# 关于亚纯函数分担不动点的唯一性*

吴 春
(重庆师范大学 数学与计算机科学学院,重庆 400047)

**摘要**:研究了关于亚纯函数的微分多项式分担不动点的唯一性问题,得到了:若 $f,g$ 为非常数的亚纯函数,$n(>4m+22)$ 的正整数,如果 $f^n(f^m-1)f'$ 与 $g^n(g^m-1)g'$IM 分担 $z$,则 $f\equiv g$,或 $g^m=\frac{m+n+1}{n+1}\frac{1-h^{n+1}}{1-h^{n+m+1}}$,$f^m=\frac{m+n+1}{n+1}\cdot\frac{(1-h^{n+1})h^m}{1-h^{n+m+1}}$(其中 $h(z)$ 为非常数的亚纯函数)。若 $f,g$ 为非常数的整函数,$n(>4m+11)$ 的正整数,如果 $f^n(f^m-1)f'$ 与 $g^n(g^m-1)g'$IM 分担 $z$,则 $f\equiv g$;此外,还获得了一个更一般的结果。

**关键词**:亚纯函数;唯一性;不动点
**中图分类号**:O174.5　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2009)02-0063-06

## 1 预备知识

在一些已有结果[1-8]的基础上,本文对亚纯函数的微分多项式分担不动点的唯一性问题进行研究。设 $f$ 和 $g$ 为复平面 $C$ 上的亚纯函数,$a$ 为任意复数,再设 $f(z)-a$ 的零点为 $z_n(n=1,2,\cdots)$。如果 $z_n(n=1,2,\cdots)$ 也是 $g(z)-a$ 的零点(不计重级),则记为 $f=a\Rightarrow g=a$。如果 $f=a\Rightarrow g=a$,$g=a\Rightarrow f=a$,则记为 $f=a\Leftrightarrow g=a$ 且称 $f$ 和 $g$IM 分担 $a$(不计重级)。如果 $f(z)=z$,则称 $z$ 为 $f(z)$ 的不动点。特别地,如果 $f=z\leftrightarrow g=z$,则称 $f$ 与 $g$CM 分担不动点;如果 $f=z\Leftrightarrow g=z$,则称 $f$ 与 $g$IM 分担不动点。

**定理 1**[1]　设 $f,g$ 为非常数的亚纯函数,$n\geqslant 11$ 为一正整数,且 $a\in C-\{0\}$。如果 $f^nf'$ 与 $g^ng'$CM 分担 $a$,则或者 $f=dg$,其中 $d$ 是常数且有 $d^{n+1}=1$ 或者 $g(z)=c_1e^{cz}$,$f(z)=c_2e^{-cz}$,其中 $c,c_1,c_2$ 为常数,且满足 $(c_1c_2)^{n+1}c^2=-a^2$。

**定理 2**[2]　设 $f,g$ 为非常数的亚纯函数,$n\geqslant 26$ 为一正整数,且 $a\in C-\{0\}$。如果 $f^nf'$ 与 $g^ng'$IM 分担 $a$,则或者 $f=dg$,其中 $d$ 是常数且有 $d^{n+1}=1$ 或者 $g(z)=c_1e^{cz}$,$f(z)=c_2e^{-cz}$,其中 $c,c_1,c_2$ 为常数,且满足 $(c_1c_2)^{n+1}c^2=-a^2$。

**定理 3**[3]　设 $f,g$ 为超越整函数,$n\geqslant 11$ 为一正整数。如果 $f^n(f-1)f'$ 与 $g^n(g-1)g'$CM 分担 1,则 $f\equiv g$。

**定理 4**[4]　设 $f,g$ 为非常数的整函数,$n\geqslant 17$ 为一正整数。如果 $f^n(f-1)f'$ 与 $g^n(g-1)g'$IM 分担 1,则 $f\equiv g$。

## 2 引理

**引理 1**[5]　设 $f$ 为非常数的亚纯函数,令 $R(f)=\frac{\sum_{k=0}^{n}a_kf^k}{\sum_{j=0}^{m}b_jf^j}$,其中 $\sum_{k=0}^{n}a_kf^k$ 与 $\sum_{j=0}^{m}b_jf^j$ 是两个互质的常系数多项式,且 $a_n\neq 0$,$b_m\neq 0$,则 $T(r,R(f))=\max\{n,m\}T(r,f)+S(r,f)$。

**引理 2**　设 $f,g$ 为非常数的亚纯函数,$n>6$ 为正整数,$\alpha(z)$ 为解析函数,且满足 $\alpha(z)=o(T(r,f),T(r,g))$,令 $F=f^n(f^m-1)f'$,$G=g^n(g^m-1)g'$,如果 $F,G$IM 分担 $\alpha(z)$,则 $S(r,f)=S(r,g)=S(r,F)=S(r,G)$。

**证明**　由引理 1,知

* 收稿日期:2008-07-09　　修回日期:2009-02-11
作者简介:吴春,男,讲师,硕士,研究方向为值分布理论。

$$T(r,F)\leqslant T(r,f^n(f^m-1))+T(r,f')\leqslant(m+n+2)T(r,f)+S(r,f)\tag{1}$$

又 $$(m+n)T(r,f)=T(r,f^n(f^m-1))\leqslant T(r,f^n(f^m-1)f')+T(r,f')+o(1)\leqslant T(r,F)+2T(r,f)+S(r,f)$$

即 $$T(r,F)\geqslant(m+n-2)T(r,f)+S(r,f)\tag{2}$$

由(1)、(2)式知 $S(r,F)=S(r,f)$。

同理 $$T(r,G)\leqslant(m+n+2)T(r,g)+S(r,g)\tag{3}$$

$$T(r,G)\geqslant(m+n-2)T(r,g)+S(r,g)\tag{4}$$

由(3)、(4)式知 $S(r,G)=S(r,g)$。

由第二基本定理,有 $$T(r,F)\leqslant\bar N(r,F)+\bar N(r,\frac{1}{F})+\bar N(r,\frac{1}{F-\alpha})+S(r,F)\leqslant$$

$$\bar N(r,f)+\bar N(r,\frac{1}{f})+\bar N(r,\frac{1}{f^m-1})+\bar N(r,\frac{1}{f'})+N(r,\frac{1}{G-\alpha})+S(r,f)\leqslant$$

$$(m+4)T(r,f)+T(r,G)+S(r,f)\tag{5}$$

因为 $$T(r,G)\leqslant T(r,g^n(g^m-1))+T(r,g')\leqslant(m+n+2)T(r,g)+S(r,g)\tag{6}$$

所以,由(2)、(5)、(6)式知 $$(n-6)T(r,f)\leqslant(m+n+2)T(r,g)+S(r,f)+S(r,g)$$

同理 $$(n-6)T(r,g)\leqslant(m+n+2)T(r,f)+S(r,f)+S(r,g)$$

因为 $n>6$,所以 $S(r,f)=S(r,g)$。 证毕

**引理3**[6] 设 $f,g$ 为非常数的亚纯函数,如果 $f$ 与 $g$ IM 分担1,则必发生下列情况之一

1) $T(r,f)+T(r,g)\leqslant2[N_2(r,f)+N_2(r,g)+N_2(r,\frac{1}{f})+N_2(r,\frac{1}{g})]+3\bar N_L(r,\frac{1}{f-1})+3\bar N_L(r,\frac{1}{g-1})+S(r,f)+S(r,g)$;

2) $f=\dfrac{(b+1)g+(a-b-1)}{bg+(a-b)}$,$a(\neq0)$,$b$ 为二非零常数。

**引理4**[7] 设 $f$ 为非常数的亚纯函数,$k$ 为一正整数,则 $N(r,\frac{1}{f^{(k)}})\leqslant N(r,\frac{1}{f})+k\bar N(r,f)+S(r,f)$。

**引理5** 设 $f,g$ 为非常数的亚纯函数,$n(\geqslant m+10)$ 为一正整数,令 $F=\dfrac{f^n(f^m-1)f'}{z}$,$G=\dfrac{g^n(g^m-1)g'}{z}$,如果 $$F=\frac{(b+1)G+(a-b-1)}{bG+(a-b)},a(\neq0),b\text{ 为二非零常数}\tag{7}$$

则 $f\equiv g$ 或 $g^m=\dfrac{m+n+1}{n+1}\dfrac{1-h^{n+1}}{1-h^{n+m+1}}$,$f^m=\dfrac{m+n+1}{n+1}\dfrac{(1-h^{n+1})h^m}{1-h^{n+m+1}}$,其中 $h(z)$ 为非常数的亚纯函数。

**证明** 令 $$F_1=\frac{1}{m+n+1}f^{m+n+1}-\frac{1}{n+1}f^{n+1},G_1=\frac{1}{m+n+1}g^{m+n+1}-\frac{1}{n+1}g^{n+1}\tag{8}$$

则由引理1,知 $$T(r,F_1)=(m+n+1)T(r,f)+S(r,f)\tag{9}$$

$$T(r,G_1)=(m+n+1)T(r,g)+S(r,g)\tag{10}$$

由引理2可知,$S(r,f)=S(r,g)$。不失一般性,假设 $T(r,f)\leqslant T(r,g)$,以下分3种情况讨论。

1) $b\neq0,-1$,若 $a-b-1\neq0$,由(7)式知 $\bar N\left(r,\dfrac{1}{G+\dfrac{a-b-1}{b+1}}\right)=\bar N\left(r,\dfrac{1}{F}\right)$,则由第二基本定理和引理4,有 $$T(r,G)\leqslant\bar N(r,G)+\bar N\left(r,\frac{1}{G}\right)+\bar N\left(r,\frac{1}{G+\frac{a-b-1}{b+1}}\right)+S(r,G)=\bar N(r,G)+\bar N\left(r,\frac{1}{G}\right)+\bar N\left(r,\frac{1}{F}\right)+S(r,g)\leqslant$$

$$\bar N(r,g)+\bar N\left(r,\frac{1}{g}\right)+\bar N\left(r,\frac{1}{g^m-1}\right)+N\left(r,\frac{1}{g'}\right)+\bar N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\bar N\left(r,\frac{1}{f^m-1}\right)+N\left(r,\frac{1}{f'}\right)+S(r,g)\leqslant$$

$$(m+4)T(r,g)+(m+3)T(r,f)+S(r,g)\leqslant(2m+7)T(r,g)+S(r,g)$$

又由(4)式知,$(n-m-9)T(r,g)\leqslant S(r,g)$。由 $n\geqslant m+10$,得到矛盾。

若 $a-b-1=0$,则(7)式变成 $F=\dfrac{(b+1)G}{bG+1}$,显然 $\bar N\left(r,\dfrac{1}{G+\frac{1}{b}}\right)=\bar N(r,F)$,则由第二基本定理和引理 4,有

$$T(r,G)\leqslant \bar N(r,G)+\bar N\left(r,\frac{1}{G}\right)+\bar N\left(r,\frac{1}{G+\frac{1}{b}}\right)+S(r,G)=\bar N(r,G)+\bar N\left(r,\frac{1}{G}\right)+\bar N(r,F)+S(r,g)\leqslant$$

$$\bar N(r,g)+\bar N\left(r,\frac{1}{g}\right)+\bar N\left(r,\frac{1}{g^m-1}\right)+N\left(r,\frac{1}{g'}\right)+\bar N(r,f)+S(r,g)\leqslant$$

$$(m+4)T(r,g)+T(r,f)+S(r,g)\leqslant(m+5)T(r,g)+S(r,g)$$

又由(4)式知 $(n-7)T(r,g)\leqslant S(r,g)$。由 $n\geqslant m+10$,得到矛盾。

2) $b=-1$,则(7)式变为 $F=\dfrac{a}{(a+1)-G}$。

若 $a+1\neq 0$,则 $\bar N\left(r,\dfrac{1}{G-(a+1)}\right)=\bar N(r,F)$,运用与情况 1)相同的方法可得到矛盾。

若 $a+1=0$,则 $FG\equiv 1$,即

$$f^n(f^m-1)f'g^n(g^m-1)g'\equiv z^2 \tag{11}$$

设 $z_0(\neq 0,\infty)$ 为 $f$ 的 $p$ 重零点,由(11)式知 $z_0$ 为 $g$ 的极点。现设 $z_0$ 为 $g$ 的 $q$ 重极点,则由(11)式知 $np+p-1=nq+mq+q+1$,即 $(n+1)(p-q)=mq+2$,则 $(p-q)\geqslant 1$,$mq+2\geqslant n+1$,所以 $p\geqslant\dfrac{m+n-1}{m}$。

设 $z_0(\neq 0,\infty)$ 为 $f-1$ 的 $p_1$ 重零点,则 $z_1$ 也为 $f^m-1$ 的 $p_1$ 重零点。由(11)式知,$z_1$ 为 $g$ 的极点。现设 $z_1$ 为 $g$ 的 $q_1$ 重极点,则由(11)式知 $p_1+p_1-1=nq_1+mq_1+q_1+1$,即 $2p_1-2=(m+n+1)q_1$,则 $2p_1-2\geqslant m+n+1$。所以 $p_1\geqslant\dfrac{m+n+3}{2}$。

设 $z_2(\neq 0,\infty)$ 为 $f'$ 的 $p_2$ 重零点,且不为 $f(f-1)$ 的零点,则同理可得 $p_2\geqslant m+n+2$。运用相同的方法,同样可得到关于 $g(g-1)g'$ 的零点的个数。

设 $z_3(\neq 0,\infty)$ 为 $f'$ 的极点,于是由(11)式知,$z_3$ 为 $g(g-1)g'$ 的零点。因此

$$\bar N(r,f)\leqslant\bar N\left(r,\frac{1}{g}\right)+\bar N\left(r,\frac{1}{g-1}\right)+\bar N\left(r,\frac{1}{g'}\right)<$$

$$\frac{m}{2m+8}N\left(r,\frac{1}{g}\right)+\frac{1}{m+6}N\left(r,\frac{1}{g-1}\right)+\frac{1}{2m+11}N\left(r,\frac{1}{g'}\right)<$$

$$\frac{m}{2m+8}N\left(r,\frac{1}{g}\right)+\frac{1}{m+4}N\left(r,\frac{1}{g-1}\right)+\frac{1}{2m+8}N\left(r,\frac{1}{g'}\right)=\frac{m+4}{2m+8}T(r,g)+S(r,g) \tag{12}$$

由第二基本定理与(12)式知

$$T(r,f)\leqslant\bar N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\bar N\left(r,\frac{1}{f-1}\right)+\bar N(r,f)+S(r,f)<\frac{m+2}{2m+8}T(r,f)+\frac{m+4}{2m+8}T(r,g)+S(r,f) \tag{13}$$

同理

$$T(r,g)<\frac{m+2}{2m+8}T(r,g)+\frac{m+4}{2m+8}T(r,f)+S(r,g) \tag{14}$$

从(13)、(14)式知 $\dfrac{1}{m+4}T(r,f)+\dfrac{1}{m+4}T(r,g)<S(r,f)+S(r,g)$,得到矛盾。

3) $b=0$,则由(7)式得到 $F=\dfrac{G+(a-1)}{a}$。

若 $a-1\neq 0$,则 $\bar N\left(r,\dfrac{1}{G+(a-1)}\right)=\bar N(r,F)$,运用与情况 1)相同的方法可得到矛盾。

若 $a-1=0$,则 $F\equiv G$,即 $F_1\equiv G_1+c$($c$ 为常数)。所以

$$T(r,f)=T(r,g)+S(r,f) \tag{15}$$

若 $c\neq 0$,由第二基本定理结合(8)、(9)及(15)式知

$$(m+n+1)T(r,g)=T(r,G_1)<\bar N\left(r,\frac{1}{G_1}\right)+\bar N\left(r,\frac{1}{G_1+c}\right)+\bar N(r,G_1)+S(r,g)\leqslant$$

$$\bar N\left(r,\frac{1}{g}\right)+\bar N\left(r,\frac{1}{g^m-\frac{m+n+1}{n+1}}\right)+\bar N(r,g)+\bar N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\bar N\left(r,\frac{1}{f^m-\frac{n+m+1}{n+1}}\right)+S(r,f)\leqslant$$
$$(2m+3)T(r,f)+S(r,g)$$

于是由 $n\geqslant m+10$ 结合(15)式得到矛盾。

所以 $c=0$,即 $F_1\equiv G_1$。也就是

$$f^{n+1}\left(\frac{1}{m+n+1}f^m-\frac{1}{n+1}\right)=g^{n+1}\left(\frac{1}{m+n+1}g^m-\frac{1}{n+1}\right)\tag{16}$$

令 $h=\dfrac{f}{g}$,若 $h\equiv 1$,则 $f\equiv g$ 若 $h\not\equiv 1$,由(16)式可得

$$g^m=\frac{m+n+1}{n+1}\cdot\frac{1-h^{n+1}}{1-h^{m+n+1}},f^m=\frac{m+n+1}{n+1}\cdot\frac{(1-h^{n+1})h^m}{1-h^{m+n+1}}$$ 证毕

## 3 主要结论及证明

本文针对定理1~4的情况,将其推广到了分担不动点的情形,得到了如下结果。

**定理5** 设 $f,g$ 为非常数的亚纯函数,$n(>4m+22)$ 的正整数,如果 $f^n(f^m-1)f'$ 与 $g^n(g^m-1)g'$ IM 分担 $z$,则 $f\equiv g$,或 $g^m=\dfrac{m+n+1}{n+1}\dfrac{1-h^{n+1}}{1-h^{m+n+1}},f^m=\dfrac{m+n+1}{n+1}\dfrac{(1-h^{n+1})h^m}{1-h^{m+n+1}}$

其中 $h(z)$ 为非常数的亚纯函数。

**证明** 由引理2知 $S(r,f)=S(r,g)$。设 $F,G,F_1,G_1$ 如引理5所定义,于是由定理2条件知 $F,G$ IM 分担1。因为 $(F_1)'=F\cdot z$,于是

$$m\left(r,\frac{1}{F_1}\right)\leqslant m\left(r,\frac{1}{zF}\right)+S(r,f)\leqslant m\left(r,\frac{1}{F}\right)+\log r+S(r,f)$$

所以由第一基本定理,有

$$T(r,F_1)=T\left(r,\frac{1}{F_1}\right)+S(r,f)=m\left(r,\frac{1}{F_1}\right)+N\left(r,\frac{1}{F_1}\right)+S(r,f)\leqslant m\left(r,\frac{1}{F}\right)+N\left(r,\frac{1}{F}\right)+$$
$$N\left(r,\frac{1}{F_1}\right)-N\left(r,\frac{1}{F}\right)+\log r+S(r,f)=T\left(r,\frac{1}{F}\right)+N\left(r,\frac{1}{F_1}\right)-N\left(r,\frac{1}{F}\right)+\log r+S(r,f)=$$
$$T(r,F)+N\left(r,\frac{1}{F_1}\right)-N\left(r,\frac{1}{F}\right)+\log r+o(1)+S(r,f)\tag{17}$$

因为
$$N\left(r,\frac{1}{F_1}\right)=(n+1)N\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{f^m-\frac{m+n+1}{n+1}}\right)\tag{18}$$

$$N\left(r,\frac{1}{F}\right)=n\cdot N\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{f^m-1}\right)+N\left(r,\frac{1}{f'}\right)\tag{19}$$

所以从(17)~(19)式知

$$T(r,F_1)\leqslant T(r,F)+N\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{f^m-\frac{m+n+1}{n+1}}\right)+\log r-N\left(r,\frac{1}{f^m-1}\right)-N\left(r,\frac{1}{f'}\right)+S(r,f)\tag{20}$$

同理

$$T(r,G_1)\leqslant T(r,G)+N\left(r,\frac{1}{g}\right)+N\left(r,\frac{1}{g^m-\frac{m+n+1}{n+1}}\right)+\log r-N\left(r,\frac{1}{g^m-1}\right)-N\left(r,\frac{1}{g'}\right)+S(r,g)\tag{21}$$

因为
$$\bar N_L\left(r,\frac{1}{F-1}\right)\leqslant N\left(r,\frac{F}{F'}\right)\leqslant T\left(r,\frac{F}{F'}\right)+S(r,f)=N\left(r,\frac{F'}{F}\right)+S(r,f)\leqslant$$
$$\bar N(r,F)+\bar N\left(r,\frac{1}{F}\right)+S(r,f)\leqslant\bar N(r,f)+N\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{f^m-1}\right)+N\left(r,\frac{1}{f'}\right)+S(r,f)\tag{22}$$

同理
$$\bar N_L\left(r,\frac{1}{G-1}\right)\leqslant \bar N(r,g)+N\left(r,\frac{1}{g}\right)+N\left(r,\frac{1}{g^m-1}\right)+N\left(r,\frac{1}{g'}\right)+S(r,g) \tag{23}$$

又
$$N_2\left(r,\frac{1}{F}\right)+N_2(r,F)\leqslant 2\bar N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\bar N\left(r,\frac{1}{f^m-1}\right)+N\left(r,\frac{1}{f'}\right)+2\bar N(r,f) \tag{24}$$

$$N_2\left(r,\frac{1}{G}\right)+N_2(r,G)\leqslant 2\bar N\left(r,\frac{1}{g}\right)+\bar N\left(r,\frac{1}{g^m-1}\right)+N\left(r,\frac{1}{g'}\right)+2\bar N(r,g) \tag{25}$$

由引理3,假设
$$T(r,F)+T(r,G)\leqslant 2\left[N_2(r,F)+N_2(r,G)+N_2\left(r,\frac{1}{F}\right)+N_2\left(r,\frac{1}{G}\right)\right]+$$
$$3\bar N_L\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+3\bar N_L\left(r,\frac{1}{G-1}\right)+S(r,f)+S(r,g) \tag{26}$$

则由(22)~(26)式结合(20)、(21)式知
$$T(r,F_1)+T(r,G_1)\leqslant(5m+23)T(r,f)+(5m+23)T(r,g)+S(r,f)+S(r,g) \tag{27}$$

于是从(9)、(10)及(27)式知
$$(n-4m-22)T(r,f)+(n-4m-22)T(r,g)\leqslant S(r,g)+S(r,g)$$

但由 $n>4m+22$,即可得到矛盾。

所以由引理3知　$F=\dfrac{(b+1)G+(a-b-1)}{bG+(a-b)}$,$a(\neq 0)$,$b$ 为二非零常数

再由引理5,知 $f\equiv g$ 或 $g^m=\dfrac{m+n+1}{n+1}\dfrac{1-h^{n+1}}{1-h^{n+m+1}}$,$f^m=\dfrac{m+n+1}{n+1}\dfrac{(1-h^{n+1})h^m}{1-h^{n+m+1}}$。　证毕

**推论**　设$f$,$g$为非常数的整函数,$n(>4m+11)$的正整数,如果$f^n(f^m-1)f'$与$g^n(g^m-1)g'$IM分担$z$,则$f\equiv g$。

**证明**　因为$f$,$g$为整函数,所以
$$N(r,f)=N(r,g)=0,\log r=o\{T(r,f),T(r,g)\}$$

且
$$N\left(r,\frac{1}{f'}\right)\leqslant N\left(r,\frac{1}{f}\right)+S(r,f)\leqslant T(r,f)+S(r,f)$$

由引理2知,$S(r,f)=S(r,g)$。设$F$,$G$,$F_1$,$G_1$如引理5所定义,因为
$$\bar N_L\left(r,\frac{1}{F-1}\right)\leqslant N\left(r,\frac{F}{F'}\right)\leqslant T\left(r,\frac{F}{F'}\right)++S(r,f)=N\left(r,\frac{F'}{F}\right)+S(r,f)\leqslant \bar N\left(r,\frac{1}{F}\right)+S(r,f)\leqslant$$
$$N\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{1}{f^m-1}\right)+N\left(r,\frac{1}{f'}\right)+S(r,f) \tag{28}$$

同理
$$\bar N_L\left(r,\frac{1}{G-1}\right)\leqslant N\left(r,\frac{1}{g}\right)+N\left(r,\frac{1}{g^m-1}\right)+N\left(r,\frac{1}{g'}\right)+S(r,g) \tag{29}$$

因为$F$,$G$IM分担1,则由引理3,假设
$$T(r,F)+T(r,G)\leqslant 2\left[N_2\left(r,\frac{1}{F}\right)+N_2\left(r,\frac{1}{F}\right)\right]+3\bar N_L\left(r,\frac{1}{F-1}\right)+3\bar N_L\left(r,\frac{1}{G-1}\right)+S(r,f)+S(r,g) \tag{30}$$

则由(24)、(25)及(28)~(30)式结合(20)、(21)式知
$$T(r,F_1)+T(r,G_1)\leqslant(5m+12)T(r,f)+(5m+12)T(r,g)+S(r,f)+S(r,g) \tag{31}$$

于是从(9)、(10)及(31)式知
$$(n-4m-11)T(r,f)+(n-4m-11)T(r,g)\leqslant S(r,g)+S(r,g)$$

但由 $n>4m+11$,即可得到矛盾。

所以由引理3知　$F=\dfrac{(b+1)G+(a-b-1)}{bG+(a-b)}$,$a(\neq 0)$,$b$ 为二非零常数

因此由引理5的证明知,(16)式成立。

令 $h=\dfrac{f}{g}$,若 $h\neq 1$,由(16)式可得 $g^m=\dfrac{m+n+1}{n+1}\dfrac{1-h^{n+1}}{1-h^{n+m+1}}$,即
$$g^m=\frac{(m+n+1)(1+h+\cdots+h^n)}{(n+1)(1+h+\cdots+h^{n+m})}$$

于是由 Picard 定理知，$h(z)$ 为常数，因此 $g(z)$ 为常数，这与 $g(z)$ 为非常数的整函数矛盾。因此，$h\equiv 1$，即 $f\equiv g$。 证毕

注 定理5中，若将条件"$f^n(f^m-1)f'$ 与 $g^n(g^m-1)g'$ IM 分担 $z$"替换为"$f^n(f^m-1)f'$ 与 $g^n(g^m-1)g'$ IM 分担 $\alpha(z)$，其中 $\alpha(z)\neq 0,\infty$，$\alpha(z)=o\{T(r,f),T(r,g)\}$"，定理5的结论仍成立，即有定理6。

定理6 设 $f,g$ 为非常数的亚纯函数，$n(>4m+22)$ 的正整数，如果 $f^n(f^m-1)f'$ 与 $g^n(g^m-1)g'$ IM 分担 $\alpha(z)$，则 $f\equiv g$，或

$$g^m=\frac{m+n+1}{n+1}\frac{1-h^{n+1}}{1-h^{n+m+1}},f^m=\frac{m+n+1}{n+1}\frac{(1-h^{n+1})h^m}{1-h^{n+m+1}}$$

其中 $h(z)$ 为非常数的亚纯函数。

## 参考文献：

[1] Yang C C, Hua X. Uniqueness and value-sharing of meromorphic functions[J]. Ann Acad Sci Fen Math, 1997, 22: 395-406.

[2] 高安力，郭辉. IM 分担一个值的亚纯函数[J]. 深圳大学学报(理工版), 1998, 15(4): 59-64.

[3] Fang M L, Wei H. A unicity theorem for entire functions concerning differential polynomials[J]. India J pure appl Math, 2001, 32(9): 1343-1348.

[4] Fang C Y, Fang M L. Uniqueness of meromorphic functions and differential polynomials[J]. Computers and Mathematics with Application, 2002, 44: 606-617.

[5] Mokhonko A Z. The navanlinna charateristic of some mermorphic functions[J]. Functional Analysis and Their Applications, 1971, 14: 83-87.

[6] Fang M L, Guo H. On unique range sets for meromorphic or entire functions[J]. Acta Mathematica Sinica (New Series), 1998, 14(4): 569-576.

[7] Yi H X, Yang C C. Uniqueness theory of meromorphic functions[M]. Beijing: Science Press, 1995.

[8] 夏玉玲. 涉及微分多项式的亚纯函数的正规族[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2007, 24(2): 29-31.

[10] 李进东，谢莉. 涉及重值的多个亚纯函数的分担值与唯一性[J]. 西华师范大学学报(自然科学版), 2005, 26(11): 1-4.

# Uniqueness Theorems for Meromorphic Functions Concerning Fixed-points

*WU Chun*

(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

**Abstract**: In this article, we deal with the uniqueness problems on meromorphic functions concerning differential polynomials that share fixed-points, and we prove: if $f$, $g$ be two nonconstant entire function and $n(>4m+11)$ be a positive integer. If $f^n(f^m-1)f'$ and $g^n(g^m-1)g'$ share $z$ IM, then $f\equiv g$; if $f$, $g$ be two nonconstant meromorphic function and $n(>4m+22)$ be a positive integer. If $f^n(f^m-1)f'$ and $g^n(g^m-1)g'$ share $z$ IM, then $f\equiv g$, or $g^m=\frac{m+n+1}{n+1}\frac{1-h^{n+1}}{1-h^{n+m+1}}$, $f^m=\frac{m+n+1}{n+1}\frac{(1-h^{n+1})h^m}{1-h^{n+m+1}}$. here $h(z)$ be a nonconstant meromorphic function. Moreover, we greatly improve the former result.

**Key words**: meromorphic function; uniqueness; fixed-point

(责任编辑 黄 颖)