运筹学与控制论

Lipschitz 增生算子方程逼近解的带误差的 Ishikawa 迭代序列*

敖 军[1],刘亮亮[1],彭再云[2]
(1. 重庆师范大学 数学与计算机科学学院,重庆 400047;2. 重庆交通大学 理学院应用数学研究部,重庆 400074)

摘 要:设 X 是一实 Banach 空间,$T:X\to X$ 是 Lipschitz 连续的增生算子,在没有假设 $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\beta_n<\infty$ 之下,本文证明了由 $x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n(f-Ty_n)+u_n$ 以 $y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_n(f-Tx_n)+v_n$,$\forall n\geqslant 0$ 产生的带误差的 Ishikawa 迭代序列强收敛到方程 $x+Tx=f$ 的唯一解,并给出了更为一般的收敛率估计:若 $u_n=v_n=0$,$\forall n\geqslant 0$,则有 $\|x_{n+1}-x^*\|\leqslant(1-\alpha_n)\|x_n-x^*\|\leqslant\cdots\leqslant\prod_{i=0}^{n}(1-\alpha_j)\|x_n-x^*\|$,其中 $\{\alpha_n\}$ 是(0,1)中的序列,满足 $\gamma_n\geqslant\frac{\eta}{4}L(L+1)\alpha_n$,$\forall n\geqslant 0$。

关键词:实 Banach 空间;Lipschitz 增生算子;带误差的 Ishikawa 迭代序列;收敛率估计
中图分类号:O177.91 文献标识码:A 文章编号:1672-6693(2008)02-0008-04

1 预备知识

设 X 是一实 Banach 空间,其对偶空间是 X^*。记 X 与 X^* 之间的对偶对为$\langle\cdot,\cdot\rangle$,且记 X 的正规对偶映象为 $J(\cdot)$,即 $J(x)=\{x^*\in X^*:\langle x,x^*\rangle=\|x\|^2=\|x^*\|^2\}$,$\forall x\in X$。$X$ 中具有定义域 $D(T)$ 与值域 $R(T)$ 的算子 T 称为增生的,若对一切 $x,y\in D(T)$ 及 $r>0$,有 $\|x-y\|\leqslant\|x-y+r(Tx-Ty)\|$。已熟知,$T$ 是增生的当且仅当对任意 $x,y\in D(T)$,存在 $j(x-y)\in J(x-y)$,使得$\langle Tx-Ty,j(x-y)\rangle\geqslant 0$。一个增生算子 T 称为 m-增生的,若 $R(I+r)=X$ 对一切 $r>0$,其中 I 是 X 上的恒等算子。增生算子由 Browder[1] 与 Kato[2] 各自独立引入。在增生算子理论中,一个归功于 Browder 的早期的基本结果是,若 T 是 X 上的局部 Lipschitz 增生算子,则初值问题 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t+Tu=0$,$u(0)=u_0$ 有解。许多学者对增生算子方程解的存在性和迭代逼近做了深入的研究[3-8]。

最近,Liu[4] 把 Tan 与 Xu[3] 的结果从 p 一致光滑 Banach 空间推广到任意 Banach 空间,而且还提供了收敛率估计。同时,曾[5] 又把 Liu[4] 的结果加以改进和推广,去掉了部分限制条件。

本文受文献[4-5]的启发,在一实 Banach 空间中,证明了带误差的 Ishikawa 迭代序列强收敛到方程 $x+Tx=f$ 的唯一解,并提供了更为一般的收敛率估计,其中 T 是 X 到 X 的 Lipschitz 增生算子。本文从以下两个方面改进和拓展了文献[5]的结果:1)去掉了限制条件 $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\beta_n<\infty$;2)将 Ishikawa 迭代序列推广到带误差的 Ishikawa 迭代序列。因此本文在很大程度上统一和发展了 Tan 与 Xu[3],Liu[4],曾[5] 的结果。

下列引理在证明本文的主要结果中将发挥重要作用。

引理 1[6] 设 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$ 与 $\{t_n\}$ 是非负实数列,满足下列条件:

i)$t_n\in[0,1]$,且 $\sum_{n=0}^{\infty}t_n=\infty$;

ii)$\sum_{n=0}^{\infty}b_n<\infty$,且 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n<\infty$;

若 $a_{n+1}\leqslant(1-t_n)a_n+b_na_n+c_n$,$\forall n\geqslant 0$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。

引理 2[7] 设 X 是一实 Banach 空间,且 $T:D(T)\subset X\to X$ 是一 m-增生映象,则对任给 $f\in X$,方程 $x+Tx=f$ 在 $D(T)$ 中有唯一解。

* 收稿日期:2007-12-03 修回日期:2008-02-03
资助项目:重庆市自然科学基金资助项目(No. CSTC2005BB2189)
作者简介:敖军(1980-),男,硕士研究生,研究方向为优化理论。

2 主要结果

定理1 设 X 是一实 Banach 空间,且 $T:D(T)\subset X\to X$ 是 Lipschitz 连续的增生算子。又设 $\{u_n\}$ 与 $\{v_n\}$ 是 X 中的序列,$\{\alpha_n\}$ 与 $\{\beta_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的实序列,且满足下列条件:

i) $\sum_{n=0}^{\infty}\|u_n\|<\infty$,且 $\|v_n\|\to 0(n\to\infty)$;

ii) $\sum_{n=0}^{\infty}a_n=\infty$,且 $\beta=\limsup_{n\to\infty}\beta_n<\frac{1}{L(L+1)}$;

iii) $\limsup_{n\to\infty}\alpha_n<\frac{1-L(L+1)(\beta+\eta)}{L^2+3L}$,对某个 $\eta\in\left(0,\frac{1}{L(L+1)}-\beta\right)$。

其中,$L(\geqslant 1)$ 是 T 的 Lipschitz 常数,则对任意 $x_0\in X$,由下式生成的带误差的 Ishikawa 迭代序列

$$x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n(f-Ty_n)+u_n \quad (1)$$

$$y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_n(f-Tx_n)+v_n,\forall n\geqslant 0 \quad (2)$$

强收敛到方程 $x+Tx=f$ 的唯一解 x^*。特别地,若取 $u_n=v_n=0,\forall n\geqslant 0$,则存在 $(0,1)$ 中的序列 $\{\gamma_n\}$ 满足

$$\gamma_n\geqslant\frac{\eta}{4}L(L+1)\alpha_n,\forall n\geqslant 0$$

使得对一切 $n\geqslant 0$,有 $\|x_{n+1}-x^*\|\leqslant\prod_{j=0}^{n}(1-\gamma_j)\|x_0-x^*\|$。

证明 因 T 是 Lipschitz 连续的增生算子,由 Browder[1] 的结果知,T 是 m-增生的,由引理2可得,对任给 $f\in X$,方程 $x+Tx=f$ 在 X 中有唯一解,记 $x^*\in D(T)$。设 $Sx=f-Tx$,故 S 有不动点 x^* 且 S 为 Lipschitz 映象,有 Lipschitz 常数 L。由于 T 是增生的,则 $-s$ 也是增生的,因此对一切 $x,y\in D(T)$ 及 $r>0$,有

$$\|x-y\|\leqslant\|x-y-r(Sx-Sy)\| \quad (3)$$

由(1)式推得

$$x_n=x_{n+1}+\alpha_nx_n-\alpha_nSy_n-u_n=(1+\alpha_n)x_{n+1}+\alpha_n(-S)x_{n+1}+\alpha_n^2(x_n-Sy_n)+\alpha_n(Sx_{n+1}-Sy_n)-(\alpha_n+1)u_n$$

观察到,$x^*=(1+\alpha_n)x^*+\alpha_nSx^*$,故

$$x_n-x^*=(1+\alpha_n)(x_{n+1}-x^*)+\alpha_n[(-S)x_{n+1}-(-S)x^*]+\alpha_n^2(x_n-Sy_n)+\alpha_n(Sx_{n+1}-Sy_n)-(\alpha_n+1)u_n$$

于是,由(3)式可得

$$\|x_n-x^*\|\geqslant(1+\alpha_n)\left\|(x_{n+1}-x^*)+\frac{\alpha_n}{1+\alpha_n}[(-S)x_{n+1}-(-S)x^*]\right\|-\alpha_n^2\|x_n-Sy_n\|-\alpha_n\|Sx_{n+1}-Sy_n\|-(\alpha_n+1)\|u_n\|\geqslant(1+\alpha_n)\|x_{n+1}-x^*\|-\alpha_n^2\|x_n-Sy_n\|-\alpha_n\|Sx_{n+1}-Sy_n\|-(\alpha_n+1)\|u_n\|$$

从而,

$$\|x_{n+1}-x^*\|\leqslant\frac{1}{1+\alpha_n}\|(x_n-x^*)\|+\frac{1}{1+\alpha_n}[\alpha_n^2\|x_n-Sy_n\|+\alpha_n\|Sx_{n+1}-Sy_n\|+(\alpha_n+1)\|u_n\|] \quad (4)$$

注意到下列估计:

$$\|y_n-x^*\|=\|(1-\beta_n)(x_n-x^*)+\beta_n(Sx_n-x^*)+v_n\|\leqslant(1-\beta_n+L\beta_n)\|x_n-x^*\|+\|v_n\|$$

$$\|x_n-Sy_n\|\leqslant\|(x_n-x^*)\|+L\|y_n-x^*\|\leqslant[1+L+(L^2-L)\beta_n]\|(x_n-x^*)+L\|v_n\| \quad (5)$$

$$\|Sx_{n+1}-Sy_n\|\leqslant L\|(x_{n+1}-y_n)\|=L\|(1-\alpha_n)x_n+\alpha_nSy_n+u_n-y_n\|=L\|x_n-y_n+\alpha_n(Sy_n-x_n)+u_n\|\leqslant L\|\beta_n(Sx_n-x_n)+v_n\|+L\alpha_n\|Sy_n-x_n)\|+L\|u_n\|\leqslant L(L+1)\beta_n\|x_n-x^*\|+L\|v_n\|+L\|u_n\|+L\alpha_n[(1+L+(L^2-L)\beta_n)\|x_n-x^*\|+L\|v_n\|]\leqslant[L(L+1)\beta_n+L\alpha_n(1+L^2)\beta_n]\cdot\|x_n-x^*\|+L\|v_n\|+L^2\alpha_n\|v_n\|+L\|u_n\| \quad (6)$$

于是,把(5)、(6)式代入(4)式可得

$$\|x_{n+1}-x^*\|\leqslant\left(1-\frac{\alpha_n-(L+1)^2\alpha_n^2-L(L+1)\alpha_n\beta_n-L(L+1)(L-1)\alpha_n^2\beta_n}{1+\alpha_n}\right)\cdot\|x_n-x^*\|+L\alpha_n[1+\alpha_n(L+1)]\|v_n\|+(L\alpha_n+\alpha_n+1)\|u_n\| \quad (7)$$

对每个 $n\geqslant 0$,定义

$$\gamma_n=\frac{\alpha_n-(L+1)^2\alpha_n^2-L(L+1)\alpha_n\beta_n-L(L+1)(L-1)\alpha_n^2\beta_n}{1+\alpha_n}$$

由于 $\beta=\limsup_{n\to\infty}\beta_n<\frac{1}{L(L+1)}$,故对 $\eta\in\left(0,\frac{1}{L(L+1)}-\beta\right)$,有

$$L(L+1)\beta=\limsup_{n\to\infty}L(L+1)\beta_n<L(L+1)\beta+L(L+1)\frac{\eta}{2}<1$$

由此即知,存在自然数 N_0 使得

$$\sup_{i\geqslant n}L(L+1)\beta_i < L(L+1)\beta + L(L+1)\frac{\eta}{2} < 1,$$

$\forall n > N_0$ 且 $\beta_n < \frac{1}{L(L+1)}$, $\forall n \geqslant N_0$。所以对一切 $\forall n \geqslant N_0$,有

$$\gamma_n = \frac{\alpha_n - (L+1)^2\alpha_n^2 - L(L+1)\alpha_n\beta_n - L(L+1)(L-1)\alpha_n^2\beta_n}{1+\alpha_n} \geqslant$$

$$\frac{1}{1+\alpha_n}[\alpha_n - (L+1)^2\alpha_n^2 - \alpha_n \sup_{i\geqslant n}L(L+1)\beta_i -$$

$$L(L+1)(L-1)\alpha_n^2\frac{1}{L(L+1)}] \geqslant \frac{1}{1+\alpha_n}[\alpha_n - (L+1)^2\alpha_n^2 -$$

$$\left(\beta+\frac{\eta}{2}\right)L(L+1)\alpha_n - (L-1)\alpha_n^2] \geqslant$$

$$\frac{1}{1+\alpha_n}\left[\alpha_n - \left(\beta+\frac{\eta}{2}\right)L(L+1)\alpha_n - (L^2+3L)\alpha_n^2\right]$$

又因为 $\limsup_{n\to\infty}\alpha_n < \frac{1-L(L+1)(\beta+\eta)}{L^2+3L}$,故存在自然数 $N_1 \geqslant N_0$ 使得 $\alpha_n < \frac{1-L(L+1)(\beta+\eta)}{L^2+3L}$, $\forall n \geqslant N_1$。于是有

$$\gamma_n \geqslant \frac{1}{1+\alpha_n}\left[\alpha_n - \left(\beta+\frac{\eta}{2}\right)L(L+1)\alpha_n - (L^2+3L)\alpha_n^2\right] \geqslant$$

$$\frac{1}{1+\alpha_n}\left[\frac{\eta}{2}L(L+1)\alpha_n\right] \geqslant \frac{\eta}{4}L(L+1)\alpha_n \quad (8)$$

从而,由(7)、(8)式推得

$$\|x_{n+1}-x^*\| \leqslant (1-\gamma_n)\|x_n-x^*\| + L\alpha_n[1+\alpha_n(L+1)]\|v_n\| + (L\alpha_n+\alpha_n+1)\|u_n\| \quad (9)$$

令 $a_n = \|x_n - x^*\|$, $t_n = \frac{\eta}{4}L(L+1)\alpha_n$, $b_n = 0$,且

$$c_n = L\alpha_n[1+\alpha_n(L+1)]\|v_n\| + (L\alpha_n+\alpha_n+1)\|u_n\|$$

则(9)式可化为 $a_{n+1} \leqslant (1-t_n)\alpha_n + b_n\alpha_n + c_n$, $\forall n \geqslant 0$。由条件 ⅰ),ⅱ)知 $t_n \in (0,1)$, $\sum_{n=0}^{\infty}t_n = \infty$,且 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n < \infty$,故由引理1有 $\lim_{x\to\infty}a_n = 0$,即序列 $\{x_n\}$ 强收敛到 x^*。

收敛率估计 取 $u_n = v_n = 0$, $\forall n > 0$,则据(9)式有

$$\|x_{n+1}-x^*\| \leqslant (1-\gamma_n)\|x_n-x^*\| \leqslant \cdots \leqslant \prod_{j=0}^{n}(1-\gamma_j)\|x_0-x^*\|$$

其中,$\{\gamma_n\}$ 是(0,1)中的序列,满足 $\gamma_n \geqslant \frac{\eta}{4}L(L+1)\alpha_n$, $\forall n \geqslant 0$。 证毕

参考文献:

[1] BROWDER F E. Nonlinear Mapping of Nonexpansive and Accretive Type in Banach Spaces[J]. Bull Amer Math Soc,1967,73:875-882.

[2] KATO T. Nonlinear Semigroups and Evolution Equations [J]. J Math Soc Japan,1967,18:212-225.

[3] TAN K K,XU H K. Iterative Solutions to Nonlinear Equations of Strongly Accretive Operators in Banach Spaces[J]. J Math Anal Appl,1993,178:9-21.

[4] LIU L W. Strong Convergence of Iteration Methods for Equations Involvong Accretive Operators in Banach Spaces [J]. Nonlinear Anal,2000,42:271-276.

[5] 曾六川. Banach 空间中关于增生算子方程的迭代法的强收敛定理[J]. 数学年刊,2003,24A:231-238.

[6] 李育强,刘理蔚. 关于 Lipschitz 强增生算子的迭代程序[J]. 数学学报,1998,41:845-850.

[7] 张石生. m-增生算子方程解的 Mann 和 Ishikawa 迭代逼近[J]. 应用数学与力学,1999,20(12):845-850.

[8] 龙宪军,全靖. Banach 空间中关于增生算子方程解带误差的 Ishikawa 迭代序列[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2005,22(4):10-13.

[9] 李红梅. 广义 Lipschitz 增生算子方程的具有误差的 Ishikawa 迭代的收敛性和稳定性[J]. 四川师范大学学报(自然科学版),2003,26(2):116-119.

Ishikawa Iteration Process with Errors for Appoximate Solutions to Equations of Lipshitz Accretive Operators

AO Jun[1], *LIU Liang-liang*[1], *PENG Zai-yun*[2]

(1. College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047;

2. College of Science, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China)

Abstract: Let X be an arbitrary real Banach space and $T: X\to X$ be a Lipschitz continuous accretive operator. Under the lack of the assumption that $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\beta_n < \infty$, it is shown that the Ishikawa iterative sequence with errors enpendened by $x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n(f-Ty_n) + u_n$ and $y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n(f-Tx_n) + v_n$, for all $\forall n \geqslant 0$ converges strongly to the unique solution of the equation

$x + Tx = f$. Moreover, this result provides a general convergence rate estimate for such a sequence. If $u_n = v_n = 0$, for all $n \geqslant 0$, then we have $\| x_{n+1} - x^* \| \leqslant (1 - \alpha_n) \| x_n - x^* \| \leqslant \cdots \leqslant \prod_{i=0}^{n} (1 - \alpha_j) \| x_n - x^* \|$. Where $\{\alpha_n\}$ is a sequence in $(0,1)$, such that for all $n \geqslant 0$, $\gamma_n \geqslant \frac{\eta}{4} L(L + 1) \alpha_n$.

Key words: Real Banach space; Lipschitz accretive operator; Ishikawa iterative process with errors; Convergence rate estimate

(责任编辑　游中胜)