一类平面微分系统极限环的存在性和唯一性*

蒋 自 国[1,2]

(1. 四川大学 数学学院，成都 610064；2. 阿坝师范高等专科学校 数学系，四川 汶川 623000)

摘　要：将对一系列多项式微分系统的定性分析推广到对一类一般的平面微分系统的定性分析，即对一类平面微分系统 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-yf_1(x)+\delta x-lx^{2n+1}\\ \dfrac{dy}{dt}=x^{2n-1}f_2(x)\end{cases}$ (其中 $f_1(x),f_2(x)\in C^1(-\infty,+\infty)$) 进行定性分析。在适当的条件下，将该系统化为 Liénard 系统进行研究，构造函数 $\lambda(x,y)=\int_0^x g(\xi)d\xi+\frac{1}{2}y^2$，对 $\lambda(x,y)$ 沿着上述微分方程组求导，运用 Poincaré 的切性曲线法得到其极限环的不存在性的一系列充分条件。由 A. B. Драгилёв 存在性定理得到闭轨存在的充分条件，利用 O. K. Smith 唯一性定理得到极限环存在唯一性的充分条件。

关键词：微分系统；极限环；存在唯一性

中图分类号：O175.12　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2008)01-0038-04

1 引言及引理

文献[1]对下面的三次平面微分系统进行了定性分析，得出了系统的极限环的存在性、唯一性及不存在性的条件

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y(1-ax^2)+\delta x-lx^3\\ \dfrac{dy}{dt}=x(1-ax^2)\end{cases}\tag{1}$$

文献[2-3]讨论了一类三次系统的极限环问题，文献[4]讨论了下面 $2n+1$ 次系统极限环的唯一性

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y(1-ax^{2n})+\delta x-lx^{2n+1}\\ \dfrac{dy}{dt}=x(1-ax^{2n})\end{cases}\tag{2}$$

文献[5]讨论一类广泛的奇次系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y(1-ax^{2n})+\delta x-lx^{2n+1}\\ \dfrac{dy}{dt}=x^{2n-1}(1-bx^{2n})\end{cases}\tag{3}$$

的极限环问题。

本文讨论一类更广泛的平面微分系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-yf_1(x)+\delta x-lx^{2n+1}\\ \dfrac{dy}{dt}=x^{2n-1}f_2(x)\end{cases}\tag{4}$$

其中，$f_1(x),f_2(x)\in C^1(-\infty,+\infty)$，且在原点附近最多只有有限多个零点。在以后的讨论中始终假定 $f_1(x),f_2(x)\in C^1(-\infty,+\infty)$。为方便起见，本文所涉及的函数能保证解的存在唯一性。

对于系统(4)，当 $f_1(x)=1-ax^{2n}$，$f_2(x)=1-bx^{2n}$ 时，系统(4)就化为系统(3)，因此，本文可以看作是文献[5]的推广。

2 主要结果及其证明

定理 1　当系统(4)满足下列条件

(ⅰ) $\delta l\le 0$；

(ⅱ) $f_2(x)\ne 0$；

(ⅲ) $f_1(x)^2+(\delta x-lx^{2n+1})^2>0$

则系统(4)不存在极限环。

证明　由条件(ⅱ)可知，系统(4)只有唯一的奇点 $O(0,0)$。

若对于 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$f_1(x)\ne 0$，对系统

* 收稿日期：2007-06-20　　修回日期：2007-10-28

资助项目：四川省教育厅自然科学基金(No. 2006C056)

作者简介：蒋自国(1974-)，男，四川巴中人，讲师，硕士研究生，研究方向为微分方程定性和稳定性理论。

(4) 作变换 $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}\tau}{f_1(x)}$,变换后仍把 τ 记作 t,则系统(4) 化为系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -y + \dfrac{\delta x - lx^{2n+1}}{f_1(x)} = -y - F(x)\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x^{2n-1}\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)} = g(x)\end{cases} \qquad (5)$$

所以有 $F'(x), g(x) \in C^0(-\infty, +\infty)$。取 $\lambda(x,y) = \int_0^x g(\xi)\mathrm{d}\xi + \dfrac{1}{2}y^2$,则当 $x \neq 0$ 时

$$\left.\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\right|_{(5)} = g(x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -g(x)F(x) = \frac{x^{2n}(\delta - lx^{2n})f_2(x)}{f_1(x)^2} \qquad (6)$$

当 $\delta = l = 0$ 时,$O(0,0)$ 是中心;当 $\delta = 0, l \neq 0$ 时,由(6) 式可知 $\left.\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\right|_{(5)} = \dfrac{lx^{4n}f_2(x)}{f_1(x)^2}$ 保持常号且当且仅当 $x = y = 0$ 时才为0,所以由 Poincaré 的切性曲线法[6],此时系统(4) 无极限环;当 $\delta l < 0$ 时,由(6) 式可知 $\left.\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\right|_{(5)} = \dfrac{-\delta x^{2n}\left(1 - \dfrac{l}{\delta}x^{2n}\right)f_2(x)}{f_1(x)^2}$ 保持常号且当且仅当 $x = y = 0$ 时才为0;所以由 Poincaré 的切性曲线法[6],此时系统(4) 无极限环。

若 $f_1(x)$ 在 $O(0,0)$ 附近至少存在两个零点,不妨设 $x_1 < 0 < x_2$, $f_1(x_1) = f_1(x_2) = 0$,且对 $\forall x \in (x_1, x_2)$, $f_1(x) \neq 0$。由条件(ⅲ)可知,$x = x_1$ 和 $x = x_2$ 是系统(4) 无切直线,如果系统(4) 存在极限环必落在条形域 $x_1 < x < x_2$ 内。在此条形域内作变换 $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}\tau}{f_1(x)}$,变换后仍把 τ 记作 t,则系统(4) 化为系统(5)。由条件(ⅰ)、(ⅱ),在此域内,当 $x \neq 0$ 时,(6) 式保持常号且当且仅当 $x = y = 0$ 时才为0,所以由 Poincaré 的切性曲线法[6],此时系统(4) 无极限环。

同理可证,$f_1(x)$ 在 $O(0,0)$ 附近只有一个零点时,系统(4) 无极限环。 证毕

注1 当 $f_1(x) = 1 - ax^{2n}$, $f_2(x) = 1 - bx^{2n}$ 时,定理1即为文献[5]中的定理1。

下面考虑 $\delta l > 0$ 的情况。

定理2 当系统(4) 满足下列条件

(ⅰ) $\delta l > 0$;

(ⅱ) $f_2(x) \neq 0$;

(ⅲ) $f_1(x)^2 + (\delta x - lx^{2n+1})^2 > 0$;

(ⅳ) 存在 $x_1 < 0 < x_2$,使得 $f_1(x_i) = 0$, $x_i^{2n} < \dfrac{\delta}{l}$, $i = 1,2$,且对 $\forall x \in (x_1, x_2)$, $f_1(x) \neq 0$,则系统(4) 不存在极限环。

证明 由条件(ⅱ)可知,$O(0,0)$ 是系统(4) 唯一的奇点。由条件(ⅲ)、(ⅳ)可知,$x = x_1$ 和 $x = x_2$ 是系统(4) 无切直线,所以如果系统(4) 存在极限环必落在条形域 $D_1 = \{x_1 < x < x_2\}$ 内。在此条形域内作变换 $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}\tau}{f_1(x)}$,变换后仍把 τ 记作 t,则系统(4) 化为系统(5)。由 $x_i^{2n} < \dfrac{\delta}{l}$, $i = 1,2$,对区域 $D_2 = \left\{-\sqrt[2n]{\dfrac{\delta}{l}} < x < \sqrt[2n]{\dfrac{\delta}{l}}\right\}$ 有 $D_1 \subset D_2$,所以在 D_1 内有 $x < \sqrt[2n]{\dfrac{\delta}{l}}$,由条件(ⅱ),当 $x \neq 0$ 时,(6) 式保持常号且当且仅当 $x = y = 0$ 时才为0,所以由 Poincaré 的切性曲线法[6],此时系统(4) 无极限环。

定理3 当系统(4) 满足下列条件

(ⅰ) $\delta l > 0$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ 是偶函数;

(ⅱ) 仅当 $x = \pm\sqrt[2n]{\dfrac{\delta}{l}}$ 时, $f_2\left(-\sqrt[2n]{\dfrac{\delta}{l}}\right) = f_2\left(\sqrt[2n]{\dfrac{\delta}{l}}\right) = 0$;

(ⅲ) $f_1(x)^2 + (\delta x - lx^{2n+1})^2 > 0$;

(ⅳ) $x_1 < 0 < x_2$,使得 $f_1(x_i) = 0$, $x_i^{2n} < \dfrac{\delta}{l}$, $i = 1,2$,且对 $\forall x \in (x_1, x_2)$, $f_1(x) \neq 0$,则系统(4) 不存在极限环。

证明 因为 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 是偶函数,所以只需考虑 $\delta > 0, l > 0$ 的情况,对于 $\delta < 0, l < 0$,可以作变换 $x \to -x, y \to -y, t \to -t$ 而实现。由条件(ⅱ)可知,系统(4) 只有3个奇点 $O(0,0)$, $P\left(-\sqrt[2n]{\dfrac{\delta}{l}}, 0\right)$, $Q\left(\sqrt[2n]{\dfrac{\delta}{l}}, 0\right)$。由条件(ⅲ)和(ⅳ)可知,$x = x_1$ 和 $x = x_2$ 是系统(4) 无切直线,且奇点 O 在条形域 $D_1 = \{x_1 < x < x_2\}$ 内,奇点 P, Q 落在条形域 $D_1 = \{x_1 < x < x_2\}$ 外,且无同时包含3个奇点的极限环,所以包含奇点 O 的极限环应落在条形域 D_1 内,包含奇点 P, Q 的极限环应分别落在条形域 $D_2 = \{x_2 < x < +\infty\}$ 和 $D_3 = \{-\infty < x < x_1\}$ 内。

对于包含奇点 O 的极限环,在 D_1 内,用定理2同样的方法可以证明系统(4) 无极限环。由于系统(4) 的右端函数是关于原点对称的,且奇点 P, Q 也是关

于原点对称的，于是，只需考虑其中之一即可。下面考虑包含奇点 $P(-\sqrt[2n]{\frac{\delta}{l}},0)$ 的极限环。

作变换 $x=\bar{x}-\sqrt[2n]{\frac{\delta}{l}}, y=\bar{y}$，变换后 $\bar{x},\bar{y}$ 仍记作 x,y，则系统(4)变为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-yf_1\left(x-\sqrt[2n]{\frac{\delta}{l}}\right)+\delta\left(x-\sqrt[2n]{\frac{\delta}{l}}\right)-l\left(x-\sqrt[2n]{\frac{\delta}{l}}\right)^{2n+1}\\ \dfrac{dy}{dt}=\left(x-\sqrt[2n]{\frac{\delta}{l}}\right)^{2n-1}f_2\left(x-\sqrt[2n]{\frac{\delta}{l}}\right)\end{cases} \tag{7}$$

则 P 点移到坐标原点，条形域 $D_3=\{-\infty<x<x_1\}$ 也相应地变为 $D_3=\{-\infty<x<x_1+\sqrt[2n]{\frac{\delta}{l}}\}$。利用定理 1 的证明方法可类似地证明系统(7)无极限环，即系统(4)在 $D_3=\{-\infty<x<x_1\}$ 内无极限环。同理，系统(4)在 $D_2=\{x_2<x<+\infty\}$ 内无极限环，所以系统(4)在整个平面上都没有极限环。　证毕

定理 4　当系统(4)满足下列条件

(ⅰ) $\delta l>0$；

(ⅱ) $f_1(x), f_2(x)$ 为偶函数；

(ⅲ) $f_1(x)>0, f_2(x)>0, \frac{f_2(x)}{f_1(x)}>c$，其中 c 为正常数；

(ⅳ) $f_1(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减

则系统(4)至少存在一条闭轨线。

证明　因为 $f_1(x), f_2(x)$ 是偶函数，所以只需考虑 $\delta>0, l>0$ 的情况，对于 $\delta<0, l<0$，可以作变换 $x\to -x, y\to -y, t\to -t$ 而实现。因为 $f_1(x)>0$，所以可以对系统(4)作变换 $dt=\frac{d\tau}{f_1(x)}$，变换后仍把 τ 记作 t，则系统(4)化为系统(5)。由 $f_2(x)>0$ 可知，$O(0,0)$ 是系统(4)的唯一奇点。

1) 由条件(ⅱ)可知，在实数域 **R** 上，$F(x)$ 和 $g(x)$ 满足 Lipschitz 条件。

2) 由条件(ⅲ)可知，当 $x\neq 0$ 时，$xg(x)=x^{2n}\cdot\frac{f_2(x)}{f_1(x)}>0$，同时 $G(x)=\int_0^x g(\xi)d\xi=\int_0^x \xi^{2n-1}\frac{f_2(\xi)}{f_1(\xi)}d\xi>\frac{c}{2n}x^{2n}$，所以 $G(\pm\infty)=+\infty$。

3) 当 $0<x<\sqrt[2n]{\frac{\delta}{l}}$ 时，$F(x)<0$；当 $-\sqrt[2n]{\frac{\delta}{l}}<x<0$ 时，$F(x)>0$。

4) 取 $M=\sqrt[2n]{\frac{\delta+1}{l}}$，当 $x>M$ 时，$F(x)>\dfrac{\sqrt[2n]{\frac{\delta+1}{l}}}{f_1\left(\sqrt[2n]{\frac{\delta+1}{l}}\right)}$，当 $x<-M$ 时，$F(x)<\dfrac{\sqrt[2n]{\frac{\delta+1}{l}}}{f_1\left(\sqrt[2n]{\frac{\delta+1}{l}}\right)}$。由 А. В. Драгилёв 存在性定理[6]可得，系统(4)至少存在一条闭轨线。　证毕

定理 5　当系统(4)满足下列条件

(ⅰ) $\delta l>0$；

(ⅱ) $f_1(x)\in C^2(-\infty,+\infty), f_2(x)\in C^1(-\infty,+\infty)$，且为均偶函数；

(ⅲ) $f_1(x)>0, f_2(x)>0, \frac{f_2(x)}{f_1(x)}>c>0$；

(ⅳ) $f_1(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减

则系统(4)存在唯一的极限环，且为稳定的。

证明　因为 $f_1(x), f_2(x)$ 是偶函数，所以只需考虑 $\delta>0, l>0$ 的情况，对于 $\delta<0, l<0$，可以作变换 $x\to -x, y\to -y, t\to -t$ 而实现。

因为 $f_1(x)>0$，所以可以对系统(4)作变换 $dt=\frac{d\tau}{f_1(x)}$，变换后仍把 τ 记作 t，则系统(4)化为系统(5)，由 $f_2(x)>0$ 可知，$O(0,0)$ 是系统(4)的唯一奇点。

1) 因为 $f_1(x), f_2(x)$ 是偶函数，于是 $g(x)=x^{2n-1}\frac{f_2(x)}{f_1(x)}$ 是奇函数；当 $x\neq 0$ 时，$xg(x)>0$。

2) 因为 $f_1(x)$ 是偶函数，于是 $F(x)=\frac{lx^{2n+1}-\delta x}{f_1(x)}$ 为奇函数；且当 $0<x<\sqrt[2n]{\frac{\delta}{l}}$ 时，$F(x)<0$；当 $x\geqslant\sqrt[2n]{\frac{\delta}{l}}$ 时，$F(x)\geqslant 0$；由条件(ⅳ)可知，$F(x)$ 单调递增；

3) 因为 $l>0$，且 $f_1(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，所以 $F(+\infty)=+\infty$。

由条件(ⅲ)可得，$x^{2n-1}\frac{f_2(x)}{f_1(x)}\geqslant cx^{2n-1}$，而 $\int_0^{+\infty}cx^{2n-1}dx=+\infty$，于是 $\int_0^{+\infty}g(x)dx=+\infty$。

4) $F'(x)=\dfrac{[(2n+1)x^{2n}-\delta]f_1(x)+(lx^{2n+1}-\delta x)f_1'(x)}{f_1(x)^2}$，而 $f_1(x)\in C^2(-\infty,+\infty), f_2(x)\in C^1(-\infty,+\infty)$，于是 $F'(x)$ 和 $g(x)$ 在任何有界区域上满足

Lipschetz 条件。所以,由 O. K. Smith[6] 定理,系统(4)有唯一的极限环[7-8],且为稳定的。 证毕

注 2 当 $f_1(x) = 1 - ax^{2n}$,$f_2(x) = 1 - bx^{2n}$ 时,该定理即为文献[5]中的定理 5。

参考文献:

[1] 陈文灯. 一类三次系统的定性分析[J]. 系统科学与数学,1994,14(4):301-308.

[2] 梁锦鹏. 一类三次系统的极限环[J]. 系统科学与数学,2003,23(3):398-404.

[3] 李建全,马知恩. 一类三次系统极限环的存在唯一性[J]. 系统科学与数学,1999,19(1):16-18.

[4] 卓相来. 平面 2n+1 次系统极限环的唯一性[J]. 工科数学,2002,18(5):33-36.

[5] 张瑞海,张齐. 一类多项式微分系统极限环的存在唯一性[J]. 湘潭师范学院学报(自然科学版),2006,28(4):8-13.

[6] 张芷芬,丁同仁,黄文灶,等. 微分方程定性理论[M]. 北京:科学出版社,1985.

[7] 申治华. 一类被捕食种群具有常数收获率极限环的唯一性[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2001,18(2):7-10.

[8] 徐荣武,封汉颖. 一类非线性系统极限环的研究[J]. 四川师范大学学报(自然科学版),2005,28(1):70-72.

Existence and Uniqueness of the Limit Cycles in a Class of Differential System

JIANG Zi-guo[1,2]

(1. College of Mathematics, Sichuan University, Sichuan Chengdu 610064;

2. Dept. of Mathematics, Aba Teacher's College, Sichuan Wenchuan 623000, China)

Abstract: In this paper we generalize the qualitative analysis about a class of plane differential system from the qualitative analysis about a class of polynomial differential system, i. e. the applicable range of this plane differential system will become very wide. Some known results of this class differential system are special events of this plane differential system. Some sufficient conditions for the existence, no-nexistence and uniqueness of the limit cycles for following plane differential system are discussed $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -yf_1(x) + \delta x - lx^{2n+1} \\ \frac{dy}{dt} = x^{2n-1}f_2(x) \end{cases}$ with $f_1(x), f_2(x) \in C^1(-\infty, +\infty)$. On adequacy conditions, we convert this system from plane differential system to Liénard system. We construct a function $\lambda(x,y) = \int_0^x g(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2}y^2$, and differentiate about $\lambda(x,y)$ with this plane differential system. By using the method of Poincaré, some sufficient conditions for on-existence of limit cycles of such system are obtained. By applying A. B. Драгилёв theorem about existence, some sufficient conditions for the existence of limit cycles of such system are obtained. Furthermore, by applying O. K. Smith's theorem about uniqueness, some sufficient conditions for the uniqueness of limit cycles of such system are obtained.

Key words: differential system; limit cycles; existence uniqueness

(责任编辑 游中胜)