$M/M/C$ 排队模型在理发服务行业中的应用*

叶 宗 文
（四川理工学院 理学院，四川 自贡 643000）

摘要：将随机服务系统中 $M/M/C$ 排队模型应用到理发服务行业。笔者对重庆南岸区某理发店进行了现场调查，以 10 min 为一个调查单位调查顾客到达数，统计了 72 个调查单位的数据，又随机调查了为 113 名顾客服务的时间，得到了单位时间内到达的顾客数 n 和为每位顾客服务的时间 t，然后利用 χ^2 拟合检验，得到单位时间的顾客到达数服从 Possion 分布，服务时间服从负指数分布，从而建立起 $M/M/C$ 等待制 FCFS 排队模型，通过计算和分析 $M/M/C$ 排队模型的主要指标，得到该理发店宜聘用的最佳理发师数。本文对随机服务系统中的 $M/M/C$ 排队模型在各行业中的应用具有示范意义。

关键词：排队系统；模型；应用
中图分类号：O226 文献标识码：A 文章编号：1672-6693（2009）02-0075-04

排队论主要对由于受随机因素的影响而出现排队的系统进行研究，它广泛应用于通信、交通与运输、生产与服务、公用服务事业以及管理运筹等一切服务系统。在具体应用方面，把排队理论直接应用到实际生活方面也有不少的文献，如文献[1-3]等。另外，排队论和其他学科知识结合起来也有不少应用，如文献[4-5]等。

笔者从现实生活中理发服务行业取得数据资料，基于排队系统基本知识[6-7]和 $M/M/C$ 排队模型基本理论和统计学有关知识，通过分析研究，得出一些结论，为实际问题的解决提供参考资料，从而拓宽了该模型的应用领域，并对其他模型的系统应用也有一定的启示作用。

1 $M/M/C$ 排队模型

定义 若顾客的到达间隔服从参数为 λ 的负指数分布（从而到达的人数服从泊松分布），每位顾客的服务时间服从参数为 μ 的负指数分布，且顾客的到达与服务时间独立，系统有 C 个服务台，称这样的排队模型为 $M/M/C$ 排队模型[6]。

$M/M/C$ 排队模型也可对应分为等待型、损失型、混合型 3 种。下面简要介绍等待型的 $M/M/C$ 排队模型（$C>1$）有关知识。

假定顾客到达服从参数为 λ 的泊松分布，每个顾客所需的服务时间服从参数为 μ 的指数分布，顾客到达后若有空闲的服务台就按到达的先后次序接受服务，若所有的服务台均被占用时，顾客则排成一队等候。令 $N(t)=i$ 表示时刻 t 系统中恰有 i 位顾客，系统的状态集合为 $\{0,1,2,\cdots\}$。可证 $\{N(t),t>0\}$ 为生灭过程[7]，而且有

$$\lambda_n=\lambda,n=1,2,\cdots$$

$$\mu_n=\begin{cases}n\mu,n=1,2,\cdots\\ C\mu,n=C+1,C+2,\cdots\end{cases}$$

由此可见，服务台增加了，服务效率提高了。

定理 1[6] 队长 $N(t)$ 的平稳分布。令 $P_n(t)\hat{=}P\{N(t)=n\}$，$P_n\hat{=}\lim\limits_{t\to\infty}P_n(t)$，$n=1,2,\cdots$，则可求得系统的平稳分布为

当 $1\leqslant n<C$ 时，$P_n=\dfrac{\rho^n}{n!}P_0$，当 $n\geqslant C$ 时，

$$P_n=\frac{\rho^n}{C!C^{n-C}}P_0,P_0=\left[\sum_{n=0}^{C-1}\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^C}{C!(1-\frac{\rho}{C})}\right]^{-1}$$

定理 2[6] 系统的主要指标

服务系统中的平均排队长度：

$$L_q=\sum_{i=C}^{\infty}(i-C)P_i=\frac{\rho^{C+1}P_0}{(C-1)!(C-\rho)^2}$$

顾客在系统中排队的平均等待时间：

$$W_q=\frac{L_q}{\lambda}=\frac{\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^C}{(C-1)!(C\mu-\lambda)^2}P_0$$

顾客在系统中的平均逗留时间：

* 收稿日期：2008-08-10 修回日期：2009-01-20
作者简介：叶宗文，男，助教，硕士，研究方向为随机系统应用。

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^C P_0}{(C-1)!(C\mu-\lambda)^2} + \frac{1}{\mu}$$

系统内的顾客平均人数:

$$L_s = \lambda W_s = \frac{\rho^{C+1}}{(C-1)!(C-\rho)^2}P_0 + \rho$$

系统满员概率:

$$P(n=C) = \frac{\rho^C}{C!}P_0$$

2 $M/M/C$ 排队模型在理发服务行业中的应用

在理发行业中,到理发店去洗头、剪发、烫发、染发的人可看作是需要接受服务的顾客,理发店中的设备或理发师傅可看成服务台,顾客到达理发店是随机的,师傅为顾客服务的时间也是随机的,这就构成了排队系统。理发店要多赚钱与很多因素有关,而理发店自身的配置是否合理就是一个很重要的因素,现举例探讨如何用排队论知识优化理发店的服务台的配置。

2.1 调查收集数据

重庆南岸黄桷桠'顶尖发艺"理发店拥有3名理发师傅(即有3个服务台),在服务中,采用单队多服务台形式,为每位顾客服务时间是随机的,假定服务时间的分布平稳,利用排队论知识评价和优化该理发店的配置。

调查内容是单位时间内到达的顾客数 n 和为每位顾客服务的时间 t,方式为:以10 min为一个调查单位,随机统计了72个调查单位的数据,记录整理见表1。

表1 顾客到达情况相关数据

顾客数 n/人	出现频数 $f(n)$/次
0	24
1	33
2	10
3	4
4	1
5	0
合计	72

表2 为顾客服务时间相关数据

服务时间 t/min	出现频数 $f(n)$/次
0 ~ 15	55
15 ~ 30	36
30 ~ 45	17
45 ~ 60	4
60 ~ 75	1
75以上	0
合计	113

服务时间为从为顾客开始服务起到顾客付款离去时止,随机调查了113名。顾客服务的时间,记录整理见表2(数据为笔者到理发店调查所得)。

2.2 分布拟合检验

2.2.1 单位时间内到达的顾客数服从分布的拟合检验

为了检验单位时间内顾客到达人数是否服从泊松分布,根据表1的数据,利用 χ^2 拟合检验[8-10],具体计算见表3。

这里,单位时间顾客平均到达数 $\lambda = \frac{\sum nf_n}{72} = 0.0958$;概率 $P_i = \frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}$;理论频数 $\bar{f}_n = 72P_n$;求得 χ^2 值为 $\chi^2 = \sum_{i=0}^{4}\frac{(f_n-\bar{f}_n)^2}{\bar{f}_n} = 2.6556$。

取 $\alpha = 0.05$,这里 $k=4$,$r=1$,查表 $\chi^2_{0.05,2} = 5.991$,由于 $\chi^2 < \chi^2_{0.05,2}$,故认为单位时间的顾客到达数服从参数 $\lambda = 0.0958$ 的Possion分布。

表3 χ^2 拟合检验顾客数是否服从泊松分布

顾客数 n/人	实际频数 f_n	概率 p_n	理论频数 $\bar{f}_n$	$\frac{(f_n-\bar{f}_n)^2}{\bar{f}_n}$
0	24	0.3835	27.61	0.4731
1	33	0.3676	26.46	1.6144
2	10	0.1761	12.68	0.5666
3以上	5	0.0698	4 398	0.0015
合计	72		$\chi^2 = 2.6556$	

2.2.2 服务时间服从分布的检验

为了检验服务时间是否服从负指数分布,根据表2的数据,用 χ^2 拟合检验,结果见表4。

表4 χ^2 拟合检验服务时间是否服从负指数分布

服务时间 t/min	实际频数 f_t/次	概率 p_t	理论频数 $\bar{f}_t$/次	$\frac{(f_t-\bar{f}_t)^2}{\bar{f}_t}$
0 ~ 15	55	0.5438	61.44	0.6759
0 ~ 15	36	0.2481	28.03	2.2638
0 ~ 15	17	0.1132	12.29	1.3856
0 ~ 15	5	0.0752	8.50	1.4398
合计	113		$\chi^2 = 5.765$	

这里每次理发平均服务时间 $t = \frac{1}{\mu} = \frac{\sum t'_i f_t}{113}$,式中 t'_i 为服务时间各组组中值;概率 $P_i = P(x_i < \xi < x_{i+1}) = e^{-\mu x_{i+1}} - e^{-\mu x_i}$,理论频数 $\bar{f}_i = 113P_i$,求得 χ^2 值为 $\chi^2 = \sum_{i=1}^{4}\frac{(f_i-\bar{f}_i)^2}{\bar{f}_i} = 5.765$。

取 $\alpha = 0.05$,这里 $k=4$,$r=1$,查表得 $\chi^2_{0.05,2} = 5.99$,由于 $\chi^2 < \chi^2_{0.05,2}$,故认为服务时间服从参数 $\mu = 0.0523$ 的负指数分布。

2.3 系统主要指标

实际生活中,理发行业一般不会是独家经营,所以顾客不会在一家理发店等待很久,但对理发店来说,是容许等待的,因此由以上检验知道,该理发店形成 $M/M/C$ 等待制 FCFS 排队模型,应用前面定理1和定理2有

$$\lambda = 0.0958\ \text{人}/\text{min}, \mu = 0.0523\ \text{人}/\text{min}$$

$$C = 3, \rho = \frac{\lambda}{\mu} = 1.8318$$

服务强度

$$\rho' = \frac{\lambda}{C\mu} = \frac{\rho}{C} = \frac{0.0958}{3 \times 0.0523} = 0.6106,$$

系统空闲概率

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{C-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^C}{C!(1-\frac{P}{C})}\right]^{-1} = 0.1401$$

等待理发的平均顾客数

$$L_q = \sum_{i=C}^{\infty}(i-C)P_i = \frac{\rho^{C+1}P_0}{(C-1)!(C-\rho)^2} = 0.5776$$

店中平均逗留顾客数

$$L_s = \lambda W = \frac{\rho^{C+1}}{(C-1)!(C-\rho)^2}P_0 + \rho = 2.4094$$

顾客平均等待时间/min

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^C}{(C-1)!(C\mu-\lambda)^2}P_0 = 6.0279$$

顾客平均逗留时间/min

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^C P_0}{(C-1)!(C\mu-\lambda)^2} + \frac{1}{\mu} = 25.150$$

店中满员概率

$$P(n=C) = \frac{\rho^C}{C!}P_0 = 0.1435$$

顾客到达必须等待的概率

$$P(n>C) = \frac{\rho^n}{C!C^{n-C}}P_0 = 0.5119$$

3 结论

根据上述计算结果可知,该理发店3位师傅平均忙着的概率约为61%,都闲着(系统空闲)的概率约为14%,顾客平均等待时间约为6 min,在店中平均逗留约为25 min,大约有51%的顾客到达后需要等待,说明理发店比较忙碌。

下面论证一下这种状态是否是最佳状态。现假设该店拥有师傅分别为2、4、5名师傅(服务台),算得各种指标见表5。

表5　各种指标数据

台数	ρ'	P_0	L_q	L_s	W_q	W_s	$P(n=C)$	$P(n>C)$
2	0.9159	0.0439	9.5327	11.364	99.5060	118.630	0.0737	0.8757
3	0.6106	0.1401	0.5776	2.4094	6.0297	25.1502	0.1435	0.3684
4	0.4579	0.1563	0.1142	1.9460	1.1925	20.3131	0.0733	0.1352
5	0.3663	0.1594	0.0250	1.8576	0.2609	19.3812	0.0274	0.0432

从表中可看出,随着师傅的增加,店中等待的人数、顾客等待的时间满员和需要等待的概率明显降低。而调查街区的理发店比较多且集中,各店的技术水平都较好,顾客不会在某家理发店等很久,一般是只要看见这家满员时就会到另一家,所以,要想有好的效益,理发店应多聘请师傅来降低顾客的等待时间和达到需要等待的概率,但同时,服务强度也跟着降低,师傅空闲的时间增多,如果用费用模型来优化,顾客逗留费用(损失费用)不好估计,故根据愿望模型,利用系统的运行特征来确定某个参数的最优值。从上可看出,如果店中有4个服务台时,各项指标都比较理想,等待1 min左右,到达需要等待的概率为14%,且服务强度为46%,空闲概率为15%,顾客、师傅、老板都能够接受,故该理发店应聘用4名师傅较好。

参考文献:

[1] 郑欢. 大超市顾客缴费排队系统优化分析[J]. 管理学报,2005(2):11-13.

[2] 邓小琳. 基于排队理论的最优生产线设计[J]. 运筹学与管理,2000,9(3):17-18.

[3] 陈庆宏. 排队论在生产过程时间组织中的应用[J]. 北方经贸,2003,11:15-17.

[4] 于志青. 排队论在交通工程中的应用研究[J]. 中州大学学报,2005,1(1):23-25.

[5] 胡宗. 排队论在管理决策中的应用[J]. 盐城工业专科学校学报,1995,10(3):22-25.

[6] 陆船赉. 排队论[M]. 北京:北京邮电大学出版社,1993.

[7] 孙荣恒,李建平. 排队论基础[M]. 北京:北京科技出版社,2002.

[8] 朱勇华. 应用数理统计[M]. 武汉:武汉水利电力大学出

版社,1999.

[9] 高世泽. 概率统计引论[M]. 重庆:重庆大学出版社,2000.

[10] 潘致锋,孙荣恒. 具有 Bernoulli 反馈的 Geoξ/Geo/1 排队系统[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2004,21(2):8-11.

The Application of *M/M/C* Queuing Model in the Barber Service Industries

YE Zhong-wen

(College of Mathematics and Physics, Sichuan University of Science & Engineering, Zigong Sichuan 643000, China)

Abstract: This thesis is mainly to research the application of the *M/M/C* queuing model. The theory of this model is applied to the barber service industries. The author carries on the actual statistical survey of the barber shop located in Nan'an District of Chongqing City. The author investigated the customers counts of arriving at the barber shop to 10 minutes for a survey unit and choosed 72 investigative unit data,then the author investigated 113 customers' service time. In the first step, the customer counts that arrive to the barber shop in unit time obedient distribution are carried on the fitting examination. The conclusion is that it obeys the Possion distribution($\lambda = 0.095\,8$);then the servicing time of the service system is carried on the distribution fitting examination. The conclusion is the servicing time obedient to negative exponent distribution($\mu = 0.052\,3$). In the second step, suppose the barber shop lets the customer waiting, then established is the *M/M/C* queuing model of waiting and FCFS. In the third step, according to the formula of the lining up theory the corresponding each lining up target can be calculated. These formula are the service intensity, the probability of system idle, the average waiting customer number in the system, the average stay customer number in the system, the average waiting time of the customer, the average residence time of the customer, the probability of system full strength, the probability that the customer must wait for the service when he arrives to the barber shop , and so on. Finally based on each target, the barbor shop should employ 4 barbers. This thesis can solve the matter of agriculture and industry by mathematic model. It has some example meaning to apply this model to each industry. It has also some spreading effects in application of other queuing model.

Key words: queuing model; the model of *M/M/C*; application

(责任编辑 游中胜)