2008 年 1 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Jan. 2008
第 25 卷 第 1 期 Journal of Chongqing Normal University(Natural Science Edition) Vol. 25 No. 1

约束条件下误差协方差阵的二次型估计的可容许性*

龚艳红[1], 刘万荣[2]
(1. 华南农业大学 理学院, 广州 510640; 2. 湖南师范大学 数学与计算机学院, 长沙 410081)

摘 要:估计的可容许性一直是模型估计理论的重要部分,其主要包括系数估计的可容许性与误差估计的可容许性。随着统计模型的不断扩展与完善,各种有关的容许性理论也在不断的更新和完善之中。作为椭圆约束下一元模型中误差估计的可容许性向高维的一种推广,本文主要讨论在不等式约束条件下多元线性模型中误差协方差阵 V 的二次型估计的可容许性,得到了在二次型估计可容许的必要条件以及 $\mathrm{rk}(x)=1$ 与 $x=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 情形下可容许估计的充要条件等结果。

关键词:协差阵;非负二次估计;可容许性;损失函数
中图分类号:O212.1 文献标识码:A 文章编号:1672-6693(2008)01-0047-03

1 预备知识

估计的可容许性一直是估计理论的一个重要方面。其中主要包括系数估计的可容许性与误差估计的可容许性。就后者而言,最早在 1981 年关启光等[1]讨论了线性模型中误差方差的二次型估计的可容许性,此后统计学者不断地对误差方差或协差阵估计的可容许性进行研究。如谢民育[2],肖桂英[3],杨建华[4]等分别得到了关于误差估计的可容许性理论结果。随着线性模型的不断改进与完善,为考虑到辅助信息的作用,受约线性模型被提出。一直以来,带约束条件的线性模型受到了广泛的关注。董岩,徐兴中[5]等对在椭球约束 $H=\{(\beta,\sigma^2):\beta^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}X\beta\leqslant\sigma^2\}$ 下一元模型中 σ^2 的二次型估计的容许性问题进行了讨论,王志忠[6],鹿长余[7]及吴监洪[8]等相继在不同带约束模型中讨论了估计的可容许性。在约束模型中虽然对回归参数 β 或 Θ 的估计的可容许性已有大量比较好的结果,然而关于误差方差或协差阵的结果却相当少,自董岩[5]后未见有这方面更进一步的结果。

作为椭圆约束下一元模型中误差估计的可容许性向高维的推广。本文主要考虑在约束条件 $H=\{(\Theta,V):\Theta^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}X\Theta\leqslant V\}$ 下多元线性模型中误差协方差阵 V 的估计的可容许性。得到了协差阵 V 的非负二次型估计可容许的必要条件以及 $\mathrm{rk}(x)=1$ 与 $x=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 情形下可容许的充要条件。

考虑多元线性模型

$$Y=X\Theta+\varepsilon=(\varepsilon_{(1)},\varepsilon_{(2)},\cdots,\varepsilon_{(n)})^{\mathrm{T}}$$

$$E(\varepsilon_{(i)})=0,E(\varepsilon_{(i)}\varepsilon'_{(i)})=V$$

$$E(b'\varepsilon_{(i)}\varepsilon_{(i)}\varepsilon'_{(i)})=0,E(V^{\frac{-1}{2}}\varepsilon_{(i)}\varepsilon'_{(i)}V^{\frac{-1}{2}})=(m+2)I_m$$

其中 X,Y 分别是已知 $n\times k,n\times m$ 阶矩阵,Θ,V 分别是未知的 $k\times m$ 和 $n\times m$ 阶矩阵。本文限制在非负二次型估计类 $D=\{Y^{\mathrm{T}}BY:B\geqslant 0\}$ 中讨论参数空间 $H=\{(\Theta,V):\Theta^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}X\Theta\leqslant V\}$ 中协方差阵 V 的估计的可容许性。取损失函数为

$$L(D,V)=\mathrm{tr}(V^{\frac{-1}{2}}DV^{\frac{-1}{2}}-I_m)^2 \tag{1}$$

记上述模型及损失函数为模型 H,设 $Y'AY\in D$,则 $Y'AY$ 的风险函数为

$$\begin{aligned}R(A,\Theta,V)=&m(m+1)\mathrm{tr}A^2+m(\mathrm{tr}A-1)^2+\\&2(\mathrm{tr}A-1)\mathrm{tr}(V^{\frac{-1}{2}}\Theta'X'AX\Theta V^{\frac{-1}{2}})+\\&2(m+1)\mathrm{tr}(V^{\frac{-1}{2}}\Theta'X'A^2X\Theta V^{\frac{-1}{2}})+\\&\mathrm{tr}(V^{\frac{-1}{2}}\Theta'X'AX\Theta V^{\frac{-1}{2}})^2\end{aligned} \tag{2}$$

2 结果及证明

定理 1 若 $Y'AY$ 是 V 的可容许估计,则有

$$(m+3)\lambda_1+\mathrm{tr}A\geqslant 1,(m+1)\lambda_1+\mathrm{tr}A\leqslant 1$$

其中 λ_1 是 A 的最大特征根。

引理 1 记

* 收稿日期:2006-12-19 修回日期:2007-05-31
资助项目:国家自然科学基金资助项目(No. 30230210)
作者简介:龚艳红(1979-),女,湖南新邵人,助教,硕士,研究方向为数理统计。

$$\Phi = PX\Theta V^{\frac{-1}{2}} = (\Phi_{(1)},\Phi_{(2)},\cdots,\Phi_{(n)})^{\mathrm{T}}$$

若 $\Phi^{\mathrm{T}}\Phi = \sum_{i=1}^{n}\Phi_{(i)}\Phi_{(i)}^{\mathrm{T}} \leqslant I_m$,则有1) $\sum_{i=1}^{n}\Phi_{(i)}^{\mathrm{T}}\Phi_{(i)} \leqslant m$,2) $\Phi_{(1)}^{\mathrm{T}}\Phi_{(1)} \leqslant 1$。

证明 1) 由 $\Phi^{\mathrm{T}}\Phi = \sum_{i=1}^{n}\Phi_{(i)}\Phi_{(i)}^{\mathrm{T}} \leqslant I_m$,有 $\mathrm{tr}(\Phi'\Phi) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{tr}(\Phi_{(i)}\Phi'_{(i)}) \leqslant \mathrm{tr}I_m$,故 $\sum_{i=1}^{n}\Phi_{(i)}^{\mathrm{T}}\Phi_{(i)} \leqslant m$。

2) 由 $0 \leqslant \sum_{i=2}^{n}(\Phi_{(i)}^{\mathrm{T}}\Phi_{(1)})^2 = \Phi_{(1)}^{\mathrm{T}}\left(\sum_{i=2}^{n}\Phi_{(i)}\Phi_{(i)}^{\mathrm{T}}\right)\Phi_{(1)} \leqslant \Phi_{(1)}^{\mathrm{T}}(I_m - \Phi_{(1)}\Phi_{(1)}^{\mathrm{T}})\Phi_{(1)}$,有 $\Phi_{(1)}^{\mathrm{T}}\Phi_{(1)} \leqslant 1$。

证明(定理1) 1) 由文献[9]可知 $(m+1)\lambda_1 + \mathrm{tr}A \leqslant 1$。

2) 下证 $(m+3)\lambda_1 + \mathrm{tr}A \geqslant 1$。设 $A = P^{\mathrm{T}}\Lambda P$,$\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$,$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots\lambda_n \geqslant 0$,若 $(m+3)\lambda_1 + \mathrm{tr}A \geqslant 1$ 不成立,则 $(m+4)\lambda_1 + \sum_{i=2}^{n}\lambda_i < 1$,取 $\mu > \lambda_1$,使 $(m+4)\mu + \sum_{i=2}^{n}\lambda_i < 1$。记 $\Phi = PX\Theta V^{\frac{-1}{2}} = (\Phi_{(1)},\Phi_{(2)},\cdots,\Phi_{(n)})^{\mathrm{T}}$,则 $\Phi^{\mathrm{T}}\Phi = \sum_{i=1}^{n}\Phi_{(i)}\Phi_{(i)}^{\mathrm{T}} \leqslant I_m$。

设 $B = P^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}\{\mu,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}P$,则

$$\begin{aligned}
&R(A,\Theta,V) - R(B,\Theta,V) = [m(m+1) + m + 2(m+2)\Phi'_{(1)}\Phi_{(1)} + (\Phi'_{(1)}\Phi_{(1)})^2](\lambda_1^2 - \mu^2) + \\
&[2m(\sum_{i=2}^{n}\lambda_i - 1) + 2\sum_{i=2}^{n}\lambda_i\Phi'_{(i)}\Phi_{(1)} + \\
&2\Phi'_{(1)}\Phi_{(1)}(\sum_{i=2}^{n}\lambda_i - 1) + 2\sum_{i=2}^{n}\lambda_i(\Phi'_{(i)}\Phi_{(1)})^2](\lambda_1 - \mu) > \\
&2\mu[m(m+1) + m + 2(m+2)\Phi'_{(1)}\Phi_{(1)} + (\Phi'_{(1)}\Phi_{(1)})^2](\lambda_1 - \mu) + [-2m(m+4)\mu + \\
&2\mu(m - \Phi'_{(1)}\Phi_{(1)}) - 2\Phi'_{(1)}\Phi_{(1)}(m+4)\mu + 2\mu\Phi'_{(1)}\Phi_{(1)} - 2\mu(\Phi'_{(1)}\Phi_{(1)})^2](\lambda_1 - \mu) = \\
&\mu(\lambda_1 - \mu)\{[2m(m+1) + 4m - 2m(m+4)] + 4[(m+1) + 4 - 2m(m+4)]\Phi'_{(1)}\Phi_{(1)}\} = \\
&2m\mu(\lambda_1 - \mu)(\Phi'_{(1)}\Phi_{(1)} - 1) \geqslant 0
\end{aligned}$$

与 $Y'AY$ 是 V 的可容许估计矛盾,故定理1成立。 证毕

定理2 $X = 0$ 时,D 中 V 的最优估计为 $\frac{1}{m+n+1}Y^{\mathrm{T}}Y$。

此定理证明可由文献[9]中定理1.1得到。

3 rk(X) = 1 时 V 的可容许估计

引理2 在模型 H 下,若 $\alpha = q'X\theta V^{-1}\theta'X'q$,其中 q 为单位向量,则有 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$。

证明 令 $\eta = q'X\theta V^{\frac{-1}{2}}$,则 $\alpha = \eta\eta'$,由

$$\eta^{\mathrm{T}}\eta = V^{\frac{-1}{2}}\theta^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}qq^{\mathrm{T}}X\theta V^{\frac{-1}{2}} \leqslant V^{\frac{-1}{2}}\theta^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}X\theta V^{\frac{-1}{2}} \leqslant I_m$$

有 $0 \leqslant \eta\eta^{\mathrm{T}} \leqslant 1$,即 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$。 证毕

由引理2可知,当 $\mathrm{rk}(X) = 1$ 时,损失函数为

$$\begin{aligned}
&R(a(I-P) + PAP,\theta,V) = \\
&m(m+1)[(n-1)a^2 + \lambda^2] + m[(n-1)a + \lambda - 1]^2 + \\
&2(m+1)\lambda^2\alpha + 2[(n-1)a + \lambda - 1]\lambda\alpha + \lambda^2\alpha^2 = \\
&\begin{pmatrix} a \\ \lambda \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} M(\alpha)\begin{pmatrix} a \\ \lambda \end{pmatrix} - 2B^{\mathrm{T}}(\alpha)\begin{pmatrix} a \\ \lambda \end{pmatrix} + m
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
M(\alpha) = {}& m(m+1)\begin{pmatrix} n-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} n-1 \\ 1 \end{pmatrix}(n-1 \quad 1) + 2(m+1)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + \\
&\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}(n-1 \quad 1) + \begin{pmatrix} n-1 \\ 1 \end{pmatrix}(0 \quad \alpha) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$B(\alpha) = \begin{pmatrix} m(n-1) \\ m+\alpha \end{pmatrix}$$

其中 $\alpha = \eta\eta^{\mathrm{T}} = q^{\mathrm{T}}X\theta V^{-1}\theta^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}q$,$q$ 为单位向量,λ 为 PAP 的最大特征根。

引理3[2] 若 $Y^{\mathrm{T}}AY$ 是 V 的可容许估计,则 1) $Y^{\mathrm{T}}AY = Y^{\mathrm{T}}(a(I-P) + PAP)Y$,其中 $a \geqslant 0$,$P = X(X^{\mathrm{T}}X)^{-}X^{\mathrm{T}}$;2) $Y^{\mathrm{T}}AY$ 是 D 类中 V 的可容许估计的充要条件是 $Y^{\mathrm{T}}AY$ 是 F 类中的可容许估计,$F = Y^{\mathrm{T}}BY = Y^{\mathrm{T}}(a(I-P) + PAP)Y$。

引理4[10] 若 $a > 0$,$\lambda > 0$,则 $Y^{\mathrm{T}}(a(I-P) + PAP)Y$ 是 V 的可容许估计的充要条件是,不存在 $(t \quad l)^{\mathrm{T}}$,$d > 0$ 使得 $\begin{pmatrix} t \\ l \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} M(\alpha)\begin{pmatrix} a \\ \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t \\ l \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} B(\alpha) \geqslant d$,对 $\forall\alpha \in [0,1]$ 都成立。其中 λ 是 PAP 的最大特征根。

引理5 若 $a > 0$,$\lambda > 0$(λ 是 PAP 的最大特征根)则,$Y^{\mathrm{T}}(a(I-P) + PAP)Y$ 是 V 的可容许估计的充要条件是下列条件同时成立。

1) $l > 0$,$[(n-1)a + 2(m+3)\lambda - 1]l + \lambda(n-1)t < 0$ 时有

$$\{[(m+2)^2 + 1]\lambda + (n-1)(m+1)a - m - 1\}l + (n-1)[m(m+n)a + (1+m)\lambda - m]t \leqslant 0;$$

2) $l > 0$,$[2(m+2)\lambda + (n-1)a - 1]l + \lambda(n-1)t > 0$,则有

$$[(m+2)\lambda + (n-1)a - 1]l + (n-1)[(m+n)a + \lambda - 1]t \leqslant 0;$$

3) 若 $l>0$, $[2(m+2)\lambda+(n-1)a-1]l+\lambda(n-1)t\leqslant 0$, 且 $[(n-1)a+2(m+3)\lambda-1]l+\lambda(n-1)t\geqslant 0$, 则有

$$4m\lambda t\{[(n-1)(m+n)+(n-1)\lambda-(n-1)]t+[(n-1)a+(m+2)\lambda-1]l-\{[2(m+2)\lambda+(n-1)a-1]l+\lambda(n-1)t\}^2\leqslant 0;$$

4) 若 $l\leqslant 0$, $[(2m+5)\lambda+(n-1)a-1]l+\lambda(n-1)t>0$, 则有

$$[(m+2)\lambda+(n-1)a-1]l+(n-1)[(m+n)a+\lambda-1]t\leqslant 0;$$

5) 若 $l\leqslant 0$, $[(2m+5)\lambda+(n-1)a-1]l+\lambda(n-1)t\leqslant 0$, 则有

$$\{[(m+2)^2+1]\lambda+(n-1)(m+1)a-m-1\}l+(n-1)[m(m+n)a+(1+m)\lambda-m]t\leqslant 0。$$

此引理的证明可参考文献[5],以类似的方法可得结果。

定理 3 若 $a>0$, $\lambda>0$(λ 是 PAP 的最大特征根), 则 $Y^{\mathrm{T}}(a(I-P)+PAP)Y$ 是 V 的可容许估计的充要条件是下列条件同时成立。

1) $(m+n)a+\lambda-1\leqslant 0$;

2) $m(m+n)a+(1+m)\lambda-m\geqslant 0$;

3) $[(n-1)a+(2m+5)\lambda-1][(m+n)a+\lambda-1]\leqslant[(m+2)\lambda+(n-1)a-1]\lambda$;

4) $[(m+n)a+\lambda-1]\{[m(m+n)-n+1]a-(m+4)\lambda-m+1\}+[(m+2)\lambda+(n-1)a-1]\lambda\leqslant 0$。

引理 6[2] 若 $a>0$, $PAP=0$, $Y'AY\backsim V[H]$, 则 $A=\dfrac{1}{n+m}(I-P)$。

定理 4 在模型 H 下, $\dfrac{1}{n+m}Y'(I-P)Y$ 不是可容许的。

证明
$$R(V,\Theta,\frac{1}{n+m}Y'(I-P)Y)=m(m+1)(n-1)\frac{1}{n+m^2}+m[(n-1)\frac{1}{n+m}-1]^2=\frac{m(m+1)}{n+m}$$

若 PAP 的特征根 $\lambda=\dfrac{1}{n+m+1}$, 则

$$R(V,\Theta,Y'(\frac{1}{n+m+1}(I-P)+PAP)Y)=\frac{\alpha^2}{(n+m+1)^2}+\frac{m(m+1)}{n+m+1}\leqslant\frac{1}{(n+m+1)^2}+\frac{m(m+1)}{n+m+1}<\frac{m(m+1)}{m+n}$$

所以, $Y'(\dfrac{1}{n+m+1}(I-P)+PAP)Y$ 是比 $\dfrac{1}{n+m}Y'(I-P)Y$ 更好地估计, 因而 $\dfrac{1}{n+m}Y'(I-P)Y$ 不是可容许估计。　　证毕

综合定理 3, 引理 5 及定理 4 可得到如下结果。

定理 5 $Y'AY\backsim V[H]$ 的充要条件是, 存在 $a>0$, $\lambda>0$ 满足

1) $Y'AY=Y^{\mathrm{T}}(a(I-P)+PAP)Y$, λ 是 PAP 的最大特征根;

2) 存在 $\alpha>0$, $\lambda>0$ 满足

ⅰ) $(m+n)a+\lambda-1\leqslant 0$;

ⅱ) $m(m+n)a+(1+m)\lambda-m\geqslant 0$;

ⅲ) $[(n-1)a+(2m+5)\lambda-1][(m+n)a+\lambda-1]\leqslant[(m+2)\lambda+(n-1)a-1]\lambda$;

ⅳ) $[(m+n)a+\lambda-1]\{[m(m+n)-n+1]a-(m+4)\lambda-m+1\}+[(m+2)\lambda+(n-1)a-1]\lambda\leqslant 0$。

推论 1 若 $X=1_n=(1\ \ 1\ \ \cdots\ \ 1)$, $Y'AY\backsim V[H]$ 的充要条件是, $Y'AY=aS^2+bn\bar{Y}\bar{Y}^{\mathrm{T}}$, 其中 $\bar{Y}=\sum_{i=1}^{n}Y_{(i)}$, $S^2=\sum_{i=1}^{n}(Y_{(i)}-\bar{Y})(Y_{(i)}-\bar{Y})^{\mathrm{T}}$, $a>0$, $b>0$, 且满足

1) $(m+n)a+b-1\leqslant 0$;

2) $m(m+n)a+(1+m)b-m\geqslant 0$;

3) $[(n-1)a+(2m+5)b-1][(m+n)a+b-1]\leqslant[(m+2)b+(n-1)a-1]b$;

4) $[(m+n)a+b-1]\{[m(m+n)-n+1]a-(m+4)b-m+1\}+[(m+2)b+(n-1)a-1]b\leqslant 0$。

参考文献:

[1] 吴启光, 成平, 李国英. 线性模型中误差方差的二次型估计的可容许性问题[J]. 中国科学, 1981, 7: 815-825.

[2] 谢民育. 协方差矩阵的二次型估计在诸优良性准则下的可容许性[J]. 应用数学学报, 1994, 17(1): 149-153.

[3] 肖桂荣. 误差方差的非负二次估计的可容许性[J]. 长春工程学院学报, 2002, 3(1): 1-2.

[4] 杨建华, 孙霞林. 协方差矩阵在非负二次型估计中的可容许性[J]. 武汉工程学院学报, 2007, 29(1): 75-77.

[5] 董岩, 徐兴忠, 鹿长余. 椭球约束下误差非负二次估计的可容许性[J]. 应用概率统计, 2003, 19(3): 19-26.

[6] 王志忠, 胡雪梅. 带有不完全椭球约束的增长曲线模型中的可容许性[J]. 数学理论与应用, 2004, 24(3): 36-40.

[7] 鹿长余，吴监洪，陈雪琴. 带有非中心不完全椭球约束的线性模型中线性估计的可容许性[J]. 数学学报，2006,49(5):985-988.
[8] 吴监洪，陈雪琴. 不等式约束下线性模型中线性估计的可容许性[J]. 数学学报，2006，49(6):1403-1410.
[9] 徐兴忠，王静龙. 协方差矩阵的二次型估计的可容许性问题[J]. 华东师范大学学报，1986，3:19-26.
[10] 徐兴忠. 线性模型中误差方差的可容许非负二次估计的充要条件[J]. 应用数学学报，1992，15(3):410-427.

Admissibility of Quadratic Estimator for Error Covariance Matrix with Respect to Restricted Parameter Space

GONG Yan-hong[1], *LIU Wan-rong*[2]
(1. College of Science, South China Agricultural University, Guangzhou 510640;
2. College of Mathematics and Computer Science, Hunan Normal University, Changsha 410081, China)

Abstract: Among the theory of estimation, admissibility of estimator is a very important part. It includes the estimator for parameter of coefficient and error. Developing with statistic model, the theory of admissibility is updated. In this paper we consider the admissibility of quadratic estimator for error covariance matrix in multivariate linear model under some inequality. We derived the necessary condition for the admissibility of a nonnegative, quadratic form estimator for error covariance matrix in the case where the error covariance V and regression parameter vector Θ satisfy $H = \{(\Theta, V): \Theta^T X^T X\Theta \leqslant V\}$. Moreover, sufficient and necessary conditions are given when the design matrix X satisfy $\mathrm{rk}(X) = 1$ and $X = (1, 1, \cdots, 1)^T$. Those results are extension from unvariate linear model to multivariate linear model with respect to restricted ellipsoidal parameter space.

Key words: covariance matrix; admissibility; quadratic form estimator; loss function

（责任编辑 黄 颖）