用扰动逼近算法解广义混合拟-似变分包含*

马 昌 威[1,2]

(1. 四川大学 数学学院,成都 610064;2. 阿坝师范高等专科学校 数学系,四川 汶川 623000)

摘 要:本文在无限维实 Hilbert 空间中引入和研究了一类广义混合拟-似变分包含问题 GMQLVIP(A,B,C,D,F,η,φ),在 η-次微分和 η-近似映象等概念的基础上,证明这类广义混合拟-似变分包含问题的一个等价命题,即设 $x\in H$,$a\in A(g(x))$,$b\in B(x)$,$c\in C(x)$,$d\in D(x)$,$f\in F(x)$,则 (x,a,b,c,d,f) 为问题 GMQLVIP 的解当且仅当 (x,a,b,c,d,f) 满足关系 $g(x)=J_\rho^{\Delta\varphi(\cdot,f)}(g(x)-\rho(a-N(b,c,d)+w))$,提出了求该变分包含近似解的扰动 η-逼近算法,并且该算法的强收敛性也被讨论和分析,所得结果改进和推广了在这个领域最近的一些结果。

关键词:广义混合拟-似变分包含;扰动 η-逼近算法;η-近似映象;Hilbert 空间

中图分类号:O177.91 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-6693(2008)04-0037-06

1 预备知识

设 H 为无限维实 Hilbert 空间,$\|\cdot\|$ 及 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 分别表示 H 上的范数和内积。用 $CB(H)$ 表示 H 上的一切非空有界闭集族,设 $N:H\times H\times H\to H$ 和 $g:H\to H$ 是单值映射,$w\in H$ 是 H 中一给定元,$A,B,C,D,F:H\to CB(H)$ 是集值映射,$\eta:H\times H\to H$ 是单值映射,$\varphi:H\times H\to \mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ 是一真泛函,对每一固定的 $z\in H$,$\varphi(\cdot,z):H\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ 是下半连续和 η- 次可微的,且 $g(H)\cap dom\Delta\varphi(\cdot,z)\neq\varnothing$($\eta$- 次可微的概念和 $\Delta\varphi(\cdot,z)$ 的意义后面作具体介绍)。

本文考虑的广义混合拟 - 似变分包含问题(简记为 GMQLVIP),求 $x\in H$,$a\in A(g(x))$,$b\in B(x)$,$c\in C(x)$,$d\in D(x)$,$f\in F(x)$ 使得 $g(x)\in dom\Delta\varphi(\cdot,f)$,且满足

$$\langle a-N(b,c,d)+w,\eta(y,g(x))\rangle\geqslant\varphi(g(x),f)-\varphi(y,f),\forall y\in H \tag{1}$$

GMQLVIP(1) 式的一些特殊情况。

ⅰ) 若 $A\equiv 0$,$w=0$,$N(b,c,d)=-N_1(b,c)$,$\forall x,y,b,c,d\in H$,(1) 式退化为,求 $x\in H$,$a\in A(g(x))$,$b\in B(x)$,$c\in C(x)$,$f\in F(x)$ 使得 $g(x)\in dom\Delta\varphi(\cdot,f)$,且有

$$\langle N_1(b,c),\eta(y,g(x))\rangle\geqslant\varphi(g(x),f)-\varphi(y,f),\forall y\in H \tag{2}$$

问题(2) 是熊[1] 所研究的问题。

ⅱ) 若在(2) 式中,$\eta(y,g(x))=y-g(x)$ 且 $\varphi(u,f)=\varphi(u)$,$\forall x,y,u,f\in H$,(2) 式退化为,求 $x\in H$,$b\in B(x)$,$c\in C(x)$,使得

$$\langle N_1(b,c),y-g(x)\rangle\geqslant\varphi(g(x))-\varphi(y),\forall y\in H \tag{3}$$

问题(3) 正是 Noor[2] 讨论和研究的问题。

ⅲ) 若 $A\equiv 0$,$w=0$,$-N(b,c,d)=b-c$,$\eta(y,g(x))=y-g(x)$,$F\equiv I$,$\forall x,y,b,c,d\in H$,(1) 式退化为求 $x\in H$,$b\in B(x)$,$c\in C(x)$,使得 $g(x)\in dom\Delta\varphi(\cdot,f)$ 且

$$\langle b-c,y-g(x)\rangle\geqslant\varphi(g(x),x)-\varphi(y,x),\forall y\in H \tag{4}$$

问题(4) 是 Ding[3] 所研究的问题。

适当选取 A,B,C,D,F,g,φ,η 可得若干拟 - 似变分包含和拟变分包含,拟 - 似变分不等式和拟变分不等式作为 GMQLVIP(1) 的特殊情形[1-8]。为求解问题(1),引入下面的定义和引理。

定义 1[5] 称映射 $\eta:H\times H\to H$ 是

---

* 收稿日期:2008-03-25
作者简介:马昌威(1972-),男,副教授,硕士研究生,研究方向为非线性泛函分析。

ⅰ) δ-强单调的,若存在 $\delta > 0$,使得 $\langle \eta(x,y), x-y\rangle \geq \delta \|x-y\|^2, \forall x,y \in H$

ⅱ) τ-Lipschitz 连续的,若存在 $\tau > 0$,使得 $\|\eta(x,y)\| \leq \tau\|x-y\|, \forall x,y \in H$。

定义2[9] 设 $B: H \to CB(H)$ 是集值映射,$N: H\times H\times H \to H$ 是单值映射,B 称为

ⅰ) 关于 N 的第一变量松弛 γ-Lipschitz 连续的,如果存在 $\gamma > 0$ 使

$$\langle x-y, N(u,c,d) - N(v,c,d)\rangle \leq -\gamma\|x-y\|^2, \forall (x,y,c,d) \in H\times H\times H\times H, u \in B(x), v \in B(y)$$

ⅱ) 关于 N 的第二变量 σ-广义伪压缩的,如果存在 $\sigma > 0$ 使

$$\langle x-y, N(b,u,d) - N(b,v,d)\rangle \leq \sigma\|x-y\|^2, \forall (x,y,b,d) \in H\times H\times H\times H, u \in B(x), v \in B(y)$$

ⅲ) 称 N 关于第一自变量是 L_1-Lipschitz 连续的,若存在常数 $L_1 > 0$,使得

$$\|N(x,c,d) - N(y,c,d)\| \leq L_1\|x-y\|, \forall (x,y,c,d) \in H\times H\times H\times H$$

类似可以定义 N 关于第二(三)自变量的 Lipschitz 连续性。

定义3 称集值映射 $A: H \to CB(H)$ 是 ξ-$\widetilde{H}$-Lipschitz 连续的,若存在常数 $\xi > 0$,使

$$\widetilde{H}(A(x), A(y)) \leq \xi\|x-y\|, \forall (x,y) \in H\times H$$

$\widetilde{H}(\cdot,\cdot)$ 是 $C(H)$ 上的 Hausdorff 度量。

定义4 称单值映射 $g: H \to H$ 是

ⅰ) α-强单调的,若存在 $\alpha > 0$,使得 $\langle g(x) - g(y), x-y\rangle \geq \alpha\|x-y\|^2, \forall x,y \in H$

ⅱ) β-Lipschitz 连续的,若存在 $\beta > 0$,使得 $\|g(x) - g(y)\| \leq \beta\|x-y\|, \forall x,y \in H$。

定义5[5] 设 $\eta: H\times H \to H$ 是单值映射,称真泛函 $\varphi: H \to \mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ 在点 $x \in H$ 处是 η-次可微的,若存在 $f^* \in H$,使得 $\varphi(y) - \varphi(x) \geq \langle f^*, \eta(y,x)\rangle, \forall y \in H$。此时 f^* 称为 φ 在 x 处的 η-次梯度,φ 在 x 处的所有 η-次梯度的集合记为 $\Delta\varphi(x)$。由 $\Delta\varphi(x) = \{f^* \in H: \varphi(y) - \varphi(x) \geq \langle f^*, \eta(y,x)\rangle, \forall y \in H\}$ 定义的集值映射 $\Delta\varphi: H \to 2^H$ 称为 φ 的 η-次微分。

定义6[5] 设 $\varphi: H \to \mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ 是一真泛函,对任意给定的 $x \in H$ 及 $\rho > 0$,若存在映象 $\eta: H\times H \to H$ 及唯一元 $u \in H$ 满足 $\langle u-x, \eta(y,u)\rangle \geq \rho\varphi(u) - \rho\varphi(y), \forall y \in H$,则称映象 $x \to u$(记为 $J_\rho^{\Delta\varphi}$)为 φ 的近似映象,即 $u = J_\rho^{\Delta\varphi}(x)$,其中 $J_\rho^{\Delta\varphi} = (I + \Delta\varphi)^{-1}$,$I$ 是 H 上的恒等映象。

引理1[5] 设 $\eta: H\times H \to H$ 是 τ-Lipschitz 连续和 δ-强单调且使得对 $\forall x,y \in H, \eta(x,y) = -\eta(y,x)$,对任意给定的 $x \in H$,函数 $h(y,u) = \langle x-u, \eta(y,u)\rangle$ 关于 y 是0-对角拟凹的[10],设 $\varphi: H \to \mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ 是下半连续和 η-次可微真泛函,那么

ⅰ) 对任给的 $x \in H$ 及 $\rho > 0$,都存在唯一元 $u \in H$,使得

$$\langle u-x, \eta(y,u)\rangle \geq \rho\varphi(u) - \rho\varphi(y), \forall y \in H, \text{即 } u = J_\rho^{\Delta\varphi}(x)$$

ⅱ) $J_\rho^{\Delta\varphi}$ 为 $\frac{\tau}{\delta}$-Lipschitz 连续的,即 $\|J_\rho^{\Delta\varphi}(x) - J_\rho^{\Delta\varphi}(y)\| \leq \frac{\tau}{\delta}\|x-y\|, \forall x,y \in H$。

引理2 设 $x \in H, a \in A(g(x)), b \in B(x), c \in C(x), d \in D(x), f \in F(x)$,则 (x,a,b,c,d,f) 为问题(1)的解当且仅当 (x,a,b,c,d,f) 满足关系

$$g(x) = J_\rho^{\Delta\varphi(\cdot,f)}(g(x) - \rho(a - N(b,c,d) + w)) \tag{5}$$

证明 设 (x,a,b,c,d,f) 满足(5)式 $\Leftrightarrow g(x) = J_\rho^{\Delta\varphi(\cdot,f)}(g(x) - \rho(a - N(b,c,d) + w)) \Leftrightarrow$

$$g(x) - \rho(a - N(b,c,d) + w) \in \rho\Delta\varphi(g(x),f) + g(x) \Leftrightarrow$$

$$-(a - N(b,c,d) + w) \in \Delta\varphi(g(x),f) \Leftrightarrow$$

$$\varphi(y,f) - \varphi(g(x),f) \geq \langle -(a - N(b,c,d) + w), \eta(y,g(x))\rangle \Leftrightarrow$$

$$\langle a - N(b,c,d) + w, \eta(y,g(x))\rangle \geq \varphi(g(x),f) - \varphi(y,f) \Leftrightarrow$$

(x,a,b,c,d,f) 是问题(1)的解。 证毕

注1 引理2推广了 Ding[3] 中的定理3.1和熊[1] 中的定理2.1。

2 扰动逼近算法和收敛性分析

将引理2的(5)式改写为

$$x = x - g(x) + J_\rho^{\Delta\varphi(\cdot,f)}(g(x) - \rho(a - N(b,c,d) + w)) \tag{6}$$

由(6)式提出如下算法。

算法 1　设 $A,B,C,D,F:H\times\Omega\to CB(H)$,$N:H\times H\times H\to H$,$g:H\to H$,$\varphi:H\times H\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$是一真泛函,对每一固定的 $z\in H$,$\varphi(\cdot,z):H\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$是下半连续和 η-次可微的,且 $g(H)\cap dom\Delta\varphi(\cdot,z)\neq\varnothing$,$\eta:H\times H\to H$ 满足引理 1 的条件。任给 $x_0\in H$,取 $a_0\in A(g(x_0))$,$b_0\in B(x_0)$,$c_0\in C(x_0)$,$d_0\in D(x_0)$,$f_0\in F(x_0)$,设

$$x_1 = x_0 - g(x_0) + J_\rho^{\Delta\varphi(\cdot,f_0)}[g(x_0) - \rho(a_0 - N(b_0,c_0,d_0) + w)]$$

因 $A(g(x_1)),B(x_1),C(x_1),D(x_1),F(x_1)\in CB(H)$,由 Nadler[10] 的方法,存在 $a_1\in A(g(x_1))$,$b_1\in B(x_1)$,$c_1\in C(x_1)$,$d_1\in D(x_1)$,$f_1\in F(x_1)$,使得

$$\|a_0 - a_1\| \leqslant (1+1)\widetilde{H}(A(g(x_0)),A(g(x_1))),\ \|b_0 - b_1\| \leqslant (1+1)\widetilde{H}(B(x_0),B(x_1)),$$

$$\|c_0 - c_1\| \leqslant (1+1)\widetilde{H}(C(x_0,C(x_1)),\ \|d_0 - d_1\| \leqslant (1+1)\widetilde{H}(D(x_0),D(x_1)),$$

$$\|f_0 - f_1\| \leqslant (1+1)\widetilde{H}(F(x_0),F(x_1)),$$

设 $x_2 = x_1 - g(x_1) + J_\rho^{\Delta\varphi(\cdot,f_1)}[g(x_1) - \rho(a_1 - N(b_1,c_1,d_1) + w)]$,继续 Nadler 的方法,可构造出序列$\{x_n\}$,$\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$,$\{d_n\}$,$\{f_n\}$满足

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - g(x_n) + J_\rho^{\Delta\varphi(\cdot,f_n)}[g(x_n) - \rho(a_n - N(b_n,c_n,d_n) + w)] \\ a_n \in A(g(x_n)):\|a_n - a_{n+1}\| \leqslant (1+\frac{1}{n+1})\widetilde{H}(A(g(x_n)),A(g(x_{n+1}))) \\ b_n \in B(x_n):\|b_n - b_{n+1}\| \leqslant (1+\frac{1}{n+1})\widetilde{H}(B(x_n),B(x_{n+1})) \\ c_n \in C(x_n):\|c_n - c_{n+1}\| \leqslant (1+\frac{1}{n+1})\widetilde{H}(C(x_n),C(x_{n+1})) \\ d_n \in D(x_n):\|d_n - d_{n+1}\| \leqslant (1+\frac{1}{n+1})\widetilde{H}(D(x_n),D(x_{n+1})) \\ f_n \in F(x_n):\|f_n - f_{n+1}\| \leqslant (1+\frac{1}{n+1})\widetilde{H}(F(x_n),F(x_{n+1})) \end{cases} \tag{7}$$

$n=0,1,2,\cdots$,$\rho>0$ 是常数。

为产生扰动逼近算法,在算法 1 的(7)式右边加上因计算产生的误差序列$\{e_n\}$,再用 φ_n 代替 φ 产生扰动,其中对任意的 $n\geqslant1$,$\varphi_n:H\times H\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$均是真泛函,对每一固定的 $z\in H$,$\varphi_n(\cdot,z):H\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$是下半连续和 η-次可微的,且 $g(H)\cap dom\Delta\varphi_n(\cdot,z)\neq\varnothing$,$\varphi_n$ 逼近 φ。由此可得如下扰动逼近算法。

算法 2　设 A,B,C,D,F,N,g,η 与算法 1 相同,对 $\forall n\geqslant1$,$\varphi_n:H\times H\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$对每一固定的 $z\in H$,$\varphi_n(\cdot,z):H\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$均是下半连续和 η-次可微的真泛函,且 $g(H)\cap dom\Delta\varphi_n(\cdot,z)\neq\varnothing$,任给 $x_0\in H$,与算法 1 类似的方法可构造序列出$\{x_n\}$,$\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$,$\{d_n\}$,$\{f_n\}$满足

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - g(x_n) + J_\rho^{\Delta\varphi(\cdot,f_n)}[g(x_n) - \rho(a_n - N(b_n,c_n,d_n) + w)] + e_n \\ a_n \in A(g(x_n)):\|a_n - a_{n+1}\| \leqslant (1+\frac{1}{n+1})\widetilde{H}(A(g(x_n)),A(g(x_{n+1}))) \\ b_n \in B(x_n):\|b_n - b_{n+1}\| \leqslant (1+\frac{1}{n+1})\widetilde{H}(B(x_n),B(x_{n+1})) \\ c_n \in C(x_n):\|c_n - c_{n+1}\| \leqslant (1+\frac{1}{n+1})\widetilde{H}(C(x_n),C(x_{n+1})) \\ d_n \in D(x_n):\|d_n - d_{n+1}\| \leqslant (1+\frac{1}{n+1})\widetilde{H}(D(x_n),D(x_{n+1})) \\ f_n \in F(x_n):\|f_n - f_{n+1}\| \leqslant (1+\frac{1}{n+1})\widetilde{H}(F(x_n),F(x_{n+1})) \end{cases} \tag{8}$$

其中 $n=0,1,2,\cdots$,$\rho>0$ 是常数,$\{e_n\}$是 H 中的误差序列。

注2 算法2改进和推广了文献[1]的算法3.1,推广了文献[3]的算法3.3。

定理1 设$A,B,C,D,F:H\to CB(H)$分别是$\lambda_A,\lambda_B,\lambda_C,\lambda_D,\lambda_F$-$H$-Lipschitz连续的,$g:H\to H$是$\alpha$-强单调和$\beta$-Lipschitz连续的,$N:H\times H\times H\to H$关于第一(二,三)自变量分别是$L_1(L_2,L_3)$-Lipschitz连续的,$\eta:H\times H\to H$满足引理1的条件,$B$关于$N$的第一自变量是松弛$\gamma$-Lipschitz连续的,$C$关于$N$的第二自变量是$\sigma$-广义伪压缩的,$\varphi,\varphi_n: H\times H\to \mathbf{R}\cup\{+\infty\}$对每一固定的$z\in H$,$\varphi(\cdot,z),\varphi_n(\cdot,z):H\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$均是下半连续和$\eta$-次可微的真泛函,且$g(H)\cap dom\Delta\varphi(\cdot,z)\neq\varnothing$,进一步还满足下列条件

a) 存在常数$\mu>0$,使得对$\forall x,y,z\in H$,都有

$$\|J_\rho^{\Delta\varphi(\cdot,x)}(z)-J_\rho^{\Delta\varphi(\cdot,y)}(z)\|\leqslant\mu\|x-y\|,\text{且}\lim_{n\to\infty}\|J_\rho^{\Delta\varphi_n(\cdot,x)}(z)-J_\rho^{\Delta\varphi(\cdot,x)}(z)\|=0$$

b) $\{e_n\}$满足$\lim\limits_{i\to\infty}\|e_i\|=0$且当$\xi>0$,$\lim\limits_{i\to\infty}\pi_i=0$时有$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{\|e_i-e_{i-1}\|+\pi_i}{\xi^i}<\infty$

c) ρ满足
$$\begin{cases}k=(1+\dfrac{\tau}{\delta})\sqrt{1-2\alpha+\beta^2}+\mu\lambda_F<1,\alpha\leqslant\dfrac{1+\beta^2}{2}\\[2mm] p=\dfrac{\tau}{\delta}(L_1\lambda_B+L_2\lambda_C)>\dfrac{\tau}{\delta}(\lambda_A\beta+L_3\lambda_D)=q\\[2mm] \dfrac{\tau^2}{\delta^2}(\gamma-\sigma)>q(1-k)+\sqrt{(p^2-q^2)[\dfrac{\tau^2}{\delta^2}-(1-k)^2]}\\[2mm] \left|\rho-\dfrac{\dfrac{\tau^2}{\delta^2}(\gamma-\sigma)-q(1-k)}{(p^2-q^2)}\right|<\dfrac{\sqrt{[\dfrac{\tau^2}{\delta^2}(\gamma-\sigma)-q(1-k)]^2-(p^2-q^2)[\dfrac{\tau^2}{\delta^2}-(1-k)^2]}}{(p^2-q^2)}\end{cases}$$

则由算法2所生成的序列$\{x_n\}$,$\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$,$\{d_n\}$,$\{f_n\}$分别强收敛于x^*,a^*,b^*,c^*,d^*,f^*,且$(x^*,a^*,b^*,c^*,d^*,f^*)$是GMQLVIP问题(1)的一个解。

证明 为书写简便记$\omega_n=g(x_n)-\rho(a_n-N(b_n,c_n,d_n)+w)$,那么由(7)式可得

$$\begin{aligned}&\|x_{n+1}-x_n\|=\|x_n-g(x_n)+J_\rho^{\Delta\varphi_n(\cdot,f_n)}(\omega_n)+e_n-(x_{n-1}-g(x_{n-1})+J_\rho^{\Delta\varphi_{n-1}(\cdot,f_{n-1})}(\omega_{n-1})+e_{n-1}\|\leqslant\\&\|x_n-x_{n-1}-(g(x_n)-g(x_{n-1}))\|+\|J_\rho^{\Delta\varphi_n(\cdot,f_n)}(\omega_n)-J_\rho^{\Delta\varphi_n(\cdot,f_n)}(\omega_{n-1})\|+\|J_\rho^{\Delta\varphi_n(\cdot,f_n)}(\omega_{n-1})-J_\rho^{\Delta\varphi(\cdot,f_n)}(\omega_{n-1})\|+\\&\|J_\rho^{\Delta\varphi(\cdot,f_n)}(\omega_{n-1})-J_\rho^{\Delta\varphi(\cdot,f_{n-1})}(\omega_{n-1})\|+\|J_\rho^{\Delta\varphi(\cdot,f_{n-1})}(\omega_{n-1})-J_\rho^{\Delta\varphi_{n-1}(\cdot,f_{n-1})}(\omega_{n-1})\|+\|e_n-e_{n-1}\|\leqslant\\&\|x_n-x_{n-1}-(g(x_n)-g(x_{n-1}))\|+\frac{\tau}{\delta}\|\omega_n-\omega_{n-1}\|+\mu\|f_n-f_{n-1}\|+\|e_n-e_{n-1}\|+\varepsilon_n\end{aligned}\tag{9}$$

其中$\varepsilon_n=\|J_\rho^{\Delta\varphi_n(\cdot,f_n)}(\omega_{n-1})-J_\rho^{\Delta\varphi(\cdot,f_n)}(\omega_{n-1})\|+\|J_\rho^{\Delta\varphi(\cdot,f_{n-1})}(\omega_{n-1})-J_\rho^{\Delta\varphi_{n-1}(\cdot,f_{n-1})}(\omega_{n-1})\|$

由条件a)知
$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0\tag{10}$$

在(9)式中,由g是α-强单调和β-Lipschitz连续的可得
$$\|x_n-x_{n-1}-(g(x_n)-g(x_{n-1}))\|\leqslant\sqrt{1-2\alpha+\beta^2}\|x_n-x_{n-1}\|\tag{11}$$

由算法2及F是λ_F-$\widetilde{H}$-Lipschitz连续的可得
$$\mu\|f_n-f_{n-1}\|\leqslant\mu(1+\frac{1}{n})\lambda_F\|x_n-x_{n-1}\|\tag{12}$$

而
$$\begin{aligned}\|\omega_n-\omega_{n-1}\|=&\|g(x_n)-\rho(a_n-N(b_n,c_n,d_n)+w)-[g(x_{n-1})-\rho(a_{n-1}-N(b_{n-1},c_{n-1},d_{n-1})+w)]\|\leqslant\\&\|g(x_n)-g(x_{n-1})-(x_n-x_{n-1})\|+\rho\|a_n-a_{n-1}\|+\rho\|N(b_{n-1},c_{n-1},d_n)-N(b_{n-1},c_{n-1},d_{n-1})\|+\\&\|x_n-x_{n-1}+\rho(N(b_n,c_n,d_n)-N(b_{n-1},c_{n-1},d_n))\|\end{aligned}\tag{13}$$

在(13)式中,有
$$\|g(x_n)-g(x_{n-1})-(x_n-x_{n-1})\|\leqslant\sqrt{1-2\alpha+\beta^2}\|x_n-x_{n-1}\|\tag{14}$$

由算法2和A是λ_A-$\widetilde{H}$-Lipschitz连续的及g是β-Lipschitz连续的可得
$$\rho\|a_n-a_{n-1}\|\leqslant\rho(1+\frac{1}{n})\lambda_A\beta\|x_n-x_{n-1}\|\tag{15}$$

由算法 2 及 N 关于第三自变量是 L_3-Lipschitz 连续的和 D 是 λ_D-$\widetilde{H}$-Lipschitz 连续的可得

$$\rho\|N(b_{n-1},c_{n-1},d_n)-N(b_{n-1},c_{n-1},d_{n-1})\|\leqslant\rho L_3\lambda_D(1+\frac{1}{n})\|x_n-x_{n-1}\| \tag{16}$$

又由算法 2，B 关于 N 的第一自变量是松弛 γ-Lipschitz 连续的，C 关于 N 的第二自变量是 σ- 广义伪压缩的，$N:H\times H\times H\to H$ 关于第一（二）自变量分别是 $L_1(L_2)$-Lipschitz 连续的，设 B,C 分别是 λ_B,λ_C-$\widetilde{H}$-Lipschitz 连续的可得

$$\begin{aligned}&\|x_n-x_{n-1}+\rho(N(b_n,c_n,d_n)-N(b_{n-1},c_{n-1},d_n))\|^2=\|x_n-x_{n-1}\|^2+\\&2\rho\langle N(b_n,c_n,d_n)-N(b_{n-1},c_n,d_n),x_n-x_{n-1}\rangle+2\rho\langle N(b_{n-1},c_n,d_n)-N(b_{n-1},c_{n-1},d_n),x_n-x_{n-1}\rangle+\\&\rho^2\|N(b_n,c_n,d_n)-N(b_{n-1},c_n,d_n)+N(b_{n-1},c_n,d_n)-N(b_{n-1},c_{n-1},d_n)\|^2\leqslant\\&[1-2\rho(\gamma-\sigma)+\rho^2(L_1\lambda_B(1+\frac{1}{n})+L_2\lambda_C(1+\frac{1}{n}))^2]\|x_n-x_{n-1}\|\end{aligned} \tag{17}$$

将(14)～(17)式代入(12)式，再将(11)～(13)式代入(9)式可得

$$\|x_{n+1}-x_n\|\leqslant(k_n+\rho q_n+\sqrt{\frac{\tau^2}{\delta^2}[1-2\rho(\gamma-\sigma)]+\rho^2p_n^2})\|x_n-x_{n-1}\|+\|e_n-e_{n-1}\|+\varepsilon_n$$

其中 $k_n=(1+\frac{\tau}{\delta})\sqrt{1-2\alpha+\beta^2}+\mu\lambda_F(1+\frac{1}{n})$，$p_n=\frac{\tau}{\delta}(1+\frac{1}{n})(L_1\lambda_B+L_2\lambda_C)$，$q_n=\frac{\tau}{\delta}(1+\frac{1}{n})(L_3\lambda_D+\lambda_A\beta)$，显然 $k_n\to k,p_n\to p,q_n\to q\ (n\to\infty)$，$k,p,q$ 由条件 c）给出。

设 $\theta_n=k_n+\rho q_n+\sqrt{\frac{\tau^2}{\delta^2}[1-2\rho(\gamma-\sigma)]+\rho^2p_n^2}$，$\theta=k+\rho q+\sqrt{\frac{\tau^2}{\delta^2}[1-2\rho(\gamma-\sigma)]+\rho^2p^2}$ 则 $\theta_n\to\theta\ (n\to\infty)$，由条件 c）知 $\theta<1$，故 $\exists n_0>0$，$\theta_0\in(0,1)$，使得 $\forall n>n_0$ 有 $\theta_n<\theta_0$。

故对 $\forall n>n_0$ 有

$$\|x_{n+1}-x_n\|\leqslant\theta_0\|x_n-x_{n-1}\|+\|e_n-e_{n-1}\|+\varepsilon_n \tag{18}$$

由(18)式对 $\forall n>n_0$ 有

$$\|x_{n+1}-x_n\|\leqslant\theta_0^{n-n_0}\|x_{n_0+1}-x_{n_0}\|+\sum_{k=1}^{n-n_0}\theta_0^{k-1}(\|e_{n-(k-1)}-e_{n-k}\|+\varepsilon_{n-(k-1)})$$

因此对 $\forall m\geqslant n>n_0$ 有

$$\begin{aligned}\|x_m-x_n\|&\leqslant\sum_{i=n}^{m-1}\|x_{i+1}-x_i\|\leqslant\sum_{i=n}^{m-1}\theta_0^{i-n_0}\|x_{n_0+1}-x_{n_0}\|+\sum_{i=n}^{m-1}\sum_{k=1}^{i-n_0}\theta_0^{k-1}(\|e_{i-(k-1)}-e_{i-k}\|+\varepsilon_{i-(k-1)})=\\&\sum_{i=n}^{m-1}\theta_0^{i-n_0}\|x_{n_0+1}-x_{n_0}\|+\sum_{i=n}^{m-1}\theta_0^{i}\sum_{k=1}^{i-n_0}(\|e_{i-(k-1)}-e_{i-k}\|+\varepsilon_{i-(k-1)})/\theta_0^{i-(k-1)}\end{aligned} \tag{19}$$

因 $\theta_0\in(0,1)$ 故

$$\sum_{k=1}^{i-n_0}(\|e_{i-(k-1)}-e_{i-k}\|+\varepsilon_{i-(k-1)})/\theta_0^{i-(k-1)}<\infty\ (i\to\infty)$$

由(19)式可知当 $n\to\infty$ 时，$\|x_m-x_n\|\to0$，故 $\{x_n\}$ 是 H 中的柯西序列，设 $x_n\to x^*\in H$，由算法 2 易知 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$，$\{d_n\}$，$\{f_n\}$ 均为 H 中的柯西序列，分别设 $a_n\to a^*,b_n\to b^*,c_n\to c^*,d_n\to d^*,f_n\to f^*$。下证 $(x^*,a^*,b^*,c^*,d^*,f^*)$ 是问题(1)的一个解。

由

$$\begin{aligned}&d(a^*,A(g(x^*)))\leqslant d(a^*,a_n)+d(a_n,A(g(x_n)))+\widetilde{H}(A(g(x_n)),A(g(x^*)))\leqslant\\&\|a_n-a^*\|+\lambda_A\beta\|x_n-x^*\|\to0,(n\to\infty)\end{aligned}$$

即 $a^*\in A(g(x^*))$，同理可证 $b^*\in B(x^*)$，$c^*\in C(x^*)$，$d^*\in D(x^*)$，$f^*\in F(x^*)$。

设 $\omega_n=g(x_n)-\rho(a_n-N(b_n,c_n,d_n)+w)$，$\omega^*=g(x^*)-\rho(a^*-N(b^*,c^*,d^*)+w)$，由 g,A,B,C,D,N 的 Lipschitz 连续性可得 $\omega_n\to\omega^*\ (n\to\infty)$，前已证 $f_n\to f^*\ (n\to\infty)$，故

$$\begin{aligned}&\|J_\rho^{\Delta\varphi_n(\cdot,f_n)}(\omega_n)-J_\rho^{\Delta\varphi(\cdot,f^*)}(\omega^*)\|\leqslant\|J_\rho^{\Delta\varphi_n(\cdot,f_n)}(\omega_n)-J_\rho^{\Delta\varphi(\cdot,f_n)}(\omega_n)\|+\\&\|J_\rho^{\Delta\varphi(\cdot,f_n)}(\omega_n)-J_\rho^{\Delta\varphi(\cdot,f^*)}(\omega_n)\|+\|J_\rho^{\Delta\varphi(\cdot,f^*)}(\omega_n)-J_\rho^{\Delta\varphi(\cdot,f^*)}(\omega^*)\|\leqslant\\&\|J_\rho^{\Delta\varphi_n(\cdot,f_n)}(\omega_n)-J_\rho^{\Delta\varphi(\cdot,f_n)}(\omega_n)\|+\mu\|f_n-f^*\|+\frac{\tau}{\delta}\|\omega_n-\omega^*\|\to0,(n\to\infty)\end{aligned}$$

即 $J_\rho^{\Delta\varphi_n(\cdot,f_n)}(\omega_n)\to J_\rho^{\Delta\varphi(\cdot,f^*)}(\omega^*)$，$(n\to\infty)$。

对算法 2 中的(9)式两端取极限可得 $g(x^*) = J_\rho^{\Delta\varphi(\cdot,f^*)}[g(x^*) - \rho(a^* - N(b^*,c^*,d^*) + \omega)]$，由引理 2 知，$(x^*,a^*,b^*,c^*,d^*,f^*)$ 是 GMQLVIP 问题(1)的一个解。

注 3　定理 1 改进和推广了文献[1]的定理 3.1，推广了文献[3]的定理 3.4 及文献[7]的定理 1。

参考文献：

[1] 熊廷见，姚莉. 关于一类一般集值混合似变分不等式与 η-广义集值内隐预解方程[J]. 四川师范大学学报(自然科学版)，1999，22(6)：660-666.

[2] NOOR M A. Generalized Set Valued Variational Inclusions and Resolent Equations[J]. J Math Anal Appl，1998，228：206-220.

[3] DING X P. Perturbed Proximal Point Algorithm for Generalized Quasivariational Inclusions[J]. J Math Anal Appl，1997，210：88-101.

[4] 胡润雪. 广义拟似变分包含的灵敏性分析[J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2003，28(6)：859-862.

[5] DING X P，LUO C L. Perturbed Proximal Point Algorithm for Generalized Quasi-variational-like Inclusions[J]. J Comput Appl Math，2000，113(1-2)：153-165.

[6] 丁协平. 解非线性混合似变分不等式的预测-校正迭代算法(英)[J]. 四川师范大学学报(自然科学版)，2003，26(1)：1-5.

[7] 胡新启. 一类变分不等式的扰动迭代算法[J]. 华中理工大学学报，2000，28(4)：109-111.

[8] HASSOUNI A，MOUDAFI A. Aperturbed Algorithm for Variational Inclusions[J]. J Math Anal Appl，1994，185：706-721.

[9] DING X P. Algorithms of Solutions for Completely Generalized Mixed Lmplicit Quasi-variational Inclusions[J]. Appl Math Comput，2004，148：47-66.

[10] NADLER S B Jr. Multivalued Contraction Mapping[J]. Pacific J Math，1969，30：475-488.

Perturbed Proximal Point Algorithms for Solving Generalized Mixed Quasi-Variational-Like Inclusions

MA Chang-wei

(Dept. of Mathematics, Aba Teachers College, Wenchuan Sichuan 623000, China)

Abstract: In This paper we introduce and study a class of generalized mixed quasi-variational-like inclusions problem: GMQLVIP(A,B,C,D,F,η,φ) in the Hibert space, By using η- subdifferential and η- proximal mapping due to Ding and Luo (J. Comput. Appl. Math. in print2000, 113(1-2): 153-165.), The equivalence problem is that if $x \in H, a \in A(g(x)), b \in B(x), c \in C(x), d \in D(x), f \in F(x)$, then (x,a,b,c,d,f) is a solution set of problem GMQLVIP if only if (x,a,b,c,d,f) such that $g(x) = J_\rho^{\Delta\varphi(\cdot,f)}(g(x) - \rho(a - N(b,c,d) + w))$, A new perturbed proximal point algorithm for finding approximate solutions to generalized mixed quasi-variational-like inclusions are suggested. The convergence criteria for the algorithm are also discussed and analyzed. As special cases, one can obtain a number of new and known algorithms for solving variational inclusions problem. These results develop and generalize many known results in this field.

Key words: generalized mixed quasi-variational-like inclusions; perturbed η-proximal point algorithm; η-proximal mapping; Hilbert space

(责任编辑　黄　颖)