关于不定方程 $x^2-7y^4=93$ *

郑紫霞

(重庆师范大学 数学与计算机科学学院,重庆 400047)

摘 要:不定方程 $x^2-Dy^4=C$(其中 D,C 为给定的整数,且 $D>0$ 为非平方数)曾引起许多人的兴趣,Cohn,Tzanakis,黎进香等都对此类方程进行过研究。本文讨论了不定方程 $x^2-7y^4=93$ 正整数解的情况。所用方法是先用 Pell 方程将 $x^2-7y^4=93$ 的可能整数解进行分类,使其包含在几个式子里面,然后对这几个式子取模,借助于平方剩余的理论缩小解的范围,同时还利用了一些初等的证明方法,如递推序列,同余式。最后证明了不定方程 $x^2-7y^4=93$ 仅有正整数解 $(x,y)=(10,1),(130,7)$。

关键词:不定方程;正整数解;递推序列;平方剩余

中图分类号:O156.1 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-6693(2008)04-0027-03

关于不定方程 $x^2-Dy^4=C$(其中 D,C 为给定的整数,且 $D>0$ 为非平方数)曾引起许多人的兴趣[1-7]。设 $N(D,C)$ 为方程 $x^2-Dy^4=C$ 的正整数解的组数,Cohn[1] 证明了以下几个结果:$N(5,44)=1$,$(x,y)=(7,1)$;$N(5,11)=2$,$(x,y)=(4,1)$ 和 $(56,5)$;$N(5,-44)=3$,$(x,y)=(6,2),(19,3)$ 和 $(181,9)$。Tzanzkis[2] 证明了在 $y\equiv 0 \pmod 8$ 时,$N(2,17)=0$,$N(2,41)=0$,$N(8,17)=0$,$N(2,97)=0$。黎进香[3] 证明了 $N(3,46)=2$,$(x,y)=(7,1),(17,3)$。本文利用递推序列,同余式和平方剩余的方法证明了不定方程 $x^2-7y^4=93$ 仅有正整数解 $(x,y)=(10,1),(130,7)$。

定理 不定方程

$$x^2-7y^4=93 \tag{1}$$

仅有正整数解 $(x,y)=(10,1),(130,7)$。

证明 首先考虑 Pell 方程

$$X^2-7Y^2=93$$

其一般解可由下面 4 个非结合类给出

$$X+Y\sqrt{7}=\pm(10+\sqrt{7})(u_n+v_n\sqrt{7})=\pm(10+\sqrt{7})(8+3\sqrt{7})^n,n\in\mathbf{Z}$$

$$\text{或 } X+Y\sqrt{7}=\pm(-10+\sqrt{7})(u_n+v_n\sqrt{7})=\pm(-10+\sqrt{7})(8+3\sqrt{7})^n,n\in\mathbf{Z}$$

$$\text{或 } X+Y\sqrt{7}=\pm(11+2\sqrt{7})(u_n+v_n\sqrt{7})=\pm(11+2\sqrt{7})(8+3\sqrt{7})^n,n\in\mathbf{Z}$$

$$\text{或 } X+Y\sqrt{7}=\pm(-11+2\sqrt{7})(u_n+v_n\sqrt{7})=\pm(-11+2\sqrt{7})(8+3\sqrt{7})^n,n\in\mathbf{Z}$$

其中 $\pm(u_n+v_n\sqrt{7})=\pm(8+3\sqrt{7})^n$ 给出 Pell 方程 $U^2-7V^2=1$ 的全部整数解,$8+3\sqrt{7}$ 是其基本解。如果(1)式有解,必有 n 使得 $y^2=\pm(u_n+10v_n)$ 或 $y^2=\pm(u_n-10v_n)=\pm(u_{-n}+10v_{-n})$ 或 $y^2=\pm(2u_n+11v_n)$ 或 $y^2=\pm(2u_n-11v_n)=\pm(2u_{-n}+11v_{-n})$。当 $n\geqslant 0$ 时,$u_n+10v_n>0$,$2u_n+11v_n>0$;当 $n<0$ 时,$u_n+10v_n<0$,$2u_n+11v_n<0$。因此可归结为

$$y^2=u_n+10v_n,n\geqslant 0 \tag{2}$$

$$y^2=-u_n+10v_n,n>0 \tag{3}$$

$$y^2=2u_n+11v_n,n\geqslant 0 \tag{4}$$

$$y^2=-2u_n+11v_n,n>0 \tag{5}$$

容易验证下列关系

---

* 收稿日期:2008-04-03

资助项目:重庆市教委科研基金项目(No. KJ 050807)

作者简介:郑紫霞(1984-),女,硕士研究生,研究方向为数论。

$$u_{n+2}=16u_{n+1}-u_n,u_0=1,u_1=8;v_{n+2}=16v_{n+1}-v_n,v_0=0,v_1=3$$

$$u_{2n}=u_n^2+7v_n^2=2u_n^2-1=14v_n^2+1;v_{2n}=2u_nv_n \tag{6}$$

$$u_{n+2km}\equiv(-1)^k u_n(\bmod u_m);v_{n+2km}\equiv(-1)^k v_n(\bmod u_m) \tag{7}$$

ⅰ)对(2)式取模。mod 3,得剩余序列周期 $T=2$,排除 $n\equiv1(\bmod 2)$,因为 $u_n+10v_n\equiv2(\bmod 3)$ 为模 3 的平方非剩余。剩 $n\equiv0(\bmod 2)$,即 $n\equiv0,2,4(\bmod 6)$。上面的 mod 3 是对(2)式取的,$T=2$,mod 2 皆指出 u_n+10v_n 所得剩余序列周期为 2,“因为”这句话是“排除”的理由。为节省篇幅,以下将按这种方式叙述。

mod 5,$T=6$,排除 $n\equiv2,4(\bmod 6)$,因为 $u_n+10v_n\equiv2(\bmod 5)$,剩 $n\equiv0(\bmod 6)$,即 $n\equiv0,6(\bmod 12)$。mod 11,$T=12$,排除 $n\equiv6(\bmod 12)$,因为 $u_n+10v_n\equiv10(\bmod 11)$,剩 $n\equiv0(\bmod 12)$,即 $n\equiv0,12(\bmod 24)$。mod 127,$T=8$,排除 $n\equiv4(\bmod 8)$,因为 $u_n+10v_n\equiv126(\bmod 127)$。故排除 $n\equiv12(\bmod 24)$。剩 $n\equiv0(\bmod 24)$。

若 $n\neq0$,令 $n=2(4k\pm1)\times3\times m,m=2^t,t\geqslant2$。

由(7)式可得

$$y^2=u_n+10v_n=u_{24km\pm6m}+10v_{24km\pm6m}\equiv u_{\pm6m}+10_{v\pm6m}\equiv u_{6m}\pm10v_{6m}\equiv u_{-2m}\pm10v_{-2m}\equiv$$
$$u_{2m}\mp10v_{2m}\equiv\pm10v_{2m}(\bmod u_{2m}) \tag{8}$$

易知 $u_{2m}\equiv1(\bmod 8),u_{2m}\equiv2(\bmod 5)$,所以 $\left(\frac{10}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{2}{u_{2m}}\right)\left(\frac{5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{2}{5}\right)-1$。又因 $v_m\equiv0(\bmod 2)$,可设 $2^s\parallel v_m$,则由(6)式得

$$\left(\frac{v_{2m}}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{2u_mv_m}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{u_m}{u_{2m}}\right)\left(\frac{v_m}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{2u_m^2-1}{u_m}\right)\left(\frac{14v_m^2+1}{v_m/2^s}\right)=\left(\frac{-1}{u_m}\right)\left(\frac{1}{v_m/2^s}\right)=1$$

所以

$$1=\left(\frac{y^2}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{\pm10v_{2m}}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{\pm10}{u_{2m}}\right)\left(\frac{v_{2m}}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{\pm10}{u_{2m}}\right)=-1,\text{矛盾。}$$

所以(8)式不成立,即(2)式无解。

当 $n=0$ 时,方程(1)有正整数解 $(x,y)=(10,1)$。

ⅱ)对(3)式取模。mod 3,$T=2$,排除 $n\equiv0(\bmod 2)$,因为 $-u_n+10v_n\equiv2(\bmod 3)$,剩 $n\equiv1(\bmod 2)$,即 $n\equiv1,3,5(\bmod 6)$。mod 5,$T=6$,排除 $n\equiv1,5(\bmod 6)$,因为 $-u_n+10v_n\equiv2(\bmod 5)$,剩 $n\equiv3(\bmod 6)$,即 $n\equiv3,9(\bmod 12)$。mod 11,$T=12$,排除 $n\equiv9(\bmod 12)$,因为 $-u_n+10v_n\equiv6(\bmod 11)$,剩 $n\equiv3(\bmod 12)$。mod 23,$T=12$,排除 $n\equiv3(\bmod 12)$,因为 $-u_n+10v_n\equiv14(\bmod 23)$。

此时(3)式无解,即方程(1)无解。

ⅲ)对(4)式取模。mod 3,$T=2$,排除 $n\equiv0(\bmod 2)$,因为 $2u_n+11v_n\equiv2(\bmod 3)$,剩 $n=1(\bmod 2)$。mod 271,$T=5$,排除 $n\equiv2,4(\bmod 5)$,因为 $2u_n+11v_n\equiv240,254(\bmod 271)$,剩 $n\equiv0,1,3(\bmod 5)$。结合 $n\equiv1(\bmod 2)$ 得 $n\equiv1,3,5(\bmod 10)$。mod 239,$T=10$,排除 $n\equiv3,5(\bmod 10)$,因为 $2u_n+11v_n\equiv35,237(\bmod 239)$,剩 $n\equiv1(\bmod 10)$,即 $n\equiv1,11,21,31,41(\bmod 50)$。mod 56599,$T=50$,排除 $n\equiv21,31,41(\bmod 50)$,因为 $2u_n+11v_n\equiv12999,36086,27987(\bmod 56599)$,剩 $n\equiv1,11(\bmod 50)$,即 $n\equiv1,11,51,61(\bmod 100)$。mod 701,$T=100$,排除 $n\equiv11,61(\bmod 100)$,因为 $2u_n+11v_n\equiv516,185(\bmod 701)$,剩 $n\equiv1,51(\bmod 100)$。mod 179,$T=20$,排除 $n\equiv11(\bmod 20)$,因为 $2u_n+11v_n\equiv130(\bmod 179)$。故排除 $n\equiv51(\bmod 100)$。剩 $n\equiv1(\bmod 100)$,即 $n\equiv1,101(\bmod 200)$。mod 79,$T=40$,排除 $n\equiv21(\bmod 40)$,因为 $2u_n+11v_n\equiv30(\bmod 79)$。故排除 $n\equiv101(\bmod 200)$。剩 $n\equiv1(\bmod 200)$。

因为 $n\equiv1(\bmod 2)$,所以 $n\equiv1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21(\bmod 22)$。mod 419,$T=22$,排除 $n\equiv3,5,7,9,13,15,17,19(\bmod 22)$,因为 $2u_n+11v_n\equiv312,8,44,274,56,399,311,242(\bmod 419)$,剩 $n\equiv1,11,21(\bmod 22)$。mod 2309,$T=22$,排除 $n\equiv11,21,(\bmod 22)$,因为 $2u_n+11v_n\equiv2307,2292(\bmod 2309)$,剩 $n\equiv1(\bmod 22)$。

由 $n\equiv1(\bmod 200)$ 和 $n\equiv1(\bmod 22)$ 得 $n\equiv1(\bmod 2200)$。

若 $n \neq 1$,令 $n = 1 + 2(4k \pm 1) \times 11 \times 25 \times 2^t$,$m = \begin{cases} 2^t, t \equiv 0,1 \pmod 3 \\ 11 \times 25 \times 2^t, t \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$,其中 $t \geqslant 2$,则有 $2m \equiv 2,4,16,32 \pmod{42}$。

由(7)式得

$$y^2 = 2u_n + 11v_n = 2u_{1+8km\pm 2m} + 11v_{1+8km\pm 2m} \equiv 2u_{1\pm 2m} + 11v_{1\pm 2m} \equiv (11u_1 + 14v_1)v_{\pm 2m} \equiv \pm 130v_{2m} \pmod{u_{2m}} \tag{9}$$

$u_{2m} \equiv 1 \pmod 8$,由 i)的计算知 $\left(\frac{v_{2m}}{u_{2m}}\right) = 1$,因此

$$1 = \left(\frac{y^2}{u_{2m}}\right) = \left(\frac{\pm 130v_{2m}}{u_{2m}}\right) = \left(\frac{2}{u_{2m}}\right)\left(\frac{\pm 65}{u_{2m}}\right)\left(\frac{v_{2m}}{u_{2m}}\right) = \left(\frac{\pm 65}{u_{2m}}\right) = \left(\frac{u_{2m}}{65}\right) \tag{10}$$

对 u_{2m} 取模 65,得剩余序列周期为 42,而 $2m \equiv 2,4,16,32 \pmod{42}$ 时,$u_{2m} \equiv 62,17 \pmod{65}$。所以 $\left(\frac{u_{2m}}{65}\right) = -1$,这与(10)式矛盾,因此(9)式不成立,此时(4)式无解。

当 $n = 1$ 时,方程(1)有正整数解 $(x,y) = (130,7)$。

iv)对(5)式取模。mod 3,$T = 2$,排除 $n \equiv 1 \pmod 2$,因为 $-2u_n + 11v_n \equiv 2 \pmod 3$,剩 $n \equiv 0 \pmod 2$,即 $n \equiv 0,2,4 \pmod 6$。mod 5,$T = 6$,排除 $n \equiv 0,4 \pmod 6$,因为 $-2u_n + 11v_n \equiv 3 \pmod 5$,剩 $n \equiv 2 \pmod 6$,即 $n \equiv 2,8 \pmod{12}$。mod 11,$T = 12$,排除 $n \equiv 2 \pmod{12}$,因为 $-2u_n + 11v_n \equiv 10 \pmod{11}$,剩 $n \equiv 8 \pmod{12}$,即 $n \equiv 8,20 \pmod{24}$。mod 64513,$T = 24$,排除 $n \equiv 8,20 \pmod{24}$,因为 $-2u_n + 11v_n \equiv 5087,59426 \pmod{64513}$。

此时(5)式无解,即方程(1)无正整数解。

结合 i),ii),iii),iv)知方程(1)仅有正整数解 $(x,y) = (10,1),(130,7)$。 证毕

参考文献:

[1] COHN J H E. Some Quartic Diophantine Equations[J]. Pacific J Math,1968,26:233-243.

[2] TZANAKIS N. On the Diophantine Equation $y^2 - D = 2^n$[J]. Number Theory,1983,17:144-164.

[3] 黎进香,张春蕊. 关于不定方程的初等解法[J]. 哈尔滨工业大学学报,1995(5):13-16.

[4] 罗明. 关于不定方程 $x^3 + 1 = 7y^2$[J]. 重庆师范学院学报(自然科学版),2003,20(1):5-7.

[5] 罗明. 关于不定方程 $x^3 - 1 = 26y^2$[J]. 西南大学学报(自然科学版),2007(6):5-7.

[6] 冯国锋. 关于不定方程 $x^3 + 1 = 2py^2$[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2006,23(4):28-29.

[7] 李觉友. 关于不定方程 $x^3 + 27 = 19y^2$[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2007,24(4):26-29.

On the Diophantine Equation $x^2 - 7y^4 = 93$

ZHENG Zi-xia

(College of Mathematics and Computer Science,Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: The study of the diophantine equation $x^2 - Dy^4 = C$ (D,C are given,and D is not a square integer) has caused some authors interest, such as, Li Jin-xiang and so on. In this paper,the author studies all the positive integer solutions of the diophantine equation $x^2 - 7y^4 = 93$. the process is as follows: classify the will-be integer solutions of the diophantine equation into four equations by Pell function firstly, then take models on these equations, so that the scale of the solutions will be reduced. At the same time, the methods of recursive sequence, congruence are used. At last, it is proved that the diophantine equation $x^2 - 7y^4 = 93$ has only positive integer solutions $(x,y) = (10,1),(130,7)$.

Key words: diophantine equation; positive integer solution; recurrent sequence; quadratic remainder

(责任编辑 欧红叶)