2008 年 10 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Oct. 2008
第 25 卷 第 4 期 Journal of Chongqing Normal University(Natural Science) Vol. 25 No. 4

运筹学与控制论

预不变拟凸函数的一个充分条件*

赵克全, 陈 哲, 郭 辉
(重庆师范大学 数学与计算机科学学院, 重庆 400047)

摘 要:对于可微的函数,其二阶导数可以刻画函数的凸性。受这种思想的启发,邢志栋等人根据微分方程的极值原理给出了拟凸函数的一个充分条件,本文利用文献[1]中建立的定理1,给出了二次可微的预不变拟凸函数的一个充分条件。X 关于 $\eta(x,y)$ 为不变凸集,二次连续可微函数 $f(x)$ 满足条件 D,$\eta(x,y)$ 满足条件 C 且 $\eta(x,y)$ 下有界,若 $\forall x \in X$,$\nabla^2 f(x) + g(x)\nabla f(x)^{\mathrm{T}}$ 是半正定的(其中 $g(x):X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 是下有界函数),则 $f(x)$ 关于 $\eta(x,y)$ 是预不变拟凸函数。本文的结论是对文献[2]中相应结论的推广。

关键词:拟凸函数;不变凸集;二次可微函数;预不变拟凸函数
中图分类号:O221.2 文献标识码:A 文章编号:1672-6693(2008)04-0001-02

凸函数在数学规划与最优化理论中具有十分重要的作用。但凸函数的局限性也是十分明显的,因此研究凸函数的各种推广形式及各种广义凸性的性质特征,尤其是各种广义凸性的判别准则,对于进一步深入研究数学规划及最优化问题是一件十分重要而有意义的事情。

从 20 世纪 60 年代开始,Schaible、Mangasarian 以及 Avriel 等人对拟凸函数等广义凸性函数做了大量的研究工作,尤其是在拟凸函数的性质特点及在数学规划理论中的应用等方面取得了丰富的研究成果[2-5];Weir 和 Mond 以及 Weir 和 Jeyakumar 在文献[6]和文献[7]中引入了不变凸集和预不变凸函数的概念,建立了预不变凸函数条件下的择一定理并利用所建立的择一性定理讨论了多目标优化问题,该研究工作是对非可微凸函数及非可微凸函数条件下相应结论的重要推广。在此基础上,大量的研究工作进一步展开[6-13]。

已经知道,对于一个二次可微的函数,其二阶导数可以表征函数的凸性。受这种思想的启发,在已有文献的基础,尤其是在文献[2]基础上,本文进一步讨论预不变拟凸函数的性质特征,利用文献[2]中所建立的结果给出了二次可微的预不变拟凸函数的一个充分条件,对文献[2]中的结论进行了推广。

1 预备知识

定义 1[3-4] X 为凸集,$f(x)$ 是 X 上的拟凸函数,若 $\forall x,y \in X, \forall \lambda \in [0,1]$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \max\{f(x),f(y)\}$$

定义 2[6-7] 称 X 关于 $\eta(x,y)$ 为不变凸集,若存在向量值函数 $\eta(x,y)$,使得

$$\forall x,y \in X, \lambda \in [0,1], y + \lambda\eta(x,y) \in X$$

定义 3[9] X 关于 $\eta(x,y)$ 为不变凸集,称 f 关于 $\eta(x,y)$ 为预不变拟凸函数,若

$$\forall x,y \in X, \lambda \in [0,1]$$

$$f(y + \lambda\eta(x,y)) \leqslant \max\{f(x),f(y)\}$$

条件 C[10] $\eta:\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$,称向量值函数 $\eta(x,y)$ 满足条件 C,若 $\forall x,y \in X, \lambda \in [0,1]$

$$\eta(y, y + \lambda\eta(x,y)) = -\lambda\eta(x,y)$$

$$\eta(x, y + \lambda\eta(x,y)) = (1-\lambda)\eta(x,y)$$

条件 D[11] X 关于 $\eta(x,y)$ 为不变凸集,称 f 满足条件 D,若 $f(y + \eta(x,y)) \leqslant f(x), \forall x,y \in X$。

引理 1[2] 设二次连续可微函数 $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ 满足 $f''(x) + g(x)f'(x) \geqslant 0$(其中 g 是 $[a,b]$ 上的下有界函数),则 f 是拟凸函数。

引理 2[1] 若 X 关于向量值函数 η 为不变凸集,$f(x)$ 满足条件 D,η 满足条件 C。则 $f(x)$ 关于相同的 η 为预不变拟凸函数等价于

$$\forall x,y \in X, \phi(\alpha) = f(y + \alpha\eta(x,y))$$

在 $[0,1]$ 上是拟凸函数。

2 主要结论及其证明

利用引理 1 及引理 2,下面给出二次连续可微的

* 收稿日期:2007-11-16 修回日期:2008-01-14
资助项目:国家自然科学基金(No. 10471159)
作者简介:赵克全(1979-),男,讲师,硕士,研究方向为广义凸性及其在最优化理论中的应用。

预不变拟凸函数的一个充分条件。

定理1 X 关于 $\eta(x,y)$ 为不变凸集,二次连续可微函数 $f(x)$ 满足条件 D,$\eta(x,y)$ 满足条件 C 且 $\eta(x,y)$ 下有界,若

$$\forall x \in X, \nabla^2 f(x) + g(x) \nabla f(x)^{\mathrm{T}}$$

是半正定的(其中 $g(x): X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 是下有界函数),则 $f(x)$ 关于 $\eta(x,y)$ 是预不变拟凸函数。

证明 令 $\phi(\alpha) = f(y + \alpha\eta(x,y))$

由条件可知

$$\phi'(\alpha) = \eta(x,y)^{\mathrm{T}} \nabla f(y + \alpha\eta(x,y))$$

$$\phi''(\alpha) = \eta(x,y)^{\mathrm{T}} \nabla^2 f(y + \alpha\eta(x,y))\eta(x,y)$$

又设 $\bar{g}(\alpha) = \eta(x,y)^{\mathrm{T}} g(y + \alpha\eta(x,y))$,显然 $\bar{g}$ 是下有界函数。

故

$$\phi''(\alpha) + \bar{g}\phi'(\alpha) =$$
$$\eta(x,y)^{\mathrm{T}} \nabla^2 f(y + \alpha\eta(x,y))\eta(x,y) +$$
$$\bar{g}(\alpha)\eta(x,y)^{\mathrm{T}} \nabla f(y + \alpha\eta(x,y)) =$$
$$\eta(x,y)^{\mathrm{T}} \nabla^2 f(y + \alpha\eta(x,y))\eta(x,y) +$$
$$\eta(x,y)^{\mathrm{T}} g(y + \alpha\eta(x,y)) \nabla^{\mathrm{T}} f(y + \alpha\eta(x,y)) \cdot \eta(x,y) =$$
$$\eta(x,y)^{\mathrm{T}}[\nabla^2 f(y + \alpha\eta(x,y)) +$$
$$g(y + \alpha\eta(x,y)) \nabla^{\mathrm{T}} f(y + \alpha\eta(x,y))] \cdot \eta(x,y) \geqslant 0$$

由引理1可知 $\phi(\alpha)$ 是拟凸函数,再利用引理2可知,$f(x)$ 关于 $\eta(x,y)$ 是预不变拟凸函数。 证毕

参考文献:

[1] 赵克全. r-预不变凸函数的一个充分条件[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2006,23(1):10-13.

[2] 邢志栋,王双虎. 拟凸函数的一个充分条件[J]. 纯粹数学与应用数学,1990,6(2):76-79.

[3] BAZARAA M S, SHETTY C M. Nonlinear Programming Theory and Algorithms[M]. New York: John Wiley and Sons, 1979.

[4] AVRIEL M, DIEWERT E, SCHAIBLE S, et al. Generalized Concavity[M]. New York: Plenum Press, 1988.

[5] GREENBERG H J, PIERSKALLA W P. A Review of Quasiconvex Functions [J]. Operations Research, 1971, 19: 1553-1570.

[6] WEIR T, MOND B. Preinvex Functions in Multiple-objective Optimzation[J]. JMAA, 1988, 136: 29-38.

[7] WEIR T, JEYAKUMAR V. A Class of Nonconvex Functions and Mathematical Programming[J]. Bulletin of Australian Mathematical Society, 1988, 38: 177-189.

[8] HANSON M A. On Sufficiency of the Kuhn-Tucker Conditions[J]. JMAA, 1981, 80: 545-550.

[9] PINI R. Invexity and Generalized Convexity[J]. Optimization, 1991, 22: 513-525.

[10] MOHAN S R, NEOGY S K. On Invex Stes and Preivex Functions[J]. JMAA, 1995, 189: 901-908.

[11] YANG X M, DUAN L. On Properties of Preinvex Function [J]. JMAA, 2001, 256: 229-241.

[12] YANG X M, YANG X Q, TEO K L. Characterizations and Applications of Prequasiinvex Type Functions[J]. JOTA, 2001(110): 645-668.

[13] 赵克全,陈哲. 半严格预不变拟凸函数的一个充分条件[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2006,23(3):13-15.

A Sufficient Condition of Prequasi-invex Function

ZHAO Ke-quan, CHEN Zhe, GUO Hui

(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: Generalized convexity has playing an important role in mathematical programming and optimization theory. In recent years many authors have been doing further research into generalized convexity and the applications in optimization theory and making a series of important conclusions. It is known that the second derivative can characterize the convexity of functions. Because of the enlightenment of this thoughts, Zhidong Xing and his fellowship gave a sufficient condition of twice differentiable quasiconvex functions by making use of the extremum principle about differential equation in reference [1]. In this paper a sufficient condition of twice differentiable prequasi-invex functions is constructed by making use of theorem 1 in reference [1]. The main results as follows: Suppose the set X is invex with respect to $\eta(x,y)$, twice continuously differentiable function $f(x)$ satisfies the condition D, $\eta(x,y)$ satisfies condition C and is bounded below, for any x in X, $\nabla^2 f(x) + g(x) \nabla f(x)^{\mathrm{T}}$ is positive semi-definite $g(x)$ is bounded below. Then $f(x)$ is prequasi-invex functions. The conclusion improves and generalizes the corresponding result in reference[2].

Key words: quasiconvex functions; invex sets; twice differentiable function; prequasiinvex functions

(责任编辑 黄 颖)