2009 年 4 月　　重庆师范大学学报(自然科学版)　　Apr. 2009
第 26 卷 第 2 期　　Journal of Chongqing Normal University(Natural Science)　　Vol. 26 No. 2

乘积系统$(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n, f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_n)$的拓扑遍历性*

黎 日 松

(广东海洋大学 理学院，广东 湛江 524025)

摘要：记$\bar{f} = f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_n$，$\bar{N}_n = \{1,2,\cdots,n\}$，$\tilde{X} = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$，本文给出了$\bar{f}$是拓扑遍历的两个充要条件。若$f_i$有 POTP，$X_i$是连通的，$i \in \bar{N}_n$，则$\bar{f}$是拓扑遍历的 27 个等价条件被给出。讨论了$\bar{f}$是拓扑遍历的一些充分条件和必要条件。设$f_i \in C^0(X_i,X_i)$，$X_i$为紧度量空间，$i \in \bar{N}_n$，证明了：① 若$\bar{f}$是拓扑遍历的，则$\tilde{f}_1 \times \cdots \times \tilde{f}_n : M(X_1) \times \cdots \times M(X_n) \to M(X_1) \times \cdots \times M(X_n)$是拓扑遍历的。② 设$(X_\infty^{(j)}, f_\infty^{(j)})$为由$\{X_i^{(j)}, g_i^{(j)}, f_i^{(j)}\}_{i=1}^{\infty}$生成的逆极限系统，$j \in \bar{N}_n$，则$f_\infty^{(1)} \times \cdots \times f_\infty^{(n)}$为拓扑遍历的当且仅当$\prod_{j=1}^{n} f_i^{(j)}(i = 1,2,\cdots)$均为拓扑遍历的。③ 若存在$j \in \bar{N}_n$，使得对$t \in \bar{N}_n$且$t \neq j$，$f_t$均为拓扑混合的，则$\bar{f}$是拓扑遍历的当且仅当$f_j$是拓扑遍历的。

关键词：拓扑遍历；链可迁；混沌；概率测度

中图分类号：O189.3　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2009)02-0069-06

1 预备知识

拓扑遍历性是拓扑动力系统中令人关注的重要对象。文献[1]引进了拓扑遍历概念；文献[2]对拓扑遍历映射作了一些探讨；文献[3]介绍了拓扑双重遍历与拓扑全遍历概念，并讨论了拓扑遍历与拓扑双重遍历的一些关系，得到了若干结果；文献[4]对拓扑遍历映射的一些性质进行了深入研究，得到了一些重要结果，并举例说明拓扑遍历性是不同于拓扑可迁与拓扑混合的概念且是介于它们两者之间的重要概念，因此研究若干个动力系统的乘积系统的拓扑遍历性当属必要。本文的目的是研究和探讨乘积系统是拓扑遍历的条件，主要结果是文中的 9 个定理及其推论，其中，定理 2、定理 3、定理 4、定理 5 和推论 2 分别是文献[2]的系 1、定理 3、定理 5、文献[3]的定理 4 和定理 6(即文献[4]中的引理 5.2)的推广。

令 **N** 为正整数集，X为拓扑空间，$f \in C^0(X,X)$，U,V为X的子集，记$K(U,V) = \{n \in \mathbf{N} \mid f^n(U) \cap V \neq \varnothing\}$，$\theta(U) = \begin{cases} 0, U = \varnothing \\ 1, U \neq \varnothing \end{cases}$，记$N_n = \{0,1,\cdots,n-1\}$。设$U,V$为$X$的任非空开集：1)若$K(U,V) \neq \varnothing$，则称$f$是拓扑可迁的；2)若存在$N \in \mathbf{N}$，使$K(U,V) \supset (N,+\infty)$，则称$f$是拓扑混合的；3)若$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \theta(f^i(U) \cap V) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{1}{n}(\#(K(U,V) \cap N_n)) > 0$，即$K(U,V)$为 **N** 的正上密度子集，则称$f$是拓扑遍历的[1-2,4]。特殊地，设系统$(X,f)$是无限的紧致度量空间且$f \in C^0(X,X)$为满射，若对于$X$的任非空开集$U,V$，$N_f(U,V) = \{n \in \mathbf{N} \mid f^{-n}(V) \cap U \neq \varnothing\}$为 **N** 的正上密度子集，即$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{1}{n}(\#(N_f(U,V) \cap N_n)) > 0$，则称$f$是拓扑遍历的。设$C$为$X$的子集，$S$为正整数的无限子集，如果对于$C$的任意子集$A$和任意连续映射$F: A \to X$，存在递增的无限序列$\{q_i\} \subset S$，使得对于$\forall x \in A$，$\underline{\lim\limits_{i\to\infty}} f^{q_i}(x) = F(x)$，则称$C$是相对于数集$S$混沌的[2]。本文中，$|A|$也表示$A$的基数，其他有关概念及记号均可参考文献[5-13]。

---

* **收稿日期**：2008-09-05　　**修回日期**：2008-11-19

作者简介：黎日松，男，讲师，硕士，研究方向为动力系统。

2 结果及其证明

以下在没有特别说明时,总假定 $f \in C^0(X,X)$,$f_i \in C^0(X_i,X_i)$,X 和 X_i 均为紧致度量空间,$i=1,2,\cdots,n$。为方便计,恒记 $\bar{f}=f_1\times f_2\times\cdots\times f_n$,$\bar{N}_n=\{1,2,\cdots,n\}$,$\tilde{X}=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$。符号"$\Leftrightarrow$"总表示当且仅当。

定理 1 设 f_i 是拓扑遍历的,$i\in\bar{N}_n$,则 $\bar{f}$ 是拓扑遍历的 $\Leftrightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n}K_{f_i}(U_i,V_i)$ 为 N 的正上密度子集,其中 U_i,V_i 为 X_i 的任非空开集,$i\in\bar{N}_n$。

其证明可直接由定义得到,故从略。

推论 1 若 f_2 是拓扑混合的,则 $f_1\times f_2$(或 $f_2\times f_1$)是拓扑遍历的 $\Leftrightarrow f_1$ 是拓扑遍历的。

证明 对 X_i 的任非空开集 $U_i,V_i,i=1,2$,必有某个自然数 M,使得

$$\bigcap_{i=1}^{2}K_{f_i}(U_i,V_i)=\{m\mid f_1^m(U_1)\cap V_1\neq\varnothing\}\cap(M,+\infty)$$

从而 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{1}{n}\#((\bigcap\limits_{i=1}^{2}K_{f_i}(U_i,V_i))\cap N_n)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{1}{n}\#(\{m\mid f_1^m(U_1)\cap V_1\neq\varnothing\}\cap N_n\cap(M,+\infty))=$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}(\{m\mid f_1^m(U_1)\cap V_1\neq\varnothing\})\cap\{M,\cdots,n-1\}=$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n-M}{n}\times\frac{1}{n-M}\#(\{m\mid f_1^m(U_1)\cap V_1\neq\varnothing\}\cap\{M,\cdots,n-1\})=$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n-M}\#(\{m\mid f_1^m(U_1)\cap V_1\neq\varnothing\}\cap N_{n-M})=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{t}\#(K_{f_1}(U_1,V_1)\cap N_t)$$

由定理 1 知结论成立。 证毕

推论 2 若存在 $j\in\bar{N}_n$,使得对 $t\in\bar{N}_n$ 且 $t\neq j$,f_t 均为拓扑混合的,则 $\bar{f}$ 是拓扑遍历的 $\Leftrightarrow f_j$ 是拓扑遍历的。

其证明可由推论 1 得到。

注 1 以上两个推论是文献[3]中定理 6 的推广。

引理 1[2] 若 f 有 POTP 且是链可迁的,则 f 是拓扑遍历的。

引理 2 $\bar{f}$ 具有 POTP$\Leftrightarrow f_i$ 具有 POTP,$i\in\bar{N}_n$。其证明见引理 2[12],故从略。

引理 3 $\bar{f}$ 是链可迁的 $\Leftrightarrow f_i$ 是链可迁的,$i\in\bar{N}_n$。其证明可直接由定义得到,故从略。

定理 2 若 f_i 具有 POTP 且是链可迁的,$i\in\bar{N}_n$,则 $\bar{f}$ 是拓扑遍历的。

定理 2 的证明由引理 1、引理 2 和引理 3 即可得到。

注 2 定理 2 是文献[2]中的系 1(即本文引理 1)的推广。

引理 4 设 X_i 为拓扑空间,f_i 为满射,$i\in\bar{N}_n$,若 $\bar{f}$ 是拓扑遍历的,则对于 X_i 的任非空开集族 $\{A_{j1}^{(i)},A_{j2}^{(i)},\cdots,A_{ji}^{(i)}\}$ 和 $\{B_{l1}^{(i)},B_{l2}^{(i)},\cdots,B_{li}^{(i)}\}$($i\in\bar{N}_n$)以及 N 的上密度为 1 的子集 S,对 $\forall K\in\mathbf{N}$,存在 $p\in S\cap(K,+\infty)$,使得 $f_i^p(A_{jt}^{(i)})\cap B_{lq}^{(i)}\neq\varnothing$,,$i\in\bar{N}_n$,$t,q\in\bar{N}_i$。

证明 令 $U_i^{(j)},V_i^{(j)}$ 为 X_i 的任非空开集,$i\in\bar{N}_n$,因 $\bar{f}$ 是拓扑遍历的,故 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}K(U_i^{(1)},U_i^{(2)})$ 和 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}K(V_i^{(1)},V_i^{(2)})$ 均为 N 的正上密度子集,取 $p\in\bigcap\limits_{i=1}^{n}K(U_i^{(1)},U_i^{(2)})$,令 $U=U_1\times\cdots\times U_n$,$V=V_1\times\cdots\times V_n$,其中 $U_i=(f_i^{-p}(U_i^{(2)})\cap U_i^{(1)})$,$V_i=(f_i^{-p}(V_i^{(2)})\cap V_i^{(1)})$,$i\in\bar{N}_n$,任取 $m\in K(U,V)$,则

$$\bar{f}^m(U_1\times\cdots\times U_n)\cap(V_1\times\cdots\times V_n)=(f_1^m(U_1)\times\cdots\times f_n^m(U_n))\cap(V_1\times\cdots\times V_n)=$$

$$(f_1^m(U_1)\cap V_1)\times\cdots\times(f_n^m(U_n)\cap V_n)$$

故 $K(U,V)\subset\bigcap\limits_{i=1}^{n}K(U_i,V_i)$,则有,若 $\{A_{j1}^{(i)},A_{j2}^{(i)},\cdots,A_{ji}^{(i)}\}$ 和 $\{B_{l1}^{(i)},B_{l2}^{(i)},\cdots,B_{li}^{(i)}\}$ 是 X_i 的任意非空开集族,$i\in\bar{N}_n$,则有 N 的正上密度子集 $S_1\subset\bigcap\limits_{t=1}^{i}\bigcap\limits_{q=1}^{i}\bigcap\limits_{i=1}^{n}K(A_{jt}^{(i)},B_{lq}^{(i)})\neq\varnothing$。因 S 为 N 的上密度为 1 的子集,故对 $\forall M\in N$,

有 $p \in S \cap S_1 \cap (M, +\infty)$,即$f_i^p(A_{jt}^{(i)}) \cap B_{lq}^{(i)} \neq \varnothing$,其中 $i \in \bar{N}_n$,$t \in \bar{N}_i$,$q \in \bar{N}_i$。　证毕

注 3　引理 4 是文献[2] 中的引理 4 的推广。

引理 5　设 X_i 为可分局部紧致度量空间,$i \in \bar{N}_n$,若 $\{p_i\} \subset \mathbf{N}$ 为递增序列,对 X_i 的任非空开集族 $\{A_{j1}^{(i)}, A_{j2}^{(i)}, \cdots, A_{ji}^{(i)}\}$ 和 $\{B_{l1}^{(i)}, B_{l2}^{(i)}, \cdots, B_{li}^{(i)}\}$ $(i \in \bar{N}_n)$,及对 $\forall K \in \mathbf{N}$,存在$p \in S \cap (K, +\infty)$,使得$f_i^p(A_{jt}^{(i)}) \cap B_{lq}^{(i)} \neq \varnothing$,其中 $i \in \bar{N}_n$,$t,q \in \bar{N}_i$,则有相对于 $\{p_i\}$ 的 $\tilde{X}$ 的 c- 稠密 F_σ 混沌子集。

证明　因空间的可分性和局部紧致性均有有限可积性,故$\tilde{X}$是可分局部紧致度量空间,记$C = \{C_1 \times \cdots \times C_n \mid C_i \in \{A_{j1}^{(i)}, \cdots, A_{ji}^{(i)}\}, i \in \bar{N}_n\}$,$D = \{D_1 \times \cdots \times D_n \mid D_i \in \{B_{l1}^{(i)}, \cdots, B_{li}^{(i)}\}, i \in \bar{N}_n\}$,则 C 和 D 均为 $\tilde{X}$ 的非空开集族。又

$$\bar{f}^p(C_1 \times \cdots \times C_n) \cap (D_1 \times \cdots \times D_n) = (f_1^p(C_1)) \times \cdots \times (f_n^p(C_n)) \cap (D_1 \times \cdots \times D_n) =$$
$$(f_1^p(C_1) \cap D_1) \times \cdots \times (f_n^p(C_n) \cap D_n) \neq \varnothing, \forall C_1 \times \cdots \times C_n \in C, \forall D_1 \times \cdots \times D_n \in D$$

由文献[2] 中的引理 5 知,有相对于 $\{p_i\}$ 的 $\tilde{X}$ 的 c- 稠密 F_σ 混沌子集。　证毕

注 4　引理 5 是文献[2] 中的引理 5 的推广。

引理6　设X_i为拓扑空间,$i \in \bar{N}_n$,若对$\mathbf{N}$的任何上密度为的子集S,有相对于S的$\tilde{X}$的稠密的混沌子集,则 $\bar{f}$ 是拓扑遍历的。

证明　若$\bar{f}$ 不是拓扑遍历的,则有 X_j 的非空开集 $U_j, V_j, j \in \bar{N}_n$,使

$$\lim_{m \to \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \theta[\bar{f}^i(V_1 \times \cdots \times V_n) \cap (U_1 \times \cdots \times U_n)] = 0$$

由文献[5] 中定理 1.20 知,存在 $\mathbf{N}$ 的上密度为 0 的子集 J,使得

$$\lim_{n \notin J, n \to \infty} \theta[\bar{f}^i(V_1 \times \cdots \times V_n) \cap (U_1 \times \cdots \times U_n)] = 0$$

即有 $N_1 \in N$,使得当$n \notin J$且$n > N_1$时,$f_i^n(V_i) \cap U_i = \varnothing$,$i = 1,2,\cdots,n$至少有一个成立,令$S = ((N_1, +\infty) \cap N) - J$,则$S$ 是 $\mathbf{N}$ 的上密度为 1 的子集,从而有相对于 S 的 $\tilde{X}$ 的稠密的混沌子集 C,任取$(x_i, \cdots, x_n) \in C \cap (V_1 \times \cdots \times V_n)$和$(y_1, \cdots, y_n) \in C \cap (U_1 \times \cdots \times U_n)$,取$A = \{(x_1, \cdots, x_n)\}$,定义 $F: A \to \prod_{i=1}^n X_i$ 为 $F(x_j) = y_j$, $j \in \bar{N}_n$,即 $F(x_1, \cdots, x_n) = (y_1, \cdots, y_n)$,则 S 的递增无限子序列 $\{q_i\}$,使$\lim_{i \to \infty} \bar{f}^{q_i}(x_1, \cdots, x_n) = (y_1, \cdots, y_n)$,故

$$f_j^{q_i}(V_j) \cap U_j \neq \varnothing (\text{当 } q_i \text{ 足够大时}), j \in \bar{N}_n$$

这与上面相矛盾。　证毕

注 5　引理 6 是文献[2] 中引理 3 的推广。

定理 3　设 X_i 是至少两点的可分局部紧致度量空间,f_i 为满射,$i \in \bar{N}_n$,则$\bar{f}$ 是拓扑遍历的$\Leftrightarrow$对$\mathbf{N}$的任上密度为 1 的子集 S,有相对于 S 的 $\tilde{X}$ 的 c- 稠密 F_σ 混沌子集。

定理 3 的证明可由引理 4、引理 5、引理 6 得到。

注 6　定理 3 是文献[2] 中的定理 3 的推广。

定理 4　若 $\bar{f}$ 是拓扑遍历的,则$\tilde{f}_1 \times \cdots \times \tilde{f}_n: M(X_1) \times \cdots \times M(X_n) \to M(X_1) \times M(X_2) \times \cdots \times M(X_n)$ 是拓扑遍历的。

证明　令 $m \in \mathbf{N}$,$M_m(X_j) = \{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \delta_{x_i} \mid x_i \in X_j, i = 1,2,\cdots,m\}$,$j \in \bar{N}_n$,则 $M_m(X_j)$ 是 $M(X_j)$ 的闭子集,且$\overline{\bigcup_{i=1}^{+\infty} M_i(X_j)} = M(X_j)$,$j \in \bar{N}_n$,设 $U_1^{(j)}, U_2^{(j)}$ 为 $M(X_j)$ 的任非空开集,则对某个充分大的m,存在 $x_{t,j}^i \in X_j$,$j \in \bar{N}_n$,$t \in \bar{N}_m$,$i = 1,2$,使得$\frac{1}{m} \sum_{t=1}^m \delta_{x_{t,j}^i} \in M_m(X_j) \cap U_i^{(j)}$,其中 $i = 1,2$,$j \in \bar{N}_n$。取 $x_{t,j}^i$ 的邻域 $U_{t,j}^i$,使得 $\forall z_{t,j}^i \in U_{t,j}^i$,$\frac{1}{m} \sum_{t=1}^m \delta_{z_{t,j}^i} \in U_i^{(j)}$,$j \in \bar{N}_n$,$t \in \bar{N}_m$,$i = 1,2$,因$\bar{f}$是拓扑遍历的,从引理 4 的证明知 $S = \bigcap_{t=1}^m \bigcap_{j=1}^n K(U_{t,j}^1, U_{t,j}^2)$ 是 $\mathbf{N}$ 的正上密度子集,则对 $\forall l \in S$,可取 $z_{t,j}^1 \in U_{t,j}^1 \cap f_j^{-l}(U_{t,j}^2)$,故

$$u_{1,j}=\frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m}\delta_{z_{t,j}^{1}}\in U_1^{(j)},\tilde f_j^{\,m}u_{1,j}=\frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m}\delta_{f_j^m(z_{t,j}^1)}\in U_2^{(j)},j\in\bar N_n,$$

$$(\tilde f_1\times\cdots\times\tilde f_n)^m(U_1^{(1)}\times\cdots\times U_1^{(n)})\cap(U_2^{(1)}\times\cdots\times U_2^{(n)})\neq\varnothing$$

即$\tilde f_1\times\cdots\times\tilde f_n$是拓扑遍历的。 证毕

注7 定理4是文献[2]的定理5的推广。

定理5 设$(X_\infty^{(j)},f_\infty^{(j)})$为由$\{X_i^{(j)},g_i^{(j)},f_i^{(j)}\}_{i=1}^{\infty}$生成的逆极限系统,$j\in\bar N_n$,则$f_\infty^{(1)}\times f_\infty^{(2)}\times\cdots\times f_\infty^{(n)}$为拓扑遍历的$\Leftrightarrow\prod_{j=1}^{n}f_i^{(j)}(i=1,2,\cdots)$均为拓扑遍历的。

证明 充分性。显然有$f_\infty^{(1)}\times\cdots\times f_\infty^{(n)}(y^{(1)},\cdots,y^{(n)})=(f_\infty^{(1)}(y^{(1)}),\cdots,f_\infty^{(n)}(y^{(n)}))=$

$$((f_1^{(1)}(y_1^{(1)}),f_2^{(1)}(y_2^{(1)}),\cdots),(f_1^{(2)}(y_1^{(2)},f_2^{(2)}(y_2^{(2)}),\cdots),\cdots)$$

其中$y^{(j)}=(y_1^{(j)},y_2^{(j)},\cdots),j\in\bar N_n$,又

$$(g_i^{(1)}\times\cdots\times g_i^{(n)})\circ(f_{i+1}^{(1)}\times\cdots\times f_{i+1}^{(n)})=(g_i^{(1)}\circ f_{i+1}^{(1)})\times\cdots\times(g_{i+1}^{(n)}\circ f_{i+1}^{(n)})=$$
$$(f_i^{(1)}\circ g_i^{(1)})\times\cdots\times(f_i^{(n)}\circ g_i^{(n)})=(f_i^{(1)}\times\cdots\times f_i^{(n)})\circ(g_i^{(1)}\times\cdots\times g_i^{(n)}),i=1,2,\cdots$$

故$\{\prod_{j=1}^{n}X_i^{(j)},g_i^{(1)}\times\cdots\times g_i^{(n)},f_i^{(1)}\times\cdots\times f_i^{(n)}\}_{i=1}^{\infty}$生成一个逆极限系统,记为$(\tilde X_\infty,\tilde f_\infty)$,故

$$\tilde f(x^{(1)},x^{(2)},\cdots)=(f_1^{(1)}\times\cdots\times f_1^{(n)}(x^{(1)}),f_2^{(1)}\times\cdots\times f_2^{(n)}(x^{(2)}),\cdots)=$$
$$((f_1^{(1)}(x_1^{(1)}),f_1^{(2)}(x_2^{(1)}),\cdots,f_1^{(n)}(x_n^{(1)})),(f_2^{(1)}(x_1^{(2)}),f_2^{(2)}(x_2^{(2)}),\cdots,f_2^{(n)}(x_n^{(2)})),\cdots)$$

其中$x^{(j)}=(x_1^{(j)},\cdots,x_n^{(j)}),j\in\bar N_n$,易见$(\tilde X_\infty,\tilde f_\infty)$与$(\prod_{j=1}^{n}X_\infty^{(j)},f_\infty^{(1)}\times\cdots\times f_\infty^{(n)})$是拓扑共轭的,由文献[3]中的定理4(或文献[4]中的引理5.2)知$\tilde f_\infty$是拓扑遍历的,因拓扑遍历性是拓扑共轭不变性,故$f_\infty^{(1)}\times\cdots\times f_\infty^{(n)}$是拓扑遍历的。

同理可证其必要性也成立。 证毕

注8 定理5是文献[3]中的定理4和文献[4]中的引理5.2的推广。

引理7[2] 设f为满射,若f是拓扑可迁的,p为f的稳定点,则$\overline{\{f^i(p)\}_{i=0}^{+\infty}}=X$。

引理8[2] 设f为满射,若f是极小的且存在稳定点,则f是点态稳定的同胚。

引理9 设A_i是Syndetic集且整数$0\in A_i,i=1,2$,则A_1+A_2也是Syndetic集,其中$A_1+A_2=\{y\mid y=n_1+n_2,n_i\in A_i,i=1,2\}$。

证明 设$Z=K_i+A_i$,其中K_i为有限集,$i=1,2$。因为$K_i\subset K_1\cup K_2,A_i\subset A_1+A_2,i=1,2$。故$(K_1\cup K_2)+(A_1+A_2)\supset K_1+A_1\supset Z$,而$(K_1\cup K_2)+(A_1+A_2)\subset Z$,故$Z=(K_1\cup K_2)+(A_1+A_2)$,又$K_1\cup K_2$是有限集,因此$A_1+A_2$是Syndetic集。 证毕

定理6 设f_i是满射,$i\in\bar N_n$,若$\bar f$是拓扑可迁的,则f_i是拓扑遍历的且f_i不是敏感依赖的$(i\in\bar N_n)\Leftrightarrow\bar f$是一致几乎周期的极小同胚。

证明 必要性。对$j\in\bar N_n$,设$\mathbf Z_+$是自然数集,若f_j不敏感依赖初始条件,则有稳定点$p_j\in X_j$,因f_j是拓扑遍历的,由引理7知$\overline{\{f_j^i(p_j)\}_{i=0}^{+\infty}}=X_j$,若$U_j$为$X_j$的非空开集,则$K(U_j,U_j)$为正上密度集。再由文献[7]中的命题3.16知$B(U_j)=\{l-m\mid l,m\in K(U_j,U_j)\}$是Syndetic集。

对$\forall\varepsilon>0$,必有$\delta_j>(\delta_j<\frac{\varepsilon}{12})$,使当$d_j(p_j,y_j)<\delta_j,y_j\in X_j$时,有$d_j(f_j^{\,t}(p_j),f_j^{\,t}(y_j))<\frac{\varepsilon}{12},t\in\mathbf Z_+$。取$\delta=\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\{\delta_j\}$,令$U_j=\{x_j\in X_j\mid d_j(x_j,p_j)<\delta\}$,任取$l_j^1,l_j^2\in K(U_j,U_j)$,则

$$y_j^i\in U_j,f_j^{\,l_j^i}(y_j^i)\in U_j,i=1,2,d_j(f_j^{\,t+l_j^i}(y_j^i),f_j^{\,t}(p_j))<\frac{\varepsilon}{12}$$

$$d_j(f_j^{\,l_j^i}(y_j^i),f_j^{\,t+l_j^i}(p_j))<\frac{\varepsilon}{12},t\in\mathbf Z_+,d_j(f_j^{\,t}(p_j),f_j^{\,t+l_j^i}(p_j))<\frac{\varepsilon}{6},i=1,2$$

因f_j是满射,故对任意$x_j\in X_j$,有$x'_j\in X_j$,使得$f_j^{\,l_j^2}(x'_j)=x_j$。由f_j的连续性知,有$\eta_j>0\left(\eta_j<\frac{\varepsilon}{6}\right)$,使得当

$d_j(y_j,x'_j)<\eta_j$ 时,有 $d_j(f_j^{l_j^i}(y_j),f_j^{l_j^i}(x'_j))<\frac{\varepsilon}{6}$,$i=1,2$。由 $\overline{\{f_j^i(p_j)\}_{i=0}^{+\infty}}=X_j$ 必有 $m_j\in\mathbf{Z}_+$,使 $d_j(f_j^{m_j}(p_j),x'_j)<\eta_j$,从而 $d_j(f_j^{m_j+l_j^i}(p_j),f_j^{l_j^i}(x'_j))<\frac{\varepsilon}{6}$,$d_j(x'_j,f_j^{l_j^i}(x'_j))<$

$$d_j(x'_j,f_j^{m_j}(p_j))+d_j(f_j^{m_j}(p_j),f_j^{m_j+l_j^i}(p_j))+d_j(f_j^{m_j+l_j^i}(p_j),f_j^{l_j^i}(x'_j))<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$d_j(f_j^{l_j^1-l_j^2}(x_j),x_j)=d_j(f_j^{l_j^1}(x'_j),f_j^{l_j^2}(x'_j))\leqslant d_j(f_j^{l_j^1}(x'_j),x'_j)+d_j(x'_j,f_j^{l_j^2}(x'_j))<\varepsilon$$

即对 $\forall l_j\in B(U_j)$,$\forall x_j\in X_j$,有 $d_j(f_j^{l_j}(x),x)<\varepsilon$。取 $X_1\times\cdots\times X_n$ 上的度量 d 为

$$d(x,y)=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\{d_j(x_j,y_j)\},x=(x_1,\cdots,x_n),y=(y_1,\cdots,y_n)\in X_1\times\cdots\times X_n$$

记 $p=(p_1,\cdots,p_n)$,则当 $d(p,y)<\delta$ 时,对 $\forall l\in B(U_1)+\cdots+B(U_n)$,$\forall x_j\in X_j$,$j\in\bar N_n$,有 $d_j(f_j^{\,l}(x_j),x_j)<\varepsilon$,故 $d(\bar f^l(x),x)<\varepsilon$,特别地,当 $x=p$ 时,表明 p 为 $\bar f$ 的几乎周期点。因 p 为 $\bar f$ 的稳定点,由引理 7 知 $\bar f$ 是极小的,又由引理 8 知,$\bar f$ 是同胚,根据引理 9,$\bar f$ 是一致几乎周期的极小同胚。

充分性。若 $\bar f$ 是一致几乎周期的极小同胚,则 $\bar f$ 是等度连续的,故 f_j 是等度连续的,因而 X_j 的每点均是稳定点,$j\in\bar N_n$。因 $\bar f$ 是极小的,故对 X_j 的任非空开集 U_j,$j\in\bar N_n$,有

$$\tilde X=\bigcup_{i=-\infty}^{+\infty}\bar f^{-i}(U_1\times\cdots\times U_n)=\bigcup_{i=-\infty}^{+\infty}(f_1^{-i}(U_1)\times\cdots\times f_n^{-i}(U_n))$$

因此对 f_j 不变的任一概率测度 μ_j,$j\in\bar N_n$,记 $\bar\mu=\mu_1\times\cdots\times\mu_n$,则 $\bar\mu$ 是对 $\bar f$ 不变的概率测度,从而 $\bar\mu(U_1\times\cdots\times U_n)>0$,故 $\mu_j(U_j)>0$,$j\in\bar N_n$,于是必有 f_j 不变的任一概率测度 m_j,使其支撑为 X_j,从而 f_j 是拓扑遍历的,$j\in\bar N_n$。　证毕

引理 10　$P(\bar f)=P(f_1)\times P(f_2)\times\cdots\times P(f_n)$。

引理 11　$\bar f$ 是拓扑混合的 $\Leftrightarrow f_i$ 是拓扑混合的,$i\in\bar N_n$。

定理 7　若 X_i 是连通的,f_i 有 POTP,且 $\overline{P(f_i)}=X_i$,$i\in\bar N_n$,则 $\bar f$ 是拓扑遍历的。

证明　因拓扑混合蕴涵拓扑遍历,由文献[10]中的定理 3 及本文引理 2、引理 10 和文献[6]中的性质 $\overline{A\times B}=\bar A\times\bar B$ 即可证得。　证毕

引理 12[9]　$CR(f_1\times f_2\times\cdots\times f_n)=CR(f_1)\times CR(f_2)\times\cdots\times CR(f_n)$。

定理 8　若 f_i 有 POTP,X_i 是连通的,$i\in\bar N_n$,则 $\bar f$ 是拓扑遍历的 $\Leftrightarrow$ 下列 27 个条件之一成立:1) $\bar f$ 具有满测度中心,即 $M(\bar f)=\tilde X$;2) f_i 具有满测度中心,即 $M(f_i)=X_i$,$i\in\bar N_n$;3) 存在 $\bar f$ 的不变概率测度 $\mu_{\bar f}$,使得其支撑为 $Supp\mu_{\bar f}=\tilde X$;4) 存在 f_i 的不变概率测度 μ_{f_i},使得其支撑 $Supp\mu_{f_i}=X_i$,$i\in\bar N_n$;5) $CR(\bar f)=\tilde X$;6) $CR(f_i)=X_i$,$i\in\bar N_n$;7) f_i 是拓扑混合的,$i\in\bar N_n$;8) $\bar f$ 是拓扑混合的;9) $\bar f$ 有一致正熵;10) f_i 有一致正熵,$i\in\bar N_n$;11) f_i 有完全正熵,$i\in\bar N_n$;12) $\bar f$ 有完全正熵;13) $\bar f$ 是拓扑弱混合的;14) f_i 是拓扑弱混合的,$i\in\bar N_n$;15) $\bar f$ 是链混合的;16) f_i 是链混合的,$i\in\bar N_n$;17) $\bar f$ 是拓扑可迁的;18) f_i 是拓扑可迁的,$i\in\bar N_n$;19) $\bar f$ 是链可迁的;20) f_i 是链可迁的,$i\in\bar N_n$;21) $\bar f$ 有性质 P;22) f_i 有性质 P,$i\in\bar N_n$;23) $\bar f$ 是 Ruelle-Takens 意义下混沌的;24) f_i 是 Ruelle-Takens 意义下混沌的,$i\in\bar N_n$;25) $\bar f$ 是链可迁的且对于 $\forall\delta>0$,存在两个周期互质的周期 δ 链;26) f_i 是链可迁的且对于 $\forall\delta>0$,存在两个周期互质的周期 δ 链,$i\in\bar N_n$;27) f_i 是拓扑遍历的,$i\in\bar N_n$。

证明　因拓扑混合蕴涵拓扑遍历、拓扑遍历蕴涵拓扑可迁,故由文献[8]中的定理 1.4 及文献[11]中的定理 1.1、本文引理 2、引理 11、引理 3、引理 13 即可证得。　证毕

推论 3　若 $\overline{P(f_i)}=X_i$,$i\in\bar N_n$,则下列 5 条是等价的:1) $\forall l,m\in\mathbf{N}$,$(\bar f^{(m)})^l$ 拓扑双重遍历;2) $\bar f^{(m)}$ 拓扑双重遍历;3) $\bar f^{(m)}$ 全遍历;4) $\bar f^{(m)}$ 拓扑弱混合;5) $\bar f^{(m)}$ 全可迁。

证明　由文献[3]的系 3 及本文引理 10 和文献[6]中的性质 $\overline{A\times B}=\bar A\times\bar B$ 即可证得。　证毕

注 9　推论 3 是文献[3]中的系 3 的推广。

推论 4　设 f_i 为连通的紧致度量空间 X_i 上的连续满射且有 POTP，若 f_i 有一致正熵，$i \in \bar{N}_n$，则 $\bar{f}$ 是拓扑遍历的。

其证明可由文献[2]中定理 2 及本文引理 2、定理 8 得到。

注 10　推论 4 是文献[2]中的定理 2 的进一步加强和推广。

引理 13　若 f 是拓扑可迁的且 $\overline{P(f)} = X$，则 f 是拓扑遍历的。

定理 9　设 f_i 是拓扑可迁的，$\overline{P(f_i)} = X_i$，$i \in \bar{N}_n$，则 $\bar{f}$ 是拓扑遍历的 $\Leftrightarrow \bar{f}$ 是拓扑可迁的。

证明　若 $\bar{f}$ 是拓扑可迁的，由引理 10 知 $\overline{P(\bar{f})} = \tilde{X}$，从而 $\bar{f}$ 是拓扑遍历的。反之，若 $\bar{f}$ 是拓扑遍历的，则它显然是拓扑可迁的。　证毕

推论 5　若 f 是弱混合的且 $\overline{P(f)} = X$，则 $\bar{f}$ 是拓扑遍历的。

证明　由引理 13 和文献[13]的引理 1.3 即可推得。　证毕

致谢：作者衷心感谢左再思教授、沈文淮教授和代雄平教授的有益建议！

参考文献：

[1] Akin E. The general topology of dynamical systems (graduate studies in mathematics) [M]. Providence: Amer Math Soc, 1993.
[2] Yang R S. Topological ergodic maps[J]. Acta Math Sinica, 2001, 44(6): 1063-1086.
[3] Yang R S. Topological ergodicity and topological double ergodicity[J]. Acta Math Sinica, 2003, 46(3): 555-560.
[4] Wang H Y, Xiong J C. Some remarks on topologically ergodic maps[J]. Acta Math Sinica, 2004, 47(5): 859-866.
[5] Walters P. An introduction to ergodic theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1982.
[6] 熊金城. 点集拓扑讲义[M]. 第二版. 北京: 高等教育出版社, 1997.
[7] Furstenbarg H. Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory[M]. Princeton: Princeton University Press, 1981.
[8] 杨润生. 伪轨跟踪性质与不变概率测度[J]. 数学年刊, 1998, 19A(1): 33-36.
[9] 严珍珍, 杨润生. 树上乘积自映射周期点集的局部度量稳定性[J]. 系统科学与数学, 2004, 24(1): 35-40.
[10] 杨润生. 伪轨跟踪与混沌[J]. 数学学报, 1996, 39(3): 382-386.
[11] 杨润生. 伪轨跟踪与一致正熵[J]. 数学年刊, 1996, 17A(4): 411-414.
[12] 黎日松. 关于 $f_1 \times f_2$ 及 f^n 的等度连续性与伪轨跟踪性质[J]. 湛江海洋大学学报, 2005, 25(6): 76-78.
[13] 廖公夫, 王立冬. 一类集值映射的传递性、混合性与混沌[J]. 中国科学(A 辑), 2005, 35(10): 1155-1161.

Topological Ergodicity of the Product System $(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n, f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_n)$

LI Ri-song

(School of Science, Guangdong Ocean University, Zhanjiang Guangdong 524025, China)

Abstract: We will denote by $\bar{N}_n$ the set $\{1, 2, \cdots, n\}$ and use $\bar{f}$ to denote the map $f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_n$. We will also denote by $\tilde{X}$ the product $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$. In this paper, two necessary and sufficient conditions on $\bar{f}$ which is topologically ergodic are given. Moreover, if f_i has POTP and X_i is a connected space, $i \in \bar{N}_n$, then 27 equivalent conditions for $\bar{f}$ with topological ergodicity are also given. In addition, some sufficient conditions and necessary conditions on $\bar{f}$ which is topologically ergodic are discussed. For each $i \in \bar{N}_n$, let $f_i \in C^0(X_i, X_i)$ and X_i be a compact metric space. The following statements are proved: ①If $\bar{f}$ is topologically ergodic, then $\tilde{f}_1 \times \cdots \times \tilde{f}_n: M(X_1) \times \cdots \times M(X_n) \to M(X_1) \times \cdots \times M(X_n)$ is topologically ergodic. ②Let $(X_\infty^{(j)}, f_\infty^{(j)})$ be the inverse limit system generated by $\{X_i^{(j)}, g_i^{(j)}, f_i^{(j)}\}_{i=1}^{\infty}$, $j \in \bar{N}_n$, then $f_\infty^{(1)} \times f_\infty^{(2)} \times \cdots \times f_\infty^{(n)}$ is topologically ergodic if and only if $\prod_{j=1}^{n} f_i^{(j)}$ $(i = 1, 2, \cdots)$ is too. ③If there exists $j \in \bar{N}_n$ such that for each $t \in \bar{N}_n$ and $t \neq j$, f_t is topological nixing, then $\bar{f}$ is topologically ergodic if and only if so does f_j.

Key words: topologically ergodic; chaintransitive; chaos; probability measure; inverse limit system

(责任编辑　黄　颖)