FC-空间中的 KKM 型定理与截口定理*

王　彬
(内江师范学院 数学系,四川 内江 641112)

摘　要:在没有任何凸性结构和线性结构的有限连续空间中引入了 FC-KKM 映象的概念,并在 FC-空间中证明了一个新的非空交定理,利用该非空交定理证明了一个新的不动点定理,再利用该不动点定理以及 Brouwer 不动点定理和连续单位分解定理在 FC-空间中证明了一个具有 FC-KKM 映象的 FC-KKM 定理和 FC-空间截口定理,并将所得结果应用于重合点问题的研究,证明了一个 FC-空间中新的重合点定理,推广了近期的相关文献。

关键词:FC-空间;转移开(闭)映象;FC-KKM 映象;截口定理;重合定理
中图分类号:O189.25　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2008)02-0025-04

1929 年,Knaster, Kuratowski 和 Mazurkiewicz 建立了著名的 KKM 定理,很多学者已从不同方向对其进行推广和改进。近年来,S. Park, H. Kim, R. U. Verma 以及 X. P. Ding 等对 KKM 定理进行了重大的推广[1-7]。受此启发,本文引进和证明了一个新的 KKM 型定理,给出截口定理在 FC-空间的推广,并将所得结果应用于重合点问题的研究。

1 基本定义及引理

设 X 和 Y 是两个非空的集合,用 $\langle X\rangle$ 和 2^Y 分别表示 X 的一切非空有限子集的簇和 Y 的所有子集的簇,对每个 $N\in\langle X\rangle$,$|N|$ 表示 N 的基数,Δ_n 表示以 $e_0,e_1,\cdots,e_n$ 为顶点的 n 维单形,Δ_J 表示顶点 $\{e_j: j\in J\}$ 的凸包,其中 J 为 $\{0,1,\cdots,n\}$ 的非空子集。

定义 1[8] 称 $(X,\{\varphi_N\})$ 为有限连续空间(简称为 FC-空间),若 X 为拓扑空间,且对每一个 $N=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}\in\langle X\rangle$,都存在连续映象 $\varphi_N:\Delta_n\to X$。$D\subset X$ 是 X 的 FC-子空间,如果对每一个 $N=\{x_0,\cdots,x_n\}\in\langle X\rangle$ 和每一个 $\{x_{i_0},\cdots,x_{i_k}\}\subset N\cap D$,$\varphi_N(\Delta_k)\subset D$,这里 $\Delta_k=\mathrm{co}(\{e_{i_j}: j=0,\cdots,k\})$,显然 FC-空间 $(X,\{\varphi_N\})$ 的每一个 FC-子空间也是一个 FC-空间。

注 1 FC-空间是一种没有任何凸性结构和线性结构的拓扑空间,它包括了所有抽象凸空间作为特例。

定义 2[9] 设 A 为拓扑空间 X 的子集。称 A 在 X 内是紧开(紧闭)的,如果对 X 的每一非空紧子集 K,有 $A\cap K$ 在 K 中是开(闭)的。

定义 3[6] 设 X,Y 是二拓扑空间。$T: X\to 2^Y$ 为集值映象

1) T 称为转移开映象,如果对任意 $x\in X$ 及任意 $y\in T(x)$,存在 $x'\in X$,使得 $y\in \mathrm{int}(T(x'))$;

2) T 称为转移闭映象,如果对任意 $x\in X$ 及任意 $y\notin T(x)$,存在 $x'\in X$,使得 $y\notin \overline{T(x')}$。

定义 4[10] 设 X 是一个非空集合,$(Y,\{\varphi_N\})$ 是一 FC-空间,称映象 $T: X\to 2^Y$ 是一个 R-KKM 映象,如果对任意 $\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}\in\langle X\rangle$,都存在

$$N=\{y_0,y_1,\cdots,y_n\}\in\langle Y\rangle$$

使得对任意

$$\{i_0,i_1,\cdots,i_k\}\subset\{0,1,\cdots,n\}$$

有 $\varphi_N(\Delta_k)\subset\cup_{j=0}^{k}T(x_{i_j})$,其中 Δ_k 是 Δ_n 的以 $\{e_{i_0},e_{i_1},\cdots,e_{i_k}\}$ 为顶点的标准 k-维子单形。

定义 5 设 $(X,\{\varphi_N\})$ 是 FC-空间,Y 是非空集合,$S,T: X\to 2^Y$ 是二映象,若对任意

$$N=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}\in\langle X\rangle,$$

都有 $T(\varphi_N(\Delta_n))\subset\bigcup_{i=0}^{n}S(x_i)$,则称 S 是关于 T 的 FC-KKM 映象。

引理 1[11] 设 X 和 Y 是两拓扑空间,$P: X\to 2^Y$ 是集值映射,则下列两个条件等价

1) P^{-1} 是转移开值的且对任意 $x\in X$,$P(x)$ 是

* 收稿日期:2007-06-11　　修回日期:2007-11-06
资助项目:四川省教育厅重点科研基金(No. 2003A081);四川省教育厅重点学科基金(No. SZD0406)
作者简介:王彬(1976-),男,四川彭州人,讲师,研究方向为非线性泛函分析。

非空的;

2) $X=\cup\{\text{int}\,P^{-1}(y):y\in Y\}$。

引理2[12] 设X和Y是两拓扑空间,$P:X\to 2^Y$是集值映射,那么P是转移闭值的当且仅当$\cap_{x\in X}P(x)=\cap_{x\in X}\overline{P(x)}$。

引理3 设X是非空集合,$(Y,\{\varphi_N\})$是FC-空间,$\{A_0,A_1,\cdots,A_n\}$是Y中紧开子集簇,且$Y=\bigcup_{i=0}^{n}A_i$,则对任意$\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}\in\langle X\rangle$,存在

$$N=\{y_0,y_1,\cdots,y_n\}\in\langle Y\rangle$$

和

$$\{i_0,i_1,\cdots,i_k\}\subset\{0,1,\cdots,n\},$$

使得$\varphi_N(\Delta_k)\cap(\bigcap_{j=0}^{k}A_{i_j})\neq\varnothing$。

证明 假设结论不真,则存在$\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}\in\langle X\rangle$,使得对任意

$$N=\{y_0,y_1,\cdots,y_n\}\in\langle Y\rangle$$

和

$$\{i_0,i_1,\cdots,i_k\}\subset\{0,1,\cdots,n\}$$

有$\varphi_N(\Delta_k)\cap(\bigcap_{j=0}^{k}A_{i_j})=\varnothing$。令$X_0=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}\in\langle X\rangle$,定义$G:X_0\to 2^Y$如下 对每一个$i\in\{0,1,\cdots,n\}$,$G(x_i)=Y\backslash A_i$,因为$A_i$是$Y$的紧开子集,因此$G(x_i)$在$Y$中紧闭。由于对任意

$$\{i_0,i_1,\cdots,i_k\}\subset\{0,1,\cdots,n\},$$

$$\varphi_N(\Delta_k)\cap(\bigcap_{j=0}^{k}A_{i_j})=\varnothing$$

于是

$$\varphi_N(\Delta_k)\subset\bigcup_{j=0}^{k}(Y\backslash A_{i_j})=\bigcup_{j=0}^{k}G(x_{i_j}),$$

而$(Y,\{\varphi_N\})$是FC-空间,即$G:X_0\to 2^Y$是R-KKM映象,由文献[10]中定理2.1的证明易知$\bigcap_{i=0}^{n}G(x_i)\neq\varnothing$。则

$$\bigcup_{i=0}^{n}A_i=\bigcup_{i=0}^{n}(Y\backslash G(x_i))=Y\backslash\bigcap_{i=0}^{n}G(x_i)\neq Y,$$

这与$Y=\bigcup_{i=0}^{n}A_i$矛盾,故结论成立。 证毕

定理1 设$(X,\{\varphi_N\})$是FC-空间,$D\subset X$是非空紧FC-子空间,$A:D\to 2^D$是集值映象且对任意$x\in D$,$A(x)$是X的非空FC-子空间,$A^{-1}:D\to 2^D$是转移开的,则存在$\bar{x}\in D$,使得$\bar{x}\in A(\bar{x})$。

证明 由A^{-1}转移开及对任意$x\in D$,$A(x)\neq\varnothing$,由引理1知$D=\bigcup_{x\in D}\text{int}\,A^{-1}(x)$。

由D是紧的,故存在$\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}\in\langle D\rangle$,使得$D=\bigcup_{i=0}^{n}\text{int}\,A^{-1}(x_i)$,令$B(x)=\text{int}\,A^{-1}(x)$,由引理3知,存在

$$\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}\in\langle D\rangle$$

和

$$\{i_0,i_1,\cdots,i_k\}\subset\{0,1,\cdots,n\},$$

使得$\varphi_N(\Delta_k)\cap(\bigcap_{j=0}^{k}B(x_{i_j}))\neq\varnothing$。任取

$$\bar{x}\in\varphi_N(\Delta_k)\cap(\bigcap_{j=0}^{k}B(x_{i_j})),$$

则$x_{i_j}\in B^{-1}(\bar{x})$,$j=0,1,\cdots,k$。因为$B^{-1}(\bar{x})\subset A(\bar{x})$及$A(\bar{x})$是$X$的FC-子空间,故

$$\bar{x}\in\varphi_N(\Delta_k)\subset A(\bar{x})$$ 证毕

定理2 设X是紧拓扑空间,$(Y,\{\varphi_N\})$是FC-空间,D是Y中的非空集,$T:X\to 2^D$满足条件

1) 对任意$x\in X$,$T(x)$是Y的非空FC-子空间;

2) $T^{-1}:D\to 2^X$是转移开的

则存在$N\in\langle D\rangle$及连续映象$\phi:X\to Y$,使得

$$\phi(x)\in T(x),\forall x\in X。$$

证明 因T^{-1}转移开及对任意$x\in X$,$T(x)\neq\varnothing$,由引理1知$X=\bigcup_{y\in D}\text{int}\,T^{-1}(y)$。

因X紧,故存在X的有限子覆盖$\{\text{int}\,T^{-1}(y_i)\}_{i=0}^{n}$,设$\{P_i\}_{i=0}^{n}$是与$\{\text{int}\,T^{-1}(y_i)\}_{i=0}^{n}$相对应的连续单位分解,定义映象$P:X\to\Delta_n$为$P(x)=\sum_{i=0}^{n}P_i(x)e_i$,$x\in X$,则$P$是连续的。令$N=\{y_0,y_1,\cdots,y_n\}\in\langle D\rangle$,由$(Y,\{\varphi_N\})$是FC-空间,故存在连续映象$\varphi_N:\Delta_n\to Y$,从而$\phi=\varphi_N\circ P:X\to Y$是连续映象,对任意$x\in X$,令

$$J(x)=\{j\in\{0,1,\cdots,n\}:P_j(x)\neq 0\},$$

则

$$P(x)=\sum_{j\in J(x)}P_j(x)e_j\in\Delta_{J(x)},$$

且$x\in\text{int}\,T^{-1}(y_j)$,$j\in J(x)$。于是$y_j\in T(x)$,$j\in J(x)$。由$T(x)$是$Y$的FC-子空间知,

$$\phi(x)=\varphi_N\circ P(x)\in\varphi_N(\Delta_{J(x)})\subset T(x)。$$ 证毕

2 主要结果

2.1 FC-KKM定理

定理3 设$(X,\{\varphi_N\})$是FC-空间,D是X中的非空紧FC-子空间,Y是一拓扑空间,$T:D\to Y$是连续映象,$S:D\to 2^Y$满足条件

1) S是关于T的转移闭的FC-KKM映象;

2) 对任意$y\in Y$,$D\backslash S^{-1}(y)$是X的FC-子空间

则

$$T(D)\cap(\bigcap_{x\in D}S(x))\neq\varnothing。$$

证明 假设结论不成立,则

$$T(D)\cap(\bigcap_{x\in D}S(x))=\varnothing,$$

因 S 是转移闭的,由引理2知,

$$T(D)\cap(\bigcap_{x\in D}\overline{S(x)})=\varnothing,$$

因而对任意 $y\in T(D)$,存在 $x'\in D$,使得 $y\notin\overline{S(x')}$,定义映象

$$P:Y\to 2^D,P(y)=D\backslash S^{-1}(y),$$

现考察映象 $P\circ T:D\to 2^D$,易知对任意 $x\in D$,$P(T(x))$ 是 X 的非空FC-子空间,而且有

$$\bigcup_{x\in D}\operatorname{int}(P\circ T)^{-1}(x)=\bigcup_{x\in D}\operatorname{int}T^{-1}(P^{-1}(x))=$$
$$\bigcup_{x\in D}\operatorname{int}T^{-1}(Y\backslash S(x))\supset\bigcup_{x\in D}\operatorname{int}T^{-1}(Y\backslash\overline{S(x)})=$$
$$\bigcup_{x\in D}T^{-1}(Y\backslash\overline{S(x)})=T^{-1}(\bigcup_{x\in D}(Y\backslash\overline{S(x)}))=$$
$$T^{-1}(Y\backslash\bigcap_{x\in D}\overline{S(x)})\supset T^{-1}(T(D)\backslash\bigcap_{x\in D}\overline{S(x)})=D$$

于是 $(P\circ T)^{-1}:D\to 2^D$ 是转移开的,由定理1知,存在 $\bar{x}\in D$,使得

$$\bar{x}\in P(T(\bar{x}))=D\backslash S^{-1}(T(\bar{x})),$$

由 $D\backslash S^{-1}(T(\bar{x}))$ 是 X 的FC-子空间,故存在

$$N=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}\in\langle D\backslash S^{-1}(T(\bar{x}))\rangle,$$

使得 $\bar{x}\in\varphi_N(\Delta_n)$,于是有 $T(\bar{x})\notin\bigcup_{i=0}^{n}S(x_i)$,这与 S 是关于 T 的FC-KKM映象矛盾。 证毕

2.2 截口定理

定理4 设 $(X,\{\varphi_N\})$ 是FC-空间,Y 为 X 中的非空紧FC-子空间,设 A,C 是 $Y\times Y$ 中的集合,f,g 满足条件

1) $\forall y\in Y$,$\{x\in Y:(g(x),f(y))\in A\}$ 是闭的;

2) $\forall x\in Y$,$\{y\in Y:(g(x),f(y))\notin A\}$ 或 $(\forall x\in Y$,$\{y\in Y:(g(x),f(y))\notin C\})$ 是 X 的FC-子空间,且 $\forall x\in Y$,$\{y\in Y:(g(x),f(y))\notin A\}\subset\{y\in Y:(g(x),f(y))\notin C\}$;

3) $\forall x\in Y$,$(g(x),f(x))\in C$

则存在 $\bar{x}\in Y$,使得 $\{g(\bar{x})\times f(Y)\}\subset A$。

证明 假设结论不成立,则对任意 $x\in Y$,存在 $y\in Y$,使得 $(g(x),f(y))\notin A$。现记

$$A(y)=\{x\in Y:(g(x),f(y))\notin A\},$$

则 $Y=\bigcup_{y\in Y}A(y)$,因 Y 紧,故存在 $\{y_0,y_1,\cdots,y_n\}\subset Y$,使得 $Y=\bigcup_{i=0}^{n}A(y_i)$,设 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 是与 $A(y_0)$,$A(y_1)$,$\cdots$,$A(y_n)$ 相对应的连续单位分解,定义映象

$$P:Y\to\Delta_n \text{ 为 } P(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i(x)e_i,x\in Y。$$

显然 P 连续,令

$$N=\{y_0,y_1,\cdots,y_n\}\in\langle Y\rangle,$$

由 Y 是FC-子空间,从而 $(Y,\{\varphi_N\})$ 是FC-空间,故存在连续映象 $\varphi_N:\Delta_n\to Y$,于是 $P\circ\varphi_N:\Delta_n\to\Delta_n$ 是连续映象,由Brouwer不动点定理,存在 $a\in\Delta_n$,使得 $a=P\circ\varphi_N(a)$,令 $\bar{z}=\varphi_N(a)$,则

$$\bar{z}=\varphi_N(a)=\varphi_N\circ P\circ\varphi_N(a)=\varphi_N\circ P(\bar{z}) \quad (1)$$

$$P(\bar{z})=\sum_{j\in J(\bar{z})}a_j(\bar{z})e_j\in\Delta_{J(\bar{z})} \quad (2)$$

其中

$$J(\bar{z})=\{j\in\{0,1,\cdots,n\}:a_j\neq 0\},$$

于是 $\forall j\in J(\bar{z})$ 有 $\bar{z}\in A(y_j)$,从而

$$y_j\in\{y\in Y:(g(\bar{z}),f(y))\notin A\},j\in J(\bar{z})$$

由条件2)及(1)、(2)式,有

$$\bar{z}=\varphi_N\circ P(\bar{z})\in\varphi_N(\Delta_{J(\bar{z})})\subset$$
$$\{y\in Y:(g(\bar{z}),f(y))\notin C\}$$

故 $(g(\bar{z}),f(\bar{z}))\notin C$,这与条件3)矛盾。 证毕

注2 定理4是文献[13]中定理5.6.1在FC-空间的推广。

定理5 设 E 是局部凸的Hausdorff拓扑线性空间,$(Z,\{\varphi_N\})$ 是FC-空间,$\varnothing\neq X\subset E$,$\varnothing\neq Y\subset Z$ 为FC-子空间,设 $A,C\subset X\times Y$,$g:X\to X$,$f:Y\to Y$ 均为连续映象,且满足条件

1) $\forall y\in Y$,$\{x\in X:(g(x),f(y))\in A\}$ 为闭集;

2) $\forall x\in X$,$\{y\in Y:(g(x),f(y))\notin A\}\subset\{y\in Y:(g(x),f(y))\notin C\}$;

3) $\forall x\in X$,$\{y\in Y:(g(x),f(y))\notin A\}$(或 $\{y\in Y:(g(x),f(y))\notin C\}$)是FC-子空间;

4) 存在 C 的子集 B,其为 $X\times Y$ 中的闭集,且存在 X 之一紧凸集 K,使得对任意 $y\in Y$,$\{x\in K:(g(x),y)\in B\}$ 是非空凸的

则存在 $\bar{x}\in K$,使得 $\{g(\bar{x})\}\times f(Y)\subset A$。

证明 假设结论不成立,即对任意 $x\in K$,存在 $y\in Y$,使得 $\{g(x)\}\times f(y)\notin A$,记

$$A(y)=\{x\in K:(g(x),f(y))\notin A\},$$

则其为开集,且 $x\in A(y)$,因而 $K\subset\bigcup_{y\in Y}A(y)$,由于 K 紧,故存在

$$\{y_0,y_1,\cdots,y_n\}\subset Y,$$

使得

$$K=\bigcup_{i=0}^{n}(A(y_i)\cap K),$$

设与之相应的连续单位分解为 $a_0,a_1,\cdots,a_n$,定义映象

$$P:K\to\Delta_n \text{ 为 } P(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i(x)e_i,x\in K。$$

显然 P 连续,令

$$N = \{y_0, y_1, \cdots, y_n\} \in \langle Y \rangle,$$

由 Y 是 FC-空间,故存在连续映象 $\varphi_N: \Delta_n \to Y$,从而 $\varphi_N \circ P: K \to Y$ 是连续的,再令

$$T: K \to 2^K, T(x) = \{u \in K: (g(u), f \circ \varphi_N \circ P(x)) \in B\}, x \in K,$$

则对任意 $x \in K$,$T(x)$ 是 K 中的非空闭凸集,因 $f \circ \varphi_N \circ P$ 与 g 均连续,故 graph(T) 闭,因而 T 是上半连续的,于是由文献[14]中的 Glicksberg 不动点定理,T 在 K 中存在不动点 $\bar{x}$,因此

$$(g(\bar{x}), f \circ \varphi_N \circ P(\bar{x})) \in B \subset C,$$

令

$$J(\bar{x}) = \{j \in \{0, 1, \cdots, n\}: a_j(\bar{x}) \neq 0\},$$

则

$$P(\bar{x}) = \sum_{j \in J(\bar{x})} a_j(\bar{x}) e_j \in \Delta_{J(\bar{x})},$$

且 $\forall j \in J(\bar{x})$,有

$$y_j \in \{y \in Y: (g(\bar{x}), f(y)) \notin A\},$$

从而

$$\varphi_N \circ P(\bar{x}) \in \varphi_N(\Delta_{J(\bar{x})}) \subset \{y \in Y: (g(\bar{x}), f(y)) \notin C\},$$

即 $(g(\bar{x}), f \circ \varphi_N \circ P(\bar{x})) \notin C$,矛盾。 证毕

注3 定理5是文献[13]中的定理5.6.4在FC-空间的推广。

2.3 对重合问题的应用

定理6 设 $(X, \{\varphi_N\})$ 是 FC-空间,D 是 X 中的非空紧 FC-子空间,Y 是一拓扑空间,$T: D \to Y$ 是连续映象,$S: D \to 2^Y$ 满足条件

1) S 是转移开的,且 $\forall y \in Y$,$S^{-1}(y)$ 是 X 的 FC-子空间;

2) $T(D) \subset S(D)$

则存在 $\bar{x} \in D$,使得 $T(\bar{x}) \in S(\bar{x})$,即 $\bar{x}$ 是 T 与 S 的重合点。

证明 因 $T(D) \subset S(D)$,故

$$T(D) \cap (\bigcap_{x \in D} (Y \backslash S(x))) = \varnothing,$$

令 $P(x) = Y \backslash S(x)$,由条件1),$P: D \to 2^Y$ 是转移闭映象,且对任意 $y \in Y$,$D \backslash P^{-1}(y)$ 是 FC-子空间,由定理3,P 不是关于 T 的 FC-KKM 映象,故存在 $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \in \langle D \rangle$,使得

$$T(\varphi_N(\Delta_n)) \not\subset \bigcup_{i=0}^{n} P(x_i) = Y \backslash \bigcap_{i=0}^{n} S(x_i),$$

从而存在 $\bar{x} \in \varphi_N(\Delta_n)$,使得 $T(\bar{x}) \in \bigcap_{i=0}^{n} S(x_i)$,故

$$x_i \in S^{-1}(T(\bar{x})), i = 0, 1, \cdots, n,$$

因 $S^{-1}(T(\bar{x}))$ 是 FC-子空间,得知 $\bar{x} \in S^{-1}(T(\bar{x}))$。 证毕

参考文献:

[1] BARDO C, CEPPITELLI L. Some Further Generalizations of Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz Theorem and Minimax Inequalities[J]. J Math Anal Appl, 1998, 132: 484-490.

[2] PARK S, KIM H. Coincidence Theorems for Admissible Multifunctions on Generalized Convex Spaces[J]. J Math Anal Appl, 1996, 1997: 173-187.

[3] PARK S, KIM H. Foundations of the KKM Theory on Generalized Convex Spaces[J]. J Math Anal Appl, 1997, 209: 551-571.

[4] VERMA R U. G-H-KKM Type Theorems and Their Applications to a New Class of Minimax Inequalities[J]. Computers Math Applic, 1999, 37(8): 45-48.

[5] VERMA R U. Generalized G-H-convexity and Minimax Theorems in G-H-Spaces[J]. Computers Math Applic, 1999, 38: 13-18.

[6] TIAN G Q. Generalizations of the FKKM-theorem and the Ky Fan Minimax Inequality with Applications to Maximal Elements, Price Equilibrium and Complementrity[J]. J Math Anal Appl, 1992, 170: 457-471.

[7] DING X P. Generalized L-KKM Type Theorems in L-convex Space with Applications[J]. Computers Math Applic, 2002, 43: 1249-1258.

[8] DING X P. Maximal Elements Theorems in Product FC-spaces and Generalized Games[J]. J Math Anal Appl, 2005, 305: 29-42.

[9] DING X P. New H-KKM Theorems and Their Applications to Geometric Property, Coincidence Theorems, Minimax Inequalities and Maximal Elements[J]. J Pure Appl Math, 1995, 26(1): 1-19.

[10] 邓方平,丁协平. 拓扑空间中的 KKM 选择与 KKM 定理[J]. 四川师范大学学报(自然科学版) 2005, 28(4): 402-404.

[11] LIN L J. Applications of a Fixed Point Theorem in G-Convex Space[J]. Nonlinear Analysis: Theory Methods applications, 2001, 46: 601-608.

[12] CHANG S S, LEE B S, WU X, et al. On the Generalized Quasivariational Inequality Problems[J]. J Math Anal Appl, 1996, 203: 686-693.

[13] 张石生. 变分不等式和相补问题理论及应用[M]. 上海:上海科学技术文献出版社, 1991.

[14] GLICKSBERG I. A Further Generalization of the Kakutani Fixed Theorem with Application to Nash Equilibrium Points[J]. Proc Amer Math Soc, 1952, (3): 170-174.

KKM Type Theorem and Section Theorem in FC-Spaces

WANG Bin

(Dept. of Mathematics, Neijiang Teachers College, Neijiang Sichuan 641112, China)

Abstract: In 1929, Knaster, Kuratowski and Mazurkiewicz established the celebrated KKM theorem and its generalizations are of fundamental importance in modern nonlinear analysis. Recently many authors have also extended KKM mapping and established corresponding KKM theorems、section theorems、fixed point theorems and coincidence theorems in several kinds of spaces. In this paper the concept of FC-KKM mapping is introduced in finitely continuous topological spaces without any convexity and linear structure. Meanwhile, a new nonempty intersection theorem is proved in finitely continuous topological spaces without any convexity and linear structure. By applying the nonempty intersection theorem ,we prove a new fixed point theorem with transfer closed valued mapping in finitely continuous topological spaces without any convexity and linear structure. And a new FC-KKM type theorems with transfer closed valued mapping and section theorems are proved in finitely continuous topological spaces without any convexity and linear structure by applying the fixed point theorem,Brouwer fixed point theorem and the continuous partition of unity theorem . In application,we utilize those results to study the coincidence point problem and prove a new coincidence theorem with transfer open valued mapping in finitely continuous topological spaces without any convexity and linear structure. These results extend and generalize some known results.

Key words: FC-space ; transfer open (closed) valued mapping ; FC-KKM mapping ; section theorem ;coincidence theorem

(责任编辑 黄 颖)