运筹学与控制论

B-预不变凸函数在多目标规划中的对偶问题*

赵克全，陈　哲
(重庆师范大学 数学与计算机科学学院，重庆 400047)

摘　要：B-预不变凸函数是一类十分重要的广义凸性函数，是对 B-凸函数的一种十分重要的推广形式。自 S. K. Suneja 等人建立 B-预不变凸函数的概念以来，许多学者对其进行了更加深入的研究，得出了一系列十分重要的结果。本文基于广义凸性在数学规划及最优化理论中的重要作用，在已有文献的基础上，利用函数的 B-预不变凸性，给出了多目标规划的一些对偶性结果，分别建立了 Mond-Weir 型对偶模型和 Wolf 型对偶模型的强对偶性和弱对偶性结果，本文的结论是对最近一些文献中相应结论的改进与推广。

关键词：不变凸集；预不变凸函数；B-预不变凸函数；多目标规划；对偶

中图分类号：O221.6　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2008)02-0001-03

1991 年，作为对凸函数概念的推广，C. R. Bector 和 C. Singh 在文献[1]中引入了 B-凸函数的概念，讨论了 B-凸函数的一些性质。此后，C. R. Bector 等人在文献[2]中，在可微情形下引入了 B-凸函数和 B-不变凸函数的概念，讨论了包含 B-凸函数和 B-不变凸函数的非线性规划最优解的充分性条件及对偶性。1993 年，作为对预不变凸函数的推广(当然也是对凸函数的推广)，S. K. Suneja，C. Singh 和 C. R. Bector 在文献[3]中引入了 B-预不变凸函数的定义。文献[4]中，N. G. Rueda，C. Singh 和 C. R. Bector 进一步讨论了 B-凸函数的一些性质，并讨论了 B-凸函数在单目标规划中的一些应用。1994 年刘庆怀等人在文献[5]中借助 Clarke 次微分得到了目标函数，约束函数均为 Lipschitz 函数，又为 B-凸函数的非线性规划最优解的必要条件和充分条件。此外，杨新民等人在文献[6]中还引入了半严格 B-预不变凸函数(即显 B-预不变凸函数)的概念，半严格 B-预不变凸函数包含半严格预不变凸为特例。

1999 年，李延忠等人在文献[7]中利用函数的 B-凸性对多目标规划建立了 Mond-Weir 型对偶和 Wolf 型对偶。本文在文献[7]的基础上，利用可微函数的 B-不变凸性，建立了多目标规划的一些新的对偶结果，其结果是对文献[7]及最近一些文献中相应结论的推广。

1 预备知识

定义 1[8]　称 X 为不变凸集，若存在向量值函数 $\eta(x,y)$，使得

$$\forall x,y \in X, \lambda \in [0,1], y+\lambda\eta(x,y) \in X$$

定义 2[9]　X 为不变凸集，称 $f(x)$ 关于相同的 $\eta(x,y)$ 为预不变凸函数。若

$$\forall x,y \in X, \lambda \in [0,1], f(y+\lambda\eta(x,y)) \leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

定义 3[1]　X 为非空集合，$b: X\times X\times[0,1]\to \mathbf{R}_+$，称 $f(x)$ 在 y 处关于 b 为 B-凸函数。若 $\forall x \in X, \lambda \in [0,1]$，有 $1-\lambda b(x,y,\lambda) \geqslant 0$ 且

$$f(y+\lambda(x-y)) \leqslant \lambda b(x,y,\lambda)f(x)+(1-\lambda b(x,y,\lambda))f(y)$$

定义 4[4]　X 为不变凸集，$f: X\to \mathbf{R}$ 可微，又设 $\bar{b}: X\times X\to\mathbf{R}_+$，其中 $\bar{b}(x,y)=\lim\limits_{\lambda\to 0^+} b(x,y,\lambda) \geqslant 0$，称 $f(x)$ 在 y 处关于 $\bar{b}$ 和 $\eta(x,y)$ 为 B-不变凸函数。若 $\bar{b}(x,y)=(f(x)-f(y)) \geqslant \eta(x,y)^{\mathrm{T}}\nabla f(y), \forall x \in X$

定义 5[10]　X 为不变凸集，$b: X\times X\times[0,1]\to \mathbf{R}_+$，称 $f(x)$ 在 y 处关于 b 和 η 为 B-预不变凸函数。若 $\forall x \in X, \lambda \in [0,1]$，有 $1-\lambda b(x,y,\lambda) \geqslant 0$ 且

$$f(y+\lambda\eta(x,y)) \leqslant \lambda b(x,y,\lambda)f(x)+(1-\lambda b(x,y,\lambda))f(x)$$

设 X 关于 η 为开不变凸集，考虑下面的多目标

* 收稿日期：2007-11-16　　修回日期：2008-01-14
资助项目：国家自然科学基金(No. 10626025)
作者简介：赵克全(1979-)，男，硕士，讲师，研究方向为广义凸性及在最优化理论中的应用。

规划问题

$$(\mathrm{VP})\qquad \min f(x)\quad \mathrm{s.t}\quad g(x)\leqslant 0$$

其中$f:X\to\mathbf{R}^p$,$g:X\to\mathbf{R}^m$,记

$$P=\{i:i=1,2,\cdots,p\},M=\{j:j=1,2,\cdots,m\},$$
$$S=\{x\in X:g(x)\leqslant 0\}$$
$$f(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_p(x)),g(x)=(g_1(x),g_2(x),\cdots,g_m(x))$$

$a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm T}\in\mathbf{R}^n$,$(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm T}\in\mathbf{R}^n$

$a\geqslant b\Leftrightarrow a_i\geqslant b_i$ 且存在某个k,$1\leqslant k\leqslant n$,使得$a_k>b_k$。

(VP)的Mond-Weir型对偶模型:

$$(\mathrm{VDM})\qquad \max f(y)$$
$$\mathrm{s.t}\quad \nabla[w^{\mathrm T}f(y)+\mu^{\mathrm T}g(y)]=0$$
$$\mu^{\mathrm T}g(y)\geqslant 0$$
$$w\geqslant 0,\mu\geqslant 0$$

(VP)的Wolf型对偶模型:

$$(\mathrm{VDM})\qquad \max f(y)+\mu^{\mathrm T}g(y)$$
$$\mathrm{s.t}\quad \nabla(w^{\mathrm T}f(y)+\mu^{\mathrm T}g(y))=0$$
$$w\geqslant 0,\mu\geqslant 0$$

2 主要结论及其证明

为证明本文的主要结论,先给出下面的引理。

引理 若$f(x)$为关于b和η的B-预不变凸函数,则存在$\bar b:X\times X\to\mathbf{R}_+$,使得

$$\bar b(x,y)[f(x)-f(y)]\geqslant\eta(x,y)^{\mathrm T}\nabla f(y),\forall x,y\in X$$

证明 因$f(x)$为关于b和η的B-预不变凸函数,则$\forall x\in X,\lambda\in[0,1]$有$1-\lambda b(x,y,\lambda)\geqslant 0$且

$$f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\lambda b(x,y,\lambda)f(x)+(1-\lambda b(x,y,\lambda))f(y)$$

故

$$b(x,y,\lambda)(f(x)-f(y))\geqslant\frac{f(y+\lambda\eta(x,y))-f(y)}{\lambda},\forall\lambda\in(0,1]$$

令$\lambda\to 0^+$可得

$$\bar b(x,y)[f(x)-f(y)]\geqslant\eta(x,y)^{\mathrm T}\nabla f(y),\forall x,y\in X$$

其中$\bar b(x,y)=\lim\limits_{\lambda\to 0^+}b(x,y,\lambda)$。 证毕

定理1 设$\bar x\in M$,若存在$\bar w\in\mathbf{R}^p$,$\bar\mu\in\mathbf{R}^m$满足

$$\nabla[\bar w^{\mathrm T}f(\bar x)+\bar\mu^{\mathrm T}g(\bar x)]=0$$
$$\bar\mu^{\mathrm T}g(\bar x)=0,\bar w\geqslant 0,\bar\mu\geqslant 0$$

且存在某个$i\in P$,使得$\bar b_i^*(x,\bar x)>0$,其中$\bar b_i^*(x,\bar x)=\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\bar b_i(x,\bar x,\lambda)$,$\bar b_j^*(x,\bar x)=\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\bar b_j(x,\bar x,\lambda)$,$\forall x\in S$,则$\bar x$是(VP)的弱有效解。

证明 反证法,设$\bar x$不是(VP)的弱有效解,则存在$x\in S$,使得$f(x)<f(\bar x)$。由$\bar w\in\mathbf{R}^p$,$\bar w\geqslant 0$,可知

$$\sum_{i=1}^p\bar w_if_i(x)<\sum_{i=1}^p\bar w_if_i(\bar x)$$

再由f_i关于η,$\bar b_i$是B-预不变凸函数及性质知,对$i\in P$,$\eta(x,\bar x)^{\mathrm T}\nabla f_i(\bar x)\leqslant\bar b_i^*(x,\bar x)[f_i(x)-f_i(\bar x)]$故

$$\sum_{i=1}^p\bar w_i\eta(x,\bar x)^{\mathrm T}\nabla f_i(\bar x)\leqslant\sum_{i=1}^p\bar w_i\bar b_i^*(x,\bar x)[f_i(x)-f_i(\bar x)]$$

由于存在某个$i\in P$,使得$\bar b_i^*(x,\bar x)>0$及$\sum\limits_{i=1}^p\bar w_if_i(x)<\sum\limits_{i=1}^p\bar w_if_i(\bar x)$,故$\eta(x,\bar x)^{\mathrm T}\nabla(\bar w^{\mathrm T}f(\bar x))<0$;另一方面,由于$g_j$关于$\eta$,$\bar b_j$是$B$-预不变凸函数,故有

$$\eta(x,\bar x)^{\mathrm T}\nabla g_j(\bar x)\leqslant\bar b_j^*(x,\bar x)[g_j(x)-g_j(\bar x)]$$
$$\eta(x,\bar x)^{\mathrm T}\nabla(\bar\mu^{\mathrm T}g(\bar x))\leqslant\sum_{j=1}^m\bar b_j^*(x,\bar x)\bar\mu_j[g_j(x)-g_j(\bar x)]\leqslant\sum_{j=1}^m\bar b_j^*(x,\bar x)\bar\mu_jg_j(x)\leqslant 0$$

故$\eta(x,\bar x)^{\mathrm T}(\nabla(\bar w^{\mathrm T}f(\bar x))+\nabla(\bar\mu^{\mathrm T}g(\bar x)))<0$,这与$\nabla[\bar w^{\mathrm T}f(\bar x+\bar\mu^{\mathrm T}g(\bar x))]=0$矛盾。故$\bar x$是(VP)的弱有效解。 证毕

假设X关于η为不变凸集,f,g在X上是可微的。下面考虑Mond-Weir型对偶问题。

定理2(弱对偶)假设x和(y,w,μ)分别是VP和VDM的可行解,且在y处,$w^{\mathrm T}y$是关于b_0和η的B-预不变凸函数,$\mu^{\mathrm T}g$是关于b_1和η的B-预不变凸函数且

$$b_0^*(x,y)=\lim_{\lambda\to 0^+}b_0(x,y,\lambda)>0,$$
$$b_1^*(x,y)=\lim_{\lambda\to 0^+}b_1(x,y,\lambda)$$

则$f(x)\not< f(y)$。

证明 当$x=y$时,结论显然成立。

下设$x\neq y$,由$w^{\mathrm T}f$在y处关于b_0和η的B-预不变凸性及性质可知

$$\eta(x,y)^{\mathrm T}\nabla(w^{\mathrm T}f(y))\leqslant b_0^*(x,y)w^{\mathrm T}(f(x)-f(y))$$

而$\mu^{\mathrm T}g(y)\geqslant 0\geqslant w^{\mathrm T}g(x)$,且$\mu^{\mathrm T}g$关于$b_1$和$\eta$的$B$-预不变凸性,故

$$\eta(x,y)^{\mathrm T}\nabla(\mu^{\mathrm T}g(y))\leqslant b_1^*(x,y)\mu^{\mathrm T}(g(x)-g(y))\leqslant 0$$

另外由于(y,w,μ)是(VDM)的可行解,故有

$$\nabla(w^{\mathrm{T}}f(y)) = -\nabla(\mu^{\mathrm{T}}g(y))$$

故

$$b_0^*(x,y)w^{\mathrm{T}}(f(x)-f(y)) \geqslant -\eta(x,y)^{\mathrm{T}}\nabla(\mu^{\mathrm{T}}g(y)) \geqslant 0$$

而 $b_0^* > 0$,从而 $w^{\mathrm{T}}f(x) \geqslant w^{\mathrm{T}}f(y)$。故 $f(x) \not< f(y)$。

证毕

定理3(强对偶)假设 $\bar{x}$ 是(VP)的弱有效解,(VP)满足K-T约束规格,且存在 $\bar{w} \in \mathbf{R}^p$,$\bar{\mu} \in \mathbf{R}^m$,使得 $\bar{w}^{\mathrm{T}}f$ 在 $\bar{x}$ 处是关于 b_0 和 η 的 B-预不变凸函数,$\bar{\mu}^{\mathrm{T}}g$ 在 $\bar{x}$ 处是关于 b_1 和 η 的 B-预不变凸函数且 $\forall x \in S$ 有

$$b_0^*(x,\bar{x}) = \lim_{\lambda\to 0^+} b_0(x,\bar{x},\lambda) > 0,$$
$$b_1^*(x,\bar{x}) = \lim_{\lambda\to 0^+} b_1(x,\bar{x},\lambda)$$

则 $(\bar{x},\bar{w},\bar{\mu})$ 是(VDM)的弱有效解且目标值相等。

证明 由于 $\bar{x}$ 是(VP)的弱有效解且(VP)满足K-T约束规格,则存在 $\bar{w} \in \mathbf{R}^p$,$\bar{\mu} \in \mathbf{R}^m$ 满足K-T条件:

$$\nabla(\bar{w}^{\mathrm{T}}f(\bar{x}) + \bar{\mu}^{\mathrm{T}}g(\bar{x})) = 0,$$
$$\bar{\mu}^{\mathrm{T}}g(\bar{x}) = 0, g(\bar{x}) \leqslant 0$$
$$\bar{w} \geqslant 0, \bar{\mu} \geqslant 0$$

由此可知,$(\bar{x},\bar{w},\bar{\mu})$ 是(VDM)的可行解。

下证 $(\bar{x},\bar{w},\bar{\mu})$ 是(VDM)的弱有效解,若不然,则存在可行解 (y,w,μ) 使得 $f(y) > f(\bar{x})$。又由于 $\bar{x}$ 与 (y,w,μ) 分别是(VP)和(VDM)的可行解,故由弱对偶定理可知 $f(y) \leqslant f(\bar{x})$,这与 $f(y) > f(\bar{x})$ 矛盾。故 $(\bar{x},\bar{w},\bar{\mu})$ 是(VDM)的弱有效解且目标函数值显然相等。

证毕

考虑(VP)的Wolf型对偶问题。

定理4(弱对偶)假设 x 和 (y,w,μ) 分别是VP和VDM的可行解,且在 y 处,$w^{\mathrm{T}}f$ 是关于 b_0 和 η 的 B-预不变凸函数,$\mu^{\mathrm{T}}g$ 是关于 b_1 和 η 的 B-预不变凸函数且

$$b_0^*(x,y) = \lim_{\lambda\to 0^+} b_0(x,y,\lambda) > 0,$$
$$b_1^*(x,y) = \lim_{\lambda\to 0^+} b_1(x,y,\lambda)$$

则 $f(x) \not< f(y)$。

定理5(强对偶)假设 $\bar{x}$ 是(VP)的弱有效解,(VP)满足K-T约束规格,且存在 $\bar{w} \in \mathbf{R}^p$,$\bar{\mu} \in \mathbf{R}^m$,使得 $\bar{w}^{\mathrm{T}}f$ 在 $\bar{x}$ 处是关于 b_0 和 η 的 B-预不变凸函数,$\bar{\mu}^{\mathrm{T}}g$ 在 $\bar{x}$ 处是关于 b_1 和 η 的 B-预不变凸函数且 $\forall x \in S$ 有

$$b_0^*(x,\bar{x}) = \lim_{\lambda\to 0^+} b_0(x,\bar{x},\lambda) > 0,$$
$$b_1^*(x,\bar{x}) = \lim_{\lambda\to 0^+} b_1(x,\bar{x},\lambda)$$

则 $(\bar{x},\bar{w},\bar{\mu})$ 是(VDM)的弱有效解且目标值相等。

定理4与定理5的证明和定理2和定理3是类似的。

3 结束语

本文在可微 B-预不变凸性条件下,建立了多目标规划[11-12]中Mond-Weir型对偶模型和Wolf型对偶模型的强对偶及弱对偶性结果。

参考文献:

[1] BECTOR C R, SINGH C. *B*-vex Functions[J]. JOTA, 1991, 71:237-253.

[2] BECTOR C R, SUNEJA S K, LALITHA C S. Generalized *B*-vex Functions and Generalized *B*-vex Programming[J]. JOTA, 1993, 76(3):561-576.

[3] SUNEJA S K, SINGH C, BECTOR C R. Generalization of Preinvex and *B*-vex Functions[J]. JOTA, 1993, 76(3):577-587.

[4] RUEDA N G, SINGH C, BECTOR C R. Further Properties of *B*-vex Functions[J]. Infor Optim, 1992, 13(2):195-206.

[5] 刘庆怀,董加礼,李晓峰. 非光滑Lipschitz *B*-凸规划[A]. 越民义. 最优化理论与应用[C]. 西安:西安电子科技大学出版社,1994:82-85.

[6] YANG X M, YANG X Q, TEO K L. Explicitly *B*-preinvex functions[J]. Comp Appl Math, 2002, 146:25-36.

[7] 李延忠,邹杰涛,王作全. *B*-凸函数下多目标规划的Mond-Weir对偶和Wolf对偶[J]. 吉林大学自然科学学报,1999,1:38-40.

[8] WEIR T, MOND B. Preinvex Functions in Multiple Objective Optimization[J]. JMAA, 1988, 136:29-38.

[9] WEIR T, JEYAKUMAR V. A Class of Nonconvex Functions and Mathematical Programming[J]. Bulletin of Australian Mathematical Society, 1988, 38:177-189.

[10] ANTCZAK T. A Class of *B*-(p,r)-invex Functions and Mathematical Programming[J]. JMAA, 2003, 286:187-206.

[11] 颜丽佳. 非光滑(F,α,ρ,d)-凸函数的多目标分式规划最优性条件[J]. 西华师范大学学报(自然科学版),2006,27(4):361-364.

[12] 杨新民. 关于不可微多目标规划的二阶Mond-Weir对称对偶性[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2007,24(2):4-5.

Duality of Multi-objective Programming about *B*-preinvex Function

ZHAO Ke-quan, *CHEN Zhe*

(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: *B*-preinvex function is a kind of important generalized convex functions. It is an important generalization for *B*-convex function. Since the concept of *B*-preinvex function is introduced by S. K. Suneja etc, many scholars investigated its characterizations and applications in mathematical programming and optimization theory more thoroughly. A series of important conclusions has been obtained. Based on the important effect of generalized convexity in mathematical programming and optimization theory and under the existed results, some duality results about multi-objective programming are obtained under differentiable *B*-preinvex function in this paper. The sufficient conditions of weak efficient solution are given. Some conclusions about strong duality and weak duality for Mond-Weir type model and Wolf type model are constructed. These conclusions are generalizations of corresponding results.

Key words: invex sets; preinvex functions; *B*-Preinvex functions; multi-objective programming problem; duality

(责任编辑 游中胜)