2008 年 4 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Apr. 2008
第 25 卷 第 2 期 Journal of Chongqing Normal University(Natural Science) Vol. 25 No. 2

关于 Fibonacci 三角形猜想 $k=11$ 的证明*

林丽娟

(重庆师范大学 数学与计算机科学学院,重庆 400047)

摘 要:Fibonacci 数列和 Lucas 数列的性质一直是数论中重要的研究内容之一,本文利用 Fibonacci 数列的性质研究了 Fibonacci 三角形猜想在 $k=11$ 时的情形,讨论了以 Fibonacci 数 F_n,F_{n+11},F_{n+11} 为边长并且面积为整数的三角形的存在性问题。首先假设猜想不成立,由边长和面积为整数,结合 Fibonacci 数列自身的性质得出边长之间所要满足的等量关系,然后对等式两边取模,利用 Jacobi 符号得出矛盾,从而证明了 Fibonacci 三角形猜想在 $k=11$ 时成立,即不存在以 Fibonacci 数 F_n,F_{n+11},F_{n+11} 为边长并且面积为整数的三角形。

关键词:Fibonacci 数;Lucas 数;Fibonacci 三角形;平方剩余;Jacobi 符号

中图分类号:O156 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-6693(2008)02-0037-03

由 $F_0=0$,$F_1=1$,$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n(n\geqslant 0)$ 和 $L_0=2$,$L_1=1$,$L_{n+2}=L_{n+1}+L_n(n\geqslant 0)$ 所定义的递归数列分别称为 Fibonacci 数列和 Lucas 数列。Fibonacci 数列和 Lucas 数列的性质一直是数论中重要的研究内容之一。1990 年,H. Harborth 和 A. Kemnitz[1] 在研究有理数距离的构形时提出 Fibonacci 三角形猜想,国内首先由陈计在文献[2]中提及:

定义 边长为整数且面积也为整数的三角形称为 Heron 三角形,边长为 Fibonacci 数的 Heron 三角形称为 Fibonacci 三角形。

猜想 当 $1\leqslant k<n$ 时,不存在边长为 F_{n-k},F_n,F_n 的 Heron 三角形。

H. Harborth 和 A. Kemnitz 证明了 $k=1$ 或 $n\leqslant 25$ 时猜想成立。曹珍富[3] 发现了有研究该问题在 $k=2,3,4$ 时的一般方法。1995 年,文献[4]借助对 ax^2 型 Fibonacci 数的有关结论,确定了 $1<k\leqslant 5$ 时猜想均成立并且将成立的下界计算到 $n>10000$。杨仕椿[5] 以及何波[6] 运用与文献[3]完全不同的方法,证明了 $k=5$ 时猜想成立。何波运用递推序列方法证明了 $k=6$ 时猜想成立,笔者[7] 运用递推序列方法证明了 $k=7$ 时猜想成立。本文运用递推序列方法,给出 $k=11$ 时猜想成立的一个初等证明,即

定理 不存在边长为 F_n,F_{n+11},F_{n+11} 的 Heron 三角形。

1 相关引理

需要引入 Fibonacci 数[8] 的负指标[9],即对于 $n\geqslant 0$,有 $F_{-n}=(-1)^{n-1}F_n$,此时原有递推关系仍然成立,文中 $\left(\frac{n}{m}\right)$ 表示 Jacobi 符号,$p^m \parallel n$ 表示 $p^m \mid n$ 且 $p^{m+1}\nmid n$。

引理 1[10] 1)$2\mid F_n \Leftrightarrow 3\mid n$;2)$2^m\mid F_n \Leftrightarrow 3\cdot 2^{m-2}\mid n$,$(m\geqslant 3)$。

引理 2 如果以 F_n,F_{n+11},F_{n+11} 为边长的三角形是 Fibonacci 三角形,则 $\left(\frac{F_n}{2},F_{n+11}\right)=(F_n,F_{n+11})=F_{n,n+11}=F_{(n,11)}$。

证明 设此三角形的面积为 S,$d=(F_n,F_{n+11})$,则

$$16S^2=4F_n^2F_{n+11}^2-F_n^4=d^2F_n^2\left(4\frac{F_{n+11}^2}{d^2}-\frac{F_n^2}{d^2}\right) \qquad (1)$$

由(1)式知,$4\frac{F_{n+11}^2}{d^2}-\frac{F_n^2}{d^2}$ 为一个平方数,于是 $4\frac{F_{n+11}^2}{d^2}-\frac{F_n^2}{d^2}\equiv 0$ 或 $1 \pmod 4$,又 $4\frac{F_{n+11}^2}{d^2}\equiv 0$ 或 $1 \pmod 4$,则 $\frac{F_n^2}{d^2}\equiv 0$ 或 $3 \pmod 4$,而 $\frac{F_n^2}{d^2}$ 也是一个平方数,故 $\frac{F_n^2}{d^2}\equiv 0$

* 收稿日期:2007-10-23
资助项目:重庆市教委科研基金项目(No. KJ050807)
作者简介:林丽娟(1981-),女,硕士研究生,研究方向为基础数学。

$(\bmod 4)$,于是$\frac{F_n}{d}\equiv 0(\bmod 2)$,则 $d\mid\frac{F_n}{2}$,于是 $d=(F_n,F_{n+1})\mid(F_{n+11},\frac{1}{2}F_n)$,而显然有$(F_{n+11},\frac{1}{2}F_n)\mid(F_{n+1},F_n)$,故$(\frac{F_n}{2},F_{n+11})=(F_n,F_{n+11})$。又$(F_n,F_{n+11})=F_{(n,n+11)}=F_{(n,11)}$,故

$$(\frac{F_n}{2},F_{n+11})=(F_n,F_{n+11})=F_{n,n+11}=F_{(n,11)}。$$

证毕

引理3 如果以 F_n,F_{n+11},F_{n+11}为边长的三角形是 Fibonacci 三角形,则$6\mid n$。

证明 设此三角形的底边上的高为 h,则 $h^2=F_{n+11}^2-\frac{1}{4}F_n^2$,设$d=(F_n,F_{n+11})$,于是$(\frac{F_n}{2d})^2+(\frac{h}{d})^2=(\frac{F_{n+11}}{d})^2$,$(\frac{F_n}{2d},\frac{h}{d},\frac{F_{n+11}}{2d})$为本原商高数,于是$\frac{F_{n+11}}{d}\equiv 1(\bmod 4)$,又由$(\frac{h}{d})^2=(\frac{F_{n+11}}{d}+\frac{F_n}{2d})(\frac{F_{n+11}}{d}-\frac{F_n}{2d})$知,$\frac{F_{n+11}}{d}+\frac{F_n}{2d}$和$\frac{F_{n+11}}{2d}-\frac{F_n}{2d}$均为平方数,故$\frac{F_n}{2d}$只能是$\frac{F_n}{2d}\equiv 0(\bmod 4)$,故$8\mid F_n$,由引理1知$6\mid n$。 证毕

引理4 若 $m=2^t,t>0$,则$\left(\frac{-1}{L_m}\right)=-1$。

证明 $t=1$ 时,$L_2=3$;$t>1$ 时,有 $L_{2^t}=L_{2^{t-1}}^2-2\equiv 3(\bmod 4)$,均有$\left(\frac{-1}{L_m}\right)=-1$。 证毕

引理5[9] 设 $k\equiv\pm 2(\bmod 6)$,有 $F_{n+2kt}\equiv(-1)^tF_n(\bmod L_k)$,$t>0$。

引理6[9] $2F_{m+n}=F_mL_n+F_nL_m$。

2 定理的证明

证明 假设存在以 F_n,F_{n+11},F_{n+11}为边长的 Fibonacci 三角形,底边上的高为 h,则 h 是整数,且 $h^2=F_{n+11}^2-\frac{1}{4}F_n^2=(F_{n+11}+\frac{1}{2}F_n)(F_{n+11}-\frac{1}{2}F_n)$,设$d=(F_n,F_{n+11})$,由引理2,$d=(\frac{F_n}{2},F_{n+11})=(F_n,F_{n+11})=F_{(n,n+11)}=F_{(n,11)}$,于是 $d=1$ 或 89。可设

$$F_{n+11}+\frac{1}{2}F_n=dx^2,F_{n+11}-\frac{1}{2}F_n=dy^2 \quad (2)$$

其中$(x,y)=1$,$d=1$ 或 $d=89$。

由引理3知$6\mid n$,设 $n=6k$,下面分情况讨论:

ⅰ)当 $d=1$ 时,由(2)式得

$$x^2=F_{n+11}+\frac{1}{2}F_n \quad (3)$$

对(3)式取模31,周期30,当 $n\equiv 0,12,18(\bmod 30)$时,$x^2\equiv F_{n+11}+\frac{1}{2}F_n\equiv 27,23,22,27,23,22$ 均为31的平方非剩余,排除 对(3)式取模11,周期10,当 $n\equiv 6(\bmod 30)$,$x^2\equiv F_{n+11}+\frac{1}{2}F_n\equiv 6(\bmod 11)$,6为11的平方非剩余,排除,剩下 $n\equiv 24(\bmod 30)$等价于 $n\equiv 24,54,84,114(\bmod 120)$ 对(3)式取模41,周期40,当 $n\equiv 24,84(\bmod 120)$时,$x^2\equiv F_{n+11}+\frac{1}{2}F_n\equiv 24,17(\bmod 41)$,24,17为41的平方非剩余,排除,剩下 $n\equiv 54,114(\bmod 120)$;对(3)式取模2161,周期80,当 $n\equiv 54,174,(\bmod 240)$时,$x^2\equiv F_{n+11}+\frac{1}{2}F_n\equiv 1502,659(\bmod 2161)$,1502,659为2161的平方非剩余,排除,剩下 $n\equiv 114,234(\bmod 240)$ 即 $n\equiv -6(\bmod 120)$。又 $n>0$,令 $n=-6+2*2^t*15q\neq -6$,其中 $t>1$,$2\nmid q$,于是将(3)式变为

$$2x^2=2F_{n+11}+F_n \quad (4)$$

对(4)式取模 L_{2^t} 由引理5知 $2x^2=2F_{n+11}+F_n\equiv(-1)^{15q}(2F_5+F_{-6})\equiv -2(\bmod L_{2^t})$ 于是$\left(\frac{2x^2}{L_{2^t}}\right)=\left(\frac{-2}{L_{2^t}}\right)$,又易知 $L_{2^t}\neq 0(\bmod 2)$,则$\left(\frac{1}{L_{2^t}}\right)=\left(\frac{-1}{L_{2^t}}\right)$,由引理4知$\left(\frac{-1}{L_{2^t}}\right)=-1$,所以有$1=\left(\frac{1}{L_{2^t}}\right)=\left(\frac{-1}{L_{2^t}}\right)=-1$,矛盾。

ⅱ)当 $d=89$ 时,由(2)式得

$$x^2=\frac{1}{89}F_{n+11}+\frac{1}{178}F_n \quad (5)$$

对(5)式取模31,周期30,当 $n\equiv 6,24(\bmod 30)$时,$x^2\equiv\frac{1}{89}F_{n+11}+\frac{1}{178}F_n\equiv 26,23,26,23$ 均为31的平方非剩余,排除 对(5)式取模11,周期10,当 $n\equiv 12,18(\bmod 30)$时,$x^2\equiv\frac{1}{89}F_{n+11}+\frac{1}{178}F_n\equiv 8,6(\bmod 11)$,8,6为11的平方非剩余,排除,剩下 $n\equiv 0(\bmod 30)$等价于 $n\equiv 0,30,60,90,120,150,180,210(\bmod 240)$ 对(5)式取模2161,周期80,当 $n\equiv 30,60,90,150,180,210(\bmod 240)$时,$x^2\equiv\frac{1}{89}F_{n+11}+\frac{1}{178}F_n\equiv 61,1140,184,2100,1021,1977(\bmod 2161)$,61,1140,184,2100,1021,1977为2161的平方非剩余,排除,剩下 $n\equiv 0,120(\bmod 240)$等价于 $n\equiv 0(\bmod 120)$,

令 $n=2*2^t*15q$ 其中 $t>2$，$2\nmid q$，于是将(5)式变为

$$178x^2=2F_{n+11}+F_n \tag{6}$$

对(6)式取模 L_{2^t} 由引理 5 知 $178x^2=2F_{n+11}+F_n\equiv(-1)^{15q}(2F_{11}+F_0)\equiv-178\pmod{L_{2^t}}$，于是 $\left(\frac{178x^2}{L_{2^t}}\right)=\left(\frac{-178}{L_{2^t}}\right)$，又易知 $L_{2^t}\neq 0\pmod{178}$，则 $\left(\frac{1}{L_{2^t}}\right)=\left(\frac{-1}{L_{2^t}}\right)$，由引理 4 知 $\left(\frac{-1}{L_{2^t}}\right)=-1$，所以有 $1=\left(\frac{1}{L_{2^t}}\right)=\left(\frac{-1}{L_{2^t}}\right)=-1$，矛盾。

故不存在以 F_n,F_{n+11},F_{n+11} 为边长的 Fibonacci 三角形。 证毕

参考文献：

[1] HARBORTH H，KEMNITZ A. Fibonacci Triangles，Applications of Fibonacci Numbers [J]. Kluwer Acad Publ Dordercht，1988，3：129-132.

[2] 陈计. 斐波那契三角形[J]. 数学通讯，1994(5)：41.

[3] 曹珍富. 数论中的问题与结果[M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，1996.

[4] HARBORTH H，KEMNITZ A，ROBBINS N. Non-Existence of Fibonacci Triangles[J]. Congr Numer，1995，14.

[5] 杨仕椿. 关于 Fibonacci 三角形和 Lucas 三角形的一些结论[J]. 广西民族学院学报(自然科学版)，2002，8(4)：1-3.

[6] 何波. Fibonacci 三角形的充要条件及应用[J]. 西南民族大学学报(自然科学版)，2004，30(3)：277-281.

[7] 林丽娟. 关于 Fibonacci 三角形猜想 $k=7$ 的证明[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版)，2007，24(5)：472-474.

[8] 朱伟义. 有关切比雪夫多项式的几个组合恒等式[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2005，22(1)：18-20.

[9] 柯召，孙琦. 谈谈不定方程[M]. 上海：上海教育出版社，1980.

[10] 肖果能，乐茂华. 关于 Fibonacci 数列的几个问题[J]. 长沙铁道学院学报，1991，9(1)：101-105.

A Proof of Fibonacci Triangles Conjecture with $k=11$

LIN Li-juan

(College of Mathematics and Computer Science，Chongqing Normal University，Chongqing 400047，China)

Abstract：The Fibonacci sequence and the Lucas sequence has been one of the important research contents in number theory. In this paper，we consider Fibonacci triangles conjecture with $k=11$ by the property of the Fibonacci sequence. A Fibonacci triangle is a triangle with integer area and sides whose lengths are Fibonacci numbers. As a first step，we suppose the conjecture is wrong，and then there exists triangle with integer area and sides whose lengths are Fibonacci numbers. We use the Jacobi symbol as a tool for proving that a number is not a perfect square. Finally we prove the nonexistence in Fibonacci triangles for $k=11$ that there are no Fibonacci triangles with sides lengths F_n，F_{n+11}，F_{n+11}.

Key words：Fibonacci numbers；Lucas numbers；Fibonacci triangle；quadrate residue；Jacobi symbol

(责任编辑 游中胜)