关于系统有界性的新判据*

吴泽刚
(重庆师范大学 数学与计算机科学学院,重庆 400047)

摘 要:本文讨论非自治系统 $\frac{dx}{dt}=f(t,x)$ 的有界性问题,这里 $f(t,x)\in C[I\times\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n]$,$I\in(-\infty,+\infty)$,$f(t,x)$ 保证微分系统的解存在且唯一。通过扩展 Lyapunov 函数方法,获得系统的有界性、一致有界性、最终有界性和一致最终有界性的新判据。文中所述 3 个定理中都采用了两个函数来刻画 V 函数的导数,其中定理 1 中的一个刻画函数的无穷积分具有上界,另一个定号,这样就不再要求 V 函数的导数负定,甚至常负;定理 2 保持了定理 1 中的对 V 函数的刻画,并且由于限定与 V 相关的函数有界,则相应的只要求其为一般有界函数即可,从而减弱了对 V 函数的限制,进一步推广相关文献的结果。文章最后用一个例子说明了其中一个判据的适用性。

关键词:有界性;最终有界性;李雅普诺夫方法
中图分类号:O175.13 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-6693(2008)01-0054-04

Lyapunov 直接法是研究系统稳定性和有界性的非常重要的工具。在系统稳定性方面,Lyapunov 基本定理的研究与推广得到了一系列重要而有价值的成果,文献[1-6]是这些成果的一部分。然而,对于减弱 V 函数的限制、拓展系统有界性定理的应用范围的研究工作则较少,如文献[7]和文献[8]。这些研究一般都要求 V 函数的导数负定或常负。因此进一步讨论 Lyapunov 直接法在系统有界性方面的应用有着重要的现实意义。

本文考虑如下非自治系统

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x) \tag{1}$$

这里 $f(t,x)\in C[I\times\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n]$,$I\in(-\infty,+\infty)$,$f(t,x)$ 保证(1)式解存在且唯一。本文目的就是通过拓展 Lyapunov 函数,分析系统(1)的有界性、一致有界性、最终有界性和一致最终有界性的问题,使这些定理不再要求 V 函数的导数负定甚至常负,而由其导数上界无穷积分的性质来刻画,从而得到了系统(1)有界性的新的判据。后面的例题印证了这一点。

1 预备知识

定义 1 函数 $\varphi\in C[\mathbf{R}^+,\mathbf{R}^+]$,(这里 $\mathbf{R}^+\triangleq[0,\infty)$)是连续的严格单调上升函数,且有 $\varphi(0)=0$,称 φ 是 Kamke 函数,记为 $\varphi\in K$。

定义 2 若对于(1)式的每一个解 $x(t,t_0,x_0)$ 都存在一个与 t_0,x_0 有关的正常数 $\beta(t_0,x_0)$,使得

$$\|x(t,t_0,x_0)\|\leqslant\beta(t_0,x_0),(\forall x_0\in\mathbf{R}^n)$$

则称(1)式的解是有界的。

定义 3 若对任意 $\alpha>0$,$t_0\in I$ 存在 $\beta(\alpha)>0$(β 的选取与 t_0,x_0 无关),使得对于任意 $x_0\in S_\alpha\triangleq\{x\mid\|x\|\leqslant\alpha\}$,有

$$\|x(t,t_0,x_0)\|<\beta,(t>t_0)$$

则称(1)式的解一致有界。

定义 4 若存在 B,对任意 $\alpha>0$,任意 $x_0\in S_\alpha\triangleq\{x\mid\|x\|\leqslant\alpha\}$,存在 $T(\alpha)>0$(T 的选取与 t_0,x_0 无关),使得当 $t\geqslant t_0+T(\alpha)$ 时,有

$$\|x(t,t_0,x_0)\|<B$$

则称(1)式的解对界限 B 一致最终有界。

2 主要结果

定理 1 若 $h(s)$ 在 I 上有定义,$1/h(s)$,$g(s)$ 为可积函数,且

$$\int_0^\infty\frac{ds}{h(s)}=\infty,\int_{t_0}^\infty g(t)dt<\infty \tag{2}$$

若存在 $V(t,x)\in C[I\times\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^+]$,使得

* 收稿日期:2007-05-30 修回日期:2007-11-02
资助项目:重庆师范大学科研项目(No. 06XLB025)
作者简介:吴泽刚(1976-),男,重庆江津人,硕士研究生,研究方向为微分方程稳定性。

1) $\varphi_1(\|x\|) \leqslant V(t,x), \varphi_1 \in KR$ (3)

2) $D^+ V|_{(1)} \leqslant g(t)h(V(t,x)), \forall t \geqslant t_0$ (4)

则在 $h(s)$ 满足以下几种情况之一

a) $h(s)$ 为定号函数;

b) $h(s)$ 有最大零解存在

则系统(1)的解有界。若 $V(t,x)$ 还满足

$$V(t,x) \leqslant \varphi_2(\|x\|), \varphi_2 \in KR \tag{5}$$

则系统(1)的解一致有界。

证明 设

$$\gamma = \max_{t',t'' \in [t_0,\infty)} \left| \int_{t'}^{t''} g(t)\,\mathrm{d}t \right| \tag{6}$$

$$H(s) = \int_{s_0}^{s} \frac{\mathrm{d}t}{h(t)}, (0 < s_0 \ll 1) \tag{7}$$

下面对上述情况分别进行讨论。

① 当 $h(s)$ 为定号函数时

i) $h(s) \geqslant 0$ 时,由(2)式,设

$$b_1 = V(t_0, x_0) + \varepsilon, (\forall \varepsilon > 0) \tag{8}$$

$$H(b_2) = H(b_1) + \gamma \tag{9}$$

由(6),(7),(9)式,有

$$\left| \int_{t'}^{t''} g(t)\,\mathrm{d}t \right| < H(b_2) - H(b_1)$$
$$(t', t'' \in [t_0, \infty)) \tag{10}$$

设 $\beta = \varphi_1^{-1}(b_2)$,由(8)式则必有

$$V(t) \triangleq V(t, x(t)) < b_2 = \varphi_1(\beta) \tag{11}$$

若不然,必存在 $t_2 > t_1 \geqslant t_0$,使得

$$V(t_1) = b_1 \leqslant V(t) \leqslant V(t_2) = b_2 (\forall t \in [t_1, t_2]) \tag{12}$$

由(4),(10)和(12)式得

$$H(b_2) = H(V(t_2)) \leqslant H(V(t_1)) + \left| \int_{t_1}^{t_2} g(t)\,\mathrm{d}t \right| < H(b_1) + (H(b_2) - H(b_1)) = H(b_2)$$

这里导出矛盾,说明(10)式成立。再由(3)式有

$$\varphi_1(\|x\|) \leqslant V(t,x) \leqslant \varphi_1(\beta)$$

即

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leqslant \beta, \forall t \geqslant t_0$$

其中 β 的取值与 t_0, x_0 有关,所以系统(1)的解有界。

ii) 当 $h(s) \leqslant 0$ 时,令 $h_1(s) = -h(s), g_1(t) = -g(t)$,则 $h_1(t) \geqslant 0$,且 $\int_{t_0}^{\infty} g_1(t)\,\mathrm{d}t$ 收敛。由条件(4)有

$$D^+ V|_{(1)} \leqslant g(t)h(V(t,x)) \leqslant (-g(t))(-h(V(t,x))) \leqslant g_1(t)h_1(V(t,x))$$

由i)的证明可得系统(1)的解是有界的。

② 若 $h(s)$ 有最大零解存在,即存在 s_1,使得

$$h(s_1) = 0$$

令 $s_0 = \max\{s \mid h(s) = 0\}$,若

$$V(t_0, x_0) < s_0 \tag{13}$$

则令 $b_1 = s_0$,否则

$$b_1 = V(t_0, x_0) + \varepsilon \tag{14}$$

当 $h(s_0^+) \geqslant 0$ 时,按①的第一种情况的证明可得此时系统(1)的解有界;当 $h(s_0^+) \leqslant 0$ 时,由①的第二种情况的证明可得此时系统(1)的解有界。若 $V(t,x)$ 还满足(5)式,则对于任意 x_0

$$x_0 \in S_\alpha = \{x \mid \|x\| \leqslant \alpha\}$$

由(3)~(5)式有

$$V(t_0, x_0) \leqslant \varphi_2(\|x_0\|) \leqslant \varphi_2(\alpha)$$

令 $N = \varphi_2(\alpha)$,在情况a)中,可以类似①的证明证得系统(1)的解是一致有界的;在情况b)中,只要把(13)和(14)式中的 $V(t_0, x_0)$ 都换成 N,即可类似②的证明证得系统(1)的解是一致有界的,因为此时(10)式仍然成立。 证毕

推论1 令 $h(s)$ 在 I 上有定义且连续,$1/h(s)$,$g(s)$ 为可积函数,且 $h(s), g(s) \geqslant 0$

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}s}{h(s)} = \infty, \int_{t_0}^{\infty} g(t)\,\mathrm{d}t < \infty \tag{15}$$

若存在 $V(t,x) \in C[I \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^+]$,$\Psi(t,x) \in C[I \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}]$,且 $\Psi(t,x)$ 有界使得

1) $\varphi_1(\|x\|) \leqslant V(t,x), \varphi_1 \in KR$;

2) $D^+ V|_{(1)} \leqslant g(t)(h(V(t,x)) + \Psi(t,x))$
$\forall t \geqslant t_0$ (16)

系统(1)的解有界。若 $V(t,x)$ 还满足

$$V(t,x) \leqslant \varphi_2(\|x\|), \varphi_2 \in KR$$

则系统(1)的解一致有界。

证明 因为 $\Psi(t,x)$ 有界,则存在 $M_1 \geqslant 0$ 使得 $\Psi(t,x) \leqslant M_1$,令 $h_1(V) = h(V(t,x)) + M_1$,则(15)式变为

$$D^+ V|_{(1)} \leqslant g(t)(h(V(t,x)) + \Psi(t,x)) \leqslant g(t)(h(V(t,x)) + M_1) \leqslant g(t)h_1(V(t,x))$$

由定理1的相关证明可证得结论成立。 证毕

注1 对于推论1中的条件 $h(s), g(s) \geqslant 0$ 改为 $h(s), g(s) \leqslant 0$,其他条件不变,结论也成立。

注2 当 $g(t) = 0$ 时,定理1则是文献[1]中的经典结论。

定理2 若 $h(s)$ 在 I 上有定义且有界,$g(s)$ 为可积函数,且 $\int_{t_0}^{\infty} g(t)\,\mathrm{d}t < \infty$,若存在 $V(t,x) \in C[I \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^+]$,使得

1) $\varphi_1(\|x\|) \leqslant V(t,x), \varphi_1 \in K$;

2) $D^{+}V|_{(1)} \leqslant g(t)h(t,x)$, $\forall t \leqslant t_0$

则系统(1)的解有界。若 $V(t,x)$ 还满足

$$V(t,x) \leqslant \varphi_2(\|x\|),\varphi_2 \in K \tag{17}$$

则系统的解一致有界。

证明 由 $h(s)$ 有界,则存在 $M \geqslant 0$,使得 $h(s) \leqslant M$,由条件 2)和(6)式得

$$V(t,x) \leqslant V(t_0,x_0) + \int_{t_0}^{t} g(t)h(V)\mathrm{d}t \leqslant V(t_0,x_0) + M\gamma$$

设 $\beta = \varphi_1^{-1}(V(t_0,x_0) + M\gamma)$,则有

$$\varphi_1(\|x\|) \leqslant V(t,x) \leqslant \varphi_1(\beta)$$

从而

$$\|x(t,t_0,x_0)\| \leqslant \beta$$

则系统(1)的解有界。如果有(17)式存在,易证 β 与 t_0,x_0 无关,从而系统(1)一致有界。　　证毕

定理 3 设连续函数 $V(t,x)$ 满足

1) $\varphi_1(\|x\|) \leqslant V(t,x)$,对 $\|X\| \geqslant B$ 成立,$\varphi_1 \in K$;

2) $D^{+}V|_{(1)} \leqslant -g(t)h(V(t,x))$,其中 $h(s) \geqslant 0$,$g(t)$,$1/h(s)$ 可积。

i) 若 $$\int_{t_0}^{\infty} g(t) = +\infty \tag{18}$$

则系统(1)的解对 B 最终有界;

ii) 若条件 1)加强为

$$\varphi_1(\|x\|) \leqslant V(t,x) \leqslant \varphi_2(\|x\|) \tag{19}$$

对 $\|x\| \geqslant B$ 成立,$\varphi_1,\varphi_2 \in K$,其余条件不变,则系统(1)的解对 B 一致最终有界。

证明 用反证法。设在上述条件下,不存在这样的 $T(t_0,B,x_0) \geqslant t_0$,使得当 $t \geqslant t_0 + T$ 时,有 $\|x\| \leqslant B$,即对于 $\forall T$,$\exists t_1 \geqslant t_0 + T$ 使得 $\|x(t_1,t_0x_0)\| > B$,即有

$$\varphi_1(\|x_1\|) > \varphi_1\|B\| \tag{20}$$

由条件 2)有

$$\int_{V(t_0,x)}^{V(t,x)} \frac{\mathrm{d}V}{h(V)} \leqslant -\int_{t_0}^{t} g(t)\mathrm{d}t$$

从而有

$$\int_{V(t_0,x_0)}^{V(t_1,x_1)} \frac{\mathrm{d}V}{h(V)} \leqslant -\int_{t_0}^{t} g(t)\mathrm{d}t$$

由条件 1)则有

$$\int_{V(t_0,x_0)}^{\varphi_1(\|x_1\|)} \frac{\mathrm{d}V}{h(V)} \leqslant \int_{V(t_0,x_0)}^{V(t_1,x_1)} \frac{\mathrm{d}V}{h(V)} \leqslant -\int_{t_0}^{t} g(t)\mathrm{d}t$$

进而有

$$\int_{\varphi_1(B)}^{\varphi_1(\|x_1\|)} \frac{\mathrm{d}V}{h(V)} \leqslant \int_{V(t_0,x_0)}^{\varphi_1(\|x_1\|)} \frac{\mathrm{d}V}{h(V)} + \int_{\varphi_1(B)}^{V(t_0,x_0)} \frac{\mathrm{d}V}{h(V)} \leqslant -\int_{t_0}^{t} g(t)\mathrm{d}t + C \tag{21}$$

其中 $C = \int_{\varphi_1(B)}^{V(t_0,x_0)} \frac{\mathrm{d}V}{h(V)}$,由 $h(s) \geqslant 0$,则由(18)和(20)式有

$$0 < \int_{\varphi_1(B)}^{\varphi_1(\|x_1\|)} \frac{\mathrm{d}V}{h(V)} \leqslant \int_{V(t_0,x_0)}^{\varphi_1(\|x_1\|)} \frac{\mathrm{d}V}{h(V)} + \int_{\varphi_1(B)}^{V(t_0,x_0)} \frac{\mathrm{d}V}{h(V)} \leqslant -\int_{t_0}^{t} g(t)\mathrm{d}t + C \tag{22}$$

再由(18)式知,必存在 $T = T(t_0B,x_0)$,使得

$$-\int_{t_0}^{t} g(t)\mathrm{d}t + C < 0,(\forall t \geqslant t_0 + T) \tag{23}$$

则由(22)和(23)式有

$$0 < \int_{\varphi_1(B)}^{\varphi_1(\|x_1\|)} \frac{\mathrm{d}V}{h(V)} \leqslant \int_{V(t_0,x_0)}^{\varphi_1(\|x_1\|)} \frac{\mathrm{d}V}{h(V)} + \int_{\varphi_1(B)}^{V(t_0,x_0)} \frac{\mathrm{d}V}{h(V)} \leqslant -\int_{t_0}^{t} g(t)\mathrm{d}t + C < 0$$

导出矛盾,则假设不成立,从而存在 $T = T(t_0,B,x_0) \geqslant t_0$,使得当 $t \geqslant t_0 + T$ 时,有 $\|x\| \leqslant B$,即系统(1)的解最终有界。

若条件 1)加强为(19)式,则对于任意 $x_0 \in S_\alpha = \{x \mid \|x\| \leqslant \alpha\}$ 有 $V(t_0,x_0) \leqslant \varphi_2(\alpha)$,(21)式演变为

$$\int_{\varphi_1(B)}^{\varphi_1(\|x_1\|)} \frac{\mathrm{d}V}{h(V)} \leqslant \int_{V(t_0,x_0)}^{\varphi_1(\|x_1\|)} \frac{\mathrm{d}V}{h(V)} + \int_{\varphi_1(B)}^{V(t_0,x_0)} \frac{\mathrm{d}V}{h(V)} \leqslant \int_{V(t_0,x_0)}^{\varphi_1(\|x_1\|)} \frac{\mathrm{d}V}{h(V)} + \int_{\varphi_1(B)}^{\varphi_2(\alpha)} \frac{\mathrm{d}V}{h(V)} \leqslant -\int_{t_0}^{t} g(t)\mathrm{d}t + C$$

则 $T = T(\alpha,B)$ 与 t_0,x_0 无关,当 $t \geqslant t_0 + T$ 时,$\|x\| \leqslant B$。这就证明了系统(1)的解是一致最终有界的。　　证毕

推论 2 设连续函数 $V(t,x)$ 满足

1) $\varphi_1(\|x\|) \leqslant V(t,x) \leqslant \varphi_2(\|x\|)$,对 $\|x\| \geqslant B$ 成立,$\varphi_1,\varphi_2 \in K$;

2) $D^{+}V|_{(1)} \leqslant -g(t)\varphi_3(\|x\|)$,其中 $h(s) \geqslant 0$,$g(t)$,$1/h(s)$,$\varphi_3 \in K$ 可积;

3) 若 $\int_{t_0}^{\infty} g(t) = +\infty$,则系统(1)的解对 B 一致最终有界。

证明 事实上,由条件 1)可得到

$$\|x\| \leqslant \varphi_2^{-1}(V(t,x))$$

则条件 2)变为

$$D^{+}V|_{(1)} \leqslant -g(t)\varphi_3(\|x\|) \leqslant -g(t)\varphi_3(\varphi_2^{-1}(V(t,x)))$$

由此,与定理 2 类似可以证得结论成立。　　证毕

注3 事实上只要 $g(t) \geqslant 0$，其它条件不变，就可得到与定理1相同的结论。当 $g(t)=1$，则由推论得到经典的系统的解对 B 一致最终有界的结论[7]。

例 考虑以下系统

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = \left(-1+\dfrac{\sin t}{1+t^2}\right)x_1 + \dfrac{\sin t}{1+t^2}x_2 \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\cos t}{1+t^2}x_1 + \left(-1+\dfrac{\sin t}{1+t^2}\right)x_2 \end{cases}$$

的有界性。

由系统的特点，作出相应的 V 函数

$$V=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \left(-1+\frac{\sin t}{1+t^2}\right)x_1^2 + \frac{\sin t}{1+t^2}x_1x_2 + \frac{\cos t}{1+t^2}x_1x_2 + \left(-1+\frac{\sin t}{1+t^2}\right)x_2^2 \leqslant \left(-1+\frac{\sin t}{1+t^2}\right)(x_1^2+x_2^2) + x_1^2+x_2^2 = \frac{\sin t}{1+t^2}(x_1^2+x_2^2) = 2\frac{\sin t}{1+t^2}V$$

令 $g(t)=\dfrac{\sin t}{1+t^2}$，$h(V)=2V$，显然 $g(t)$ 和 $h(V)$ 满足定理1的条件，则由定理1得出所给系统是有界的。

这里可看到随着 t 的变化，V 函数的导数不断变号，突破了以往要求其负定或常负的限制。

致谢：衷心感谢导师杨志春副教授对本文的指导！

参考文献：

[1] 闫醴民. 非自治系统渐近稳定性的几个判据[J]. 数学杂志，1985，4：385-392.

[2] 李克难. 微分方程渐近稳定性定理的推广及应用[J]. 应用数学学报，1989，12(1)：54-64.

[3] 徐道义. 关于稳定性的几个基本定理[J]. 数学季刊，1992，7(2)：61-67.

[4] 湛少锋. 关于微分方程解的一致非常稳定性与一致距离有界性[J]. 大学数学，2006，22(3)：76-77.

[5] 李焕银. 常系数线性中立型时滞大系统的零解稳定性[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，1999，16(3)：35-40.

[6] 周彪. 非线性时滞系统的一致有界性[J]. 四川师范大学学报(自然科学版)，2000，23(1)：33-35.

[7] 廖晓昕. 稳定性的理论、方法和应用(第二版)[M]. 武汉：华中理工大学出版社，1999.

[8] 黄志霞，傅希林. 非线性微分系统的(h_0，h，M_0)-一致有界性的判别准则[J]. 山东师范大学学报(自然科学版)，2006，21(1)：15-17.

Several New Criteria on Boundedness of Nonautonomous System

WU Ze-gang

(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: In this paper, boundedness of nonautonomous system $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x)$ are studied. Here $f(t,x)\in[I\times\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n]$, $I\in(-\infty,+\infty)$ and $f(t,x)$ satisfy the only solution in the differential systems. By expanding Lyapunov function methods, some new criteria on boundedness, uniform boundedness, ultimate boundedness and uniform ultimate boundedness are obtained. The derived functions of "V" are portrayed by two functions in all of the three theorems here. Among them, one of the portraitting function's infinite integral has upper bound and the other is set function in No. 1 theorem. So it is not requiring the derived function of "V" to be negative definite, or even always negative longer yet. Like the No. 1, as the definition of bound in the function which is associated with "V", it can be a general bounded function in No. 2s. The restrictions of "V" are weakened, and the results in related literatures are improved then. An example is given to demonstrate the applicability of one criterion.

Key words: boundedness; ultimate boundedness; Lyapunov methods

(责任编辑 游中胜)