),女,山东菏泽人,硕士研究生,研究方向为数学规划。

2 增广拉格朗日函数

现在,利用文献[14]中的修正障碍型增广拉格朗日函数对问题(P)进行转化。

设
$$\bar{\psi}(\bar{x})=\sup_{y\in Y}\bar{\phi}(\bar{x},y) \tag{4}$$
其中,$\bar{x}=(x,\lambda,c)\in \mathbf{R}^{n+r_1+1}$,$x\in\mathbf{R}^n$,$\lambda\geqslant 0$,$c>0$,且
$$\bar{\phi}(\bar{x},y)=\begin{cases}\phi(x,y)-\dfrac{1}{c}\sum_{k=1}^{r_1}\lambda_k\varphi(cf^k(x,y)),y\in\Omega_c\\ -\infty,y\in Y\backslash\Omega_c\end{cases}$$
$$\Omega_c=\{y\in Y\mid cf^k(x,y)<1,\forall k\in r_1\}$$
函数 φ: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 满足以下条件:

1) φ 是二次连续可微凸函数;

2) $\varphi(0)=0$,$\varphi'(0)=1$ 和 $\varphi''(0)>0$;

3) $\lim\limits_{s\to-\infty}\varphi'(s)=0$,$\lim\limits_{s\to-\infty}\dfrac{\varphi(s)}{s}=0$。

定义 $\mathbf{R}_+^{r_1}=\{\lambda\in\mathbf{R}^{r_1}\mid\lambda\geqslant 0\}$,
$\mathbf{R}_{++}=\{s\in\mathbf{R}\mid s>0\}$。

这样,就得到了一个标准的半无限极大极小问题(P′):
$$\min_{\bar{x}\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_+^{r_1}\times\mathbf{R}_{++}}\bar{\psi}(\bar{x}) \tag{5}$$
下面研究 $\psi(x)$ 与 $\bar{\psi}(\bar{x})$ 之间的关系。

假设1 1) $\phi(\cdot,\cdot)$,$f^k(\cdot,\cdot)$,$k\in r_1=\{1,\cdots,r_1\}$,$g^k(\cdot)$,$k\in r_2=\{1,\cdots,r_2\}$ 是连续的。

2) 对 $\forall x\in\mathbf{R}^n$,$Z(x)\neq\varnothing$。

首先有定理1。

定理1 假设1成立,则对 $\forall\bar{x}=(x,\lambda,c)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_+^{r_1}\times\mathbf{R}_{++}$,有
$$\bar{\psi}(\bar{x})\geqslant\psi(x) \tag{6}$$
证明 若 $\bar{\psi}(\bar{x})=+\infty$,则(6)式显然成立。设 $\bar{\psi}(\bar{x})<+\infty$,则
$$\bar{\psi}(\bar{x})=\sup_{y\in Y}\bar{\phi}(\bar{x},y)=\sup_{y\in Y}\left\{\phi(x,y)-\frac{1}{c}\sum_{k=1}^{r_1}\lambda_k\varphi(cf^k(x,y))\mid cf^k(x,y)<1,\forall k\in r_1\right\}\geqslant$$
$$\sup_{y\in Y}\left\{\phi(x,y)-\frac{1}{c}\sum_{k=1}^{r_1}\lambda_k\varphi(cf^k(x,y))\mid f^k(x,y)\leqslant 0,\forall k\in r_1\right\}\geqslant$$
$$\sup_{y\in Y}\left\{\phi(x,y)-\frac{1}{c}\sum_{k=1}^{r_1}\lambda_k\varphi(c\cdot 0)\mid f^k(x,y)\leqslant 0,\forall k\in r_1\right\}=$$
$$\sup_{y\in Y}\{\phi(x,y)\mid f^k(x,y)\leqslant 0,\forall k\in r_1\}=\psi(x)$$
证毕

进一步,给出保证(6)式成立的一个充分与必要条件,为此设
$$v(x,\tau)=\sup_{y\in Y}\{\phi(x,y)\mid f^k(x,y)\leqslant\tau,\forall k\in r_1\}\ (\tau\geqslant 0) \tag{7}$$
由假设知 $Z(x)\neq\varnothing$,故对 $\forall\tau\geqslant 0$,集合
$$\{y\in Y\mid f^k(x,y)\leqslant\tau,\forall k\in r_1\}\neq\varnothing。$$
因此对 $\forall\tau\geqslant 0$,$v(x,\tau)>-\infty$。
$$N(\lambda,c,\delta)=\left\{\tau\geqslant 0\,\middle|\, v(x,\tau)-\frac{1}{c}\sum_{k=1}^{r_1}\lambda_k\varphi(c\tau)\geqslant\delta\right\}$$
条件A 设 $x\in\mathbf{R}^n$,存在 $\bar{\lambda}\in\mathbf{R}_+^{r_1}$,$\bar{c}\in\mathbf{R}_{++}$ 满足

1) 对 $\forall 0\leqslant\tau<\dfrac{1}{c}$,$v(x,\tau)-\dfrac{1}{c}\sum_{k=1}^{r_1}\bar{\lambda}_k\varphi(\bar{c}\tau)\leqslant v(x,0)$;

2) $\exists\delta_0<\bar{\psi}(x,\bar{\lambda},\bar{c})$,使得 $\forall\delta\in[\delta_0,\bar{\psi}(x,\bar{\lambda},\bar{c}))$,有
$$\inf\{\varphi(\tau)\mid\tau\in N(\bar{\lambda},\bar{c},\delta)\}=0。$$
定理2 假设1成立,则对给定的 $x\in\mathbf{R}^n$,存在 $\bar{\lambda}\in\mathbf{R}_+^{r_1}$,$\bar{c}\in\mathbf{R}_{++}$ 使得对 $\forall c\in\bar{c}$ 有
$$\psi(x)=\bar{\psi}(x,\bar{\lambda},c) \tag{8}$$
当且仅当条件A成立。

证明 必要性。假设 $\bar{\lambda}\in\mathbf{R}_+^{r_1}$,$\bar{c}\in\mathbf{R}_{++}$ 满足 $\psi(x)=\bar{\psi}(x,\bar{\lambda},\bar{c})$,即
$$v(x,0)=\bar{\psi}(x,\bar{\lambda},\bar{c}) \tag{9}$$
下证1),任取 $0\leqslant\tau<\dfrac{1}{c}$,有
$$v(x,0)=\bar{\psi}(x,\bar{\lambda},\bar{c})=\sup_{y\in Y}\left\{\phi(x,y)-\frac{1}{c}\sum_{k=1}^{r_1}\bar{\lambda}_k\varphi(\bar{c}f^k(x,y))\mid\bar{c}f^k(x,y)<1,\forall k\in r_1)\right\}\geqslant$$
$$\sup_{y\in Y}\left\{\phi(x,y)-\frac{1}{c}\sum_{k=1}^{r_1}\bar{\lambda}_k\varphi(\bar{c}f^k(x,y))\mid f^k(x,y)\leqslant\tau,\forall k\in r_1)\right\}\geqslant$$
$$\sup_{y\in Y}\left\{\phi(x,y)-\frac{1}{c}\sum_{k=1}^{r_1}\bar{\lambda}_k\varphi(\bar{c}\tau))\mid f^k(x,y)\leqslant\tau,\forall k\in r_1)\right\}=$$
$$\sup_{y\in Y}\{\phi(x,y)\mid f^k(x,y)\leqslant\tau,\forall k\in r_1)\}-\frac{1}{c}\sum_{k=1}^{r_1}\bar{\lambda}_k\varphi(\bar{c}\tau)=v(x,\tau)-\frac{1}{c}\sum_{k=1}^{r_1}\bar{\lambda}_k\varphi(\bar{c}\tau)$$

所以 1) 成立。

由(9) 式与 $N(\bar{\lambda},\bar{c},\delta)$ 的定义知,对任意 $\delta < \bar{\psi}(x,\bar{\lambda},\bar{c})$,有 $0 \in N(\bar{\lambda},\bar{c},\delta)$。又由 φ 的性质知,$\tau > 0$ 时,$\varphi(\tau) > 0$;$\tau = 0$ 时,$\varphi(\tau) = 0$,故

$$\forall\delta < \bar{\psi}(x,\bar{\lambda},\bar{c}),\inf\{\varphi(\tau) \mid \tau \in N(\bar{\lambda},\bar{c},\delta)\} = 0$$

即 2) 成立。

充分性。设条件 A 成立,令 $\{\delta_j\} \nearrow \bar{\psi}(x,\bar{\lambda},\bar{c})$,$\{\varepsilon_j\} \searrow 0(j \to +\infty)$,则对每一个 $j \in \{1,2,3,\cdots\}$,由条件 2) 知,$\exists \tau_j \geqslant 0$,且 $\tau_j \in N(\bar{\lambda},\bar{c},\delta_j)$,使

$$\varphi(\tau_j) \leqslant \varepsilon_j$$

由 φ 的性质可得,$\lim\limits_{j\to+\infty}\tau_j = 0$。因此当 j 充分大时,$\tau_j < \dfrac{1}{c}$,故由 1) 得

$$\delta_j \leqslant v(x,\tau_j) - \frac{1}{c}\sum_{k=1}^{r_1}\bar{\lambda}_k\varphi(\bar{c}\tau_j) \leqslant v(x,0)$$

因此有

$$\bar{\psi}(x,\bar{\lambda},\bar{c}) = \lim_{j\to+\infty}\delta_j \leqslant v(x,0) = \psi(x)$$

故由定理 1 知,$\psi(x) = \bar{\psi}(x,\bar{\lambda},\bar{c})$。又知 $\dfrac{1}{c}\varphi(cf^k(x,y))$ 是关于 $c > 0$ 的非减函数,那么 $\bar{\psi}(\bar{x})$ 是关于 $c > 0$ 的非增函数。再由定理 1 知,对 $\forall c > \bar{c}$,有 $\psi(x) = \bar{\psi}(x,\bar{\lambda},c)$。　　证毕

条件 A 虽是一个充分与必要条件,但在实际中验证条件 A 有相当的难度。下面给出一个充分条件,它在实际中较易于验证。

对 $\tau > 0$,定义

$$G(x,\tau) = \{y \in Y \mid f^k(x,y) \leqslant \tau,\forall k \in r_1\},$$
$$F(x,\tau) = \{y \in Y \mid \phi(x,y) \geqslant v(x,0) - \tau\},$$
$$\hat{Y}(x) = \arg\max_{y\in Y}\{\phi(x,y) \mid f^k(x,y) \leqslant 0,\forall k \in r_1\}$$

二阶充分条件 设 $\phi(\cdot,\cdot)$,$f^k(\cdot,\cdot)$,$k \in r_1$ 是二次连续可微的,设 $x \in \mathbf{R}^n$,$\bar{y} \in \mathbf{R}^m$ 与 $\bar{\lambda} \in \mathbf{R}_+^{r_1}$ 满足

$$_y\phi(x,\bar{y}) - \sum_{k=1}^{r_1}\bar{\lambda}_k\ {}_yf^k(x,\bar{y}) = 0$$
$$\bar{\lambda}_kf^k(x,\bar{y}) = 0,k \in r_1$$

乘子 $\bar{\lambda}_k(k \in r_1)$ 满足严格互补条件,即若 $f^k(x,\bar{y}) = 0$,则 $\bar{\lambda}_k > 0$,$k \in r_1$。且 Hessian 阵

$$^2_{yy}\phi(x,\bar{y}) - \sum_{k=1}^{r_1}\bar{\lambda}_k\ {}^2_{yy}f^k(x,\bar{y})$$

在锥 $M(x,\bar{y})$ 上负定,其中

$$M(x,\bar{y}) = \{d \in \mathbf{R}^m,d \neq 0 \mid {}_yf^k(x,\bar{y})^{\mathrm{T}}d = 0, k \in K(x,\bar{y})\}$$
$$K(x,\bar{y}) = \{k \in r_1 \mid \bar{\lambda}_k > 0\}$$

现在给出下面的一个充分条件。

条件 B 设 $x \in \mathbf{R}^n$ 满足

1) $\sup\limits_{y\in Y}\phi(x,y) < +\infty$;

2) $\hat{Y}(x) \neq \varnothing$,且存在 $\bar{\lambda} \in \mathbf{R}_+^{r_1}$,使得对 $\forall\bar{y} \in \hat{Y}(x)$,$(x,\bar{y},\bar{\lambda})$ 满足二阶充分条件;

3) 存在 $\tau_0 > 0$,使得 $G(x,\tau_0) \cap F(x,\tau_0)$ 有界。

定理 3 设 $x \in \mathbf{R}^n$ 满足条件 B,则存在 $\bar{c} > 0$,使得对 $\forall c \geqslant \bar{c}$ 有

$$\psi(x) = \bar{\psi}(x,\bar{\lambda},c)。$$

证明 若 $x \in \mathbf{R}^n$ 满足条件 B,则可证,对 $\forall\bar{y} \in \hat{Y}(x)$,$\exists\bar{c} > 0$,当 $c \geqslant \bar{c}$ 时,

$$\bar{\phi}((x,\lambda,c),\bar{y}) \geqslant \bar{\phi}((x,\bar{\lambda},c),\bar{y}) \geqslant \bar{\phi}((x,\bar{\lambda},c),y) \tag{10}$$

对 $\forall y \in Y$ 与 $\lambda \geqslant 0$ 成立,证明在此省略。

从(10) 式第一个不等式及 $f^k(x,\bar{y}) \leqslant 0(\forall k \in r_1)$ 可得,当 $c \geqslant \bar{c}$ 时,有

$$\frac{1}{c}\sum_{k=1}^{r_1}\min_{\tau\geqslant cf^k(x,\bar{y})}\{\bar{\lambda}_k\tau + \theta(\tau)\} = 0 \tag{11}$$

从而由 $\bar{\phi}(\bar{x},y)$ 的定义得

$$\bar{\phi}((x,\bar{\lambda},c),\bar{y}) = \phi(x,\bar{y}) \tag{12}$$

由(10) 式的第二个不等式可知,

$$\bar{\psi}(x,\bar{\lambda},c) = \bar{\phi}((x,\bar{\lambda},c),\bar{y}) \tag{13}$$

故由(12)、(13) 式与 $\bar{y} \in \hat{Y}(x)$ 知,对 $x \in \mathbf{R}^n$,$\exists\bar{\lambda} \geqslant 0$,$\bar{c} > 0$,对 $\forall c \geqslant \bar{c}$ 有

$$\psi(x) = \bar{\psi}(x,\bar{\lambda},c)$$

证毕

这样根据定理 1 与定理 2(或定理 3) 可知,当 $x \in \mathbf{R}^n$ 满足条件 A(或条件 B) 时有

$$\psi(x) = \min_{\lambda\geqslant0,c>0}\bar{\psi}(x,\lambda,c) \tag{14}$$

3 等价问题与一阶最优性条件

由(14) 式,可得到问题(P) 与(P′) 的等价关系,为此设

$$B(\hat{x},\rho) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x - \hat{x}\| < \rho\},(\rho > 0)$$

定理 4 假设 1 成立,则有

1) 如果 $\hat{x} \in \mathbf{R}^n$ 是问题(P) 在邻域 $B(\hat{x},\rho)$ 上的局部最优解,且在 $\hat{x}$ 满足条件 A(或条件 B),则存在 $\hat{\lambda} \geqslant 0$ 与 $\hat{c} > 0$,使得 $\hat{\bar{x}} = (\hat{x},\hat{\lambda},\hat{c})$ 是问题(P′) 在 $B(\hat{x},\rho) \times \mathbf{R}_+^{r_1} \times \mathbf{R}_{++}$ 上的局部最优解;

2) 如果 $\hat{\bar{x}} = (\hat{x},\hat{\lambda},\hat{c})$ 是问题(P′) 在领域 $B(\hat{x},\rho) \times \mathbf{R}_+^{r_1} \times \mathbf{R}_{++}$ 上的局部最优解,且对 $\forall x \in B(\hat{x},\rho)$ 满足条件 A(或条件 B),则 $\hat{x}$ 是问题(P) 在 $B(\hat{x},\rho)$ 上的局部最优解;

3) 如果对 $\forall x \in \mathbf{R}^n$ 满足条件 A(或条件 B),则问题(P) 与(P′) 的最优值相等,即

$$\min_{x\in \mathbf{R}^n}\psi(x) = \min_{\bar{x}\in \mathbf{R}^n\times \mathbf{R}_+^{r_1}\times \mathbf{R}_{++}} \bar{\psi}(\bar{x}) \tag{15}$$

证明 1) 由 $\hat{x}\in \mathbf{R}^n$ 是问题(P)在领域 $B(\hat{x},\rho)$ 上的局部最优解,则对 $\forall x\in B(\hat{x},\rho)$ 有

$$\psi(x)\geqslant \psi(\hat{x}) \tag{16}$$

在 $\hat{x}$ 满足条件A(或条件B),则 $\exists \hat{\lambda}\geqslant 0$ 与 $\hat{c}>0$,使得

$$\psi(\hat{x}) = \bar{\psi}(\hat{x},\hat{\lambda},\hat{c}) \tag{17}$$

由定理1知,对 $\forall x\in \mathbf{R}^n,\lambda\geqslant 0$ 与 $c>0$,有

$$\bar{\psi}(x,\lambda,c)\geqslant \psi(x) \tag{18}$$

由(16)、(17)与(18)式知,对 $\forall x\in B(\hat{x},\rho),\lambda\geqslant 0$ 与 $c>0$,有

$$\bar{\psi}(x,\lambda,c)\geqslant \bar{\psi}(\hat{x},\hat{\lambda},\hat{c})$$

即 $\hat{\bar{x}}=(\hat{x},\hat{\lambda},\hat{c})$ 是问题(P′)在 $B(\hat{x},\rho)\times \mathbf{R}_+^{r_1}\times \mathbf{R}_{++}$ 上的局部最优解。

2) 由 $\forall x\in B(\hat{x},\rho)$ 满足条件A(或条件B),任取 $x^*\in B(\hat{x},\rho)$,则 $\exists \lambda^*\geqslant 0$ 与 $c^*>0$,使得

$$\psi(x^*) = \bar{\psi}(x^*,\lambda^*,c^*)$$

又因为 $(\hat{x},\hat{\lambda},\hat{c})$ 的(P′)局部最优解,可得

$$\bar{\psi}(x^*,\lambda^*,c^*)\geqslant \bar{\psi}(\hat{x},\hat{\lambda},\hat{c})\geqslant \min_{\lambda\geqslant 0,c>0}\bar{\psi}(\hat{x},\lambda,c) = \psi(\hat{x})$$

故对 $\forall x^*\in B(\hat{x},\rho)$ 有 $\psi(x^*)\geqslant\psi(\hat{x})$,即 $\hat{x}$ 为问题(P)在 $B(\hat{x},\rho)$ 上的局部最优解。

3) 由题设知,对 $\forall x\in \mathbf{R}^n$,有

$$\psi(x) = \min_{\lambda\geqslant 0,c>0}\bar{\psi}(x,\lambda,c)$$

故(15)式成立。

在定理4中,最重要的部分是结论1),因为由它可以导出问题(P)的一阶最优性条件。

假设2 1) $\phi(\cdot,\cdot)$,$f^k(\cdot,\cdot)$,$k\in r_1$ 和 $g^k(\cdot)$,$k\in r_2$ 是连续可微的;

2) Y 是紧致集。

在假设2之下,对标准半无限极大极小问题(P′),它的一阶最优性条件已经有了(见文献[2])。现在针对问题(P′),将一阶最优性条件引述如下。

定理5 假设2成立,$\hat{\bar{x}}=(\hat{x},\hat{\lambda},\hat{c})\in \mathbf{R}^n\times \mathbf{R}_+^{r_1}\times \mathbf{R}_{++}$ 是问题(P′)的局部最优解,则

$$0\in \bar{G}\bar{\psi}(\hat{\bar{x}}) = \mathrm{conv}_{y\in Y}\left\{\begin{pmatrix}\bar{\psi}(\hat{\bar{x}})-\bar{\phi}(\hat{\bar{x}},y)\\ \nabla_x\bar{\phi}(\hat{\bar{x}},y)\\ \nabla_\lambda\bar{\phi}(\hat{\bar{x}},y)\\ \nabla_c\bar{\phi}(\hat{\bar{x}},y)\end{pmatrix}\right\}$$

这样根据定理2(或定理3),就得到了问题(P)的一个新的一阶最优性条件,即定理6。

定理6 假设2成立,$\hat{x}\in \mathbf{R}^n$ 是问题(P)的一个局部最优解,并且 $\hat{x}$ 满足条件A(或条件B),则存在 $\hat{\lambda}\geqslant 0$ 和 $\hat{c}>0$,使得 $0\in \bar{G}\bar{\psi}(\hat{\bar{x}})$,其中 $\hat{\bar{x}}=(\hat{x},\hat{\lambda},\hat{c})$。

参考文献:

[1] COOPE I D, WATSON G A. A Projected Lagrangian Algorithm for Semi-Infinite Programming[J]. Math Program, 1985,32:337-356.

[2] POLAK E, Optimization:Algorithms and Consistent Approximations[M]. New York:Springer Verlag,1997.

[3] POLAK E, TITS A L. A Recursive Quadratic Programming Algorithm for Semi-Infinite Optimization Problems[J]. Appl Math Opt, 1982,8:325-349.

[4] WASTSON G A. Globally Convergent Methods for Semi-infinite Programming[J]. BIT, 1981,21:362-373.

[5] TANAKA Y, FUKUSHIMA M, IBARAKI T. A Globally Convergent SQP Method for Semi-Infinite Nonlinear Optimization[J]. Joural of Computational and Applied Mathematics,1988,23:141-153.

[6] 陆海龙. 广义凸性下多目标分式规划的鞍点及对偶[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2005,22(2):6-8.

[7] 杨新民,KOK L T. 关于一类不可微规划问题的对偶性[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2005,22(3):18-24.

[8] 吴至友,白富生. 一种新的求全局优化最优性条件的方法[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2006,23(1):1-5.

[9] 颜丽佳. 非光滑(F,α,ρ,d)一凸函数的多目标分式规划最优性条件[J]. 西华师范大学学报(自然科学版),2006,27(4):361-364.

[10] 王兴国. (p,r)一不变凸性下广义分式规划的最优性条件[J]. 四川师范大学学报(自然科学版),2005,28(1):66-69.

[11] ROYSET J O, POLAK E, KIUREGHIAN A D. Adaptive Approximations and Exeact Penalization for the Solution of Generalized Semi-Infinite Min-Max Problems[J]. SIAM J Optimization,2003,14:1-34.

[12] POLAK E, ROYSE J O. On the Use of Augmented Lagrangians in the Solution of Generalized Semi-Infinite Min-Max Problems[J]. Computational Optimization and Applications, 2005,31:173-192.

[13] ROCKAFELLAR R T. Augmented Lagrange Multiplier Functions and Duality inNonconvex Programming[J]. SIAM J Control,1974,12:268-285.

[14] SUN X L, Li D, MCKINNON K. On Saddle Points of Augmented Lagrangians for Constrained Nonconvex Optimization[J]. SIAM Journal on Optimization, 2005,15:1128-1146.

Solving Generalized Semi-Infinite Min-Max Programming Problems by Transformation

LIU Fang, *WANG Chang-yu*

(College of Operations Research and Management, Qufu Normal University, Qufu Shandong 273165, China)

Abstract: In this paper, we consider a class of generalized semi-infinite min-max problems of the form $\min\limits_{x \in \mathbf{R}^n} \psi(x)$, where ψ: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ is defined as $\psi(x) = \sup\limits_{y \in Z(x)} \phi(x,y)$ and $Z(x) = \{y \in \mathbf{R}^m \mid f(x,y) \leqslant 0, g(y) \leqslant 0\}$. Let $Y = \{y \in \mathbf{R}^m \mid g(y) \leqslant 0\}$, we get $\psi(x) = \sup\limits_{y \in Y} \{\phi(x,y) \mid f(x,y) \leqslant 0\}$. Firstly, under certain conditions, we use the modified barrier augmented Lagrangian, i. e.,

$$\bar{\phi}(\bar{x},y) = \begin{cases} \phi(x,y) - \dfrac{1}{c}\sum\limits_{k=1}^{r_1} \lambda_k \varphi(cf^k(x,y)), & y \in \Omega_c \\ -\infty, & y \in Y \backslash \Omega_c \end{cases}$$

where $\bar{x} = (x, \lambda, c)$ and $\Omega_c = \{y \in Y \mid cf^k(x,y) < 1, \forall k \in r_1\}$, to transform (P) into a common semiinfinite min-max problem (P′). The form of (P′) is $\min\limits_{x \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+^{r_1} \times \mathbf{R}_{++}} \bar{\psi}(\bar{x})$, where $\bar{\psi}(\bar{x}) = \sup\limits_{y \in Y} \bar{\phi}(\bar{x},y)$. We give two conditions for the transformation. Condition A is a necessary and sufficient condition, and Condition B is a sufficient condition. Compared with the corresponding conditions in available papers, they do not require the compactness of the constraint Y and Condition B can be verified easily in practice. Then we can obtain the equivalent relation between (P) and (P′), i. e., if $\hat{x} \in \mathbf{R}^n$ is a local minimizer of (P) with domain of attraction $B(\hat{x},\rho)$, and Condition A (or Condition B) holds at $\hat{x}$, then there exist $\hat{\lambda} \geqslant 0$ and $\hat{c} > 0$ such that $\hat{\bar{x}} = (\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{c})$ is a local minimizer of (P′) with domain of attraction $B(\hat{x},\rho) \times \mathbf{R}_+^{r_1} \times \mathbf{R}_{++}$; if $\hat{\bar{x}} = (\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{c})$ is a local minimizer of (P′) with domain of attraction $B(\hat{x},\rho) \times \mathbf{R}_+^{r_1} \times \mathbf{R}_{++}$ and Condition A (or Condition B) holds at any $x \in B(\hat{x},\rho)$, then $\hat{x} \in \mathbf{R}^n$ is a local minimizer of (P) with domain of attraction $B(\hat{x},\rho)$. Thus we present a feasible approach for solving (P). Finally, by transformation, we obtain a new first-order optimality condition for (P) under another assumption, i. e., if $\hat{x} \in \mathbf{R}^n$ is a local minimum of (P), and Condition A (or Condition B) holds at $\hat{x}$, then there exist $\hat{\lambda} \geqslant 0$ and $\hat{c} > 0$ such that $0 \in \bar{G\psi}(\hat{\bar{x}})$, where $\hat{\bar{x}} = (\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{c})$.

Key words: common semi-infinite programming; generalized semi-infinite min-max programming; augmented Lagrangian functions; first-order optimality conditions

(责任编辑　黄　颖)