运筹学与控制论

DOI :10.3969/J.ISSN.1672-6693.2010.02.001

一类非光滑规划问题的最优性条件*

赵克全，罗　杰，唐莉萍
(重庆师范大学 数学学院，重庆 400047)

摘要 :本文给出了带等式和不等式约束的非光滑 B-(p,r) 规划问题的 KKT 必要性条件，即 :若 $\bar{x}\in D$ 是(P)的最优解，$\sum_{i=1}^{m}\mu_i g_i+\sum_{j=1}^{p}v_j h_j$ 在 处是关于 η 和 b 的严格 B-(p,r) 不变凸函数，$g_i(i\in I)$，$h_j(j\in J_1)$，$-h_j(j\in J_2)$ 在 $\bar{x}$ 处正则。则存在 $\lambda>0$，$\mu\in \mathbf{R}_+^m$，$v\in\mathbf{R}^p$，使得 $\bar{x}$ 是(P)的 KKT 点。同时，也给出了该类规划问题的 KKT 充分条件，即：若 $\bar{x}\in D$ 处 KKT 条件(2) ~ (4)式，$f+\sum_{i=1}^{m}\mu_i g_i+\sum_{j=1}^{p}v_j h_j$ 在 $\bar{x}$ 处是关于 η 和 b 的 B-(p,r) 不变凸函数且 f，$g_i(i\in I)$，$h_j(j\in J_1)$，$-h_j(j\in J_2)$ 在 $\bar{x}$ 处正则，那么 $\bar{x}$ 是(P)的最优解。

关键词 :B-(p,r)不变凸性 ;最优性条件 ;非光滑规划
中图分类号 :O221.2 ;O172.2　**文献标识码** :A　**文章编号** :1672-6693(2010)02-0001-03

近年来，许多学者对非光滑广义凸性及在数学规划与最优化理论中的应用进行了大量的研究。文献[1]中，Hanson 介绍了实值不变凸函数和预不变凸函数 ;Jabarootian 和 Zafarani 在文献[2]中介绍了非可微的不变凸函数 ;Jeyakumar 在文献[3]中定义了非光滑的广义不变凸性，研究了非光滑数学规划问题的鞍点与最优解之间的等价性和一些对偶性结果 ;Kaul 等人在文献[4]中研究了广义不变凸性下带 Lipschitz 函数的非可微的数学规划问题的最优性条件与对偶 ;Antczak 在文献[5]中利用文献[6]中介绍的 Clarke 次微分给出了 Lipschitz r-不变凸函数的定义并研究了非光滑规划问题的最优性条件和对偶 ;文献[7]中，Antczak 给出了可微 B-(p,r)不变凸函数的定义，研究了带 B-(p,r)不变凸性的可微数学规划问题的鞍点与最优解的等价性及对偶结果；作为对文献[5]中可微 B-(p,r)不变凸性的推广，文献[8]中，张莹等人定义了 Lipschitz B-(p,r)不变凸性并在 Lipschitz B-(p,r)不变凸性及一些约束规格下，建立了一类非光滑规划问题的最优性条件和对偶结果。

本文在文献[8]的基础上研究了带等式和不等式约束的非光滑 B-(p,r)规划问题的最优性条件，在无约束规格的条件下给出了该类非光滑规划问题的 KKT 必要性条件和充分性条件。

1 预备知识

定义 1[6]　设 X 是 $\mathbf{R}^n$ 中的开子集，称 $f:X\to\mathbf{R}^n$ 是 Lipschitz 的。若存在常数 $K>0$，$\forall y,z\in X$，$|f(y)-f(z)|\leqslant K\|y-z\|$。

定义 2[6]　设 $f:X\to\mathbf{R}$ 是 Lipschitz 的，$v\in\mathbf{R}^n$，定义 $f^0(x,v)$ 为 f 在 x 处沿方向 v 的广义 Clarke 导数，并记 $f^0(x,v)=\limsup\limits_{y\to x,\lambda\downarrow 0}\dfrac{f(y+\lambda v)-f(y)}{\lambda}$。

定义 3[6]　设 $f:X\to\mathbf{R}$ 是 Lipschitz 的，f 在 $x\in X$ 处的广义 Clarke 梯度定义为 $\partial f(x)$，并记为 $\partial f(x)=\{\xi\in\mathbf{R}^n:f^0(x,v)\geqslant\xi^{\mathrm{T}}v,\forall v\in\mathbf{R}^n\}$。

定义 4[6]　设 $f:X\to\mathbf{R}$ 是 Lipschitz 的，$v\in\mathbf{R}^n$，称 f 在 $x\in X$ 处正则，如果 f 在 $x\in X$ 处是方向可微的且 $f^0(x,v)=f'(x,v)$。

定义 5[8]　设 p 和 r 是给定的实数，$f:X\subseteq\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 是 Lipschitz 的，称 f 在 $u\in X$ 处关于 η 和 b(严格)Lipschitz B-(p,r)-不变凸。若存在 $\eta:X\times X\to\mathbf{R}^n$，$b:X\times X\to\mathbf{R}_+$，使得 $\forall x\in X$，$\forall\xi\in\partial^0 f(u)$ 有

$$\frac{1}{r}b(x,u)(\mathrm{e}^{r(f(x)-f(u))}-1)\geqslant$$

$$\frac{1}{p}\xi(\mathrm{e}^{p\cdot\eta(x,u)}-1),(>,x\neq u),(p\neq 0,r\neq 0)$$

$$\frac{1}{r}b(x,u)(\mathrm{e}^{r(f(x)-f(u))}-1)\geqslant$$

* **收稿日期** :2009-06-01　**修回日期** :2009-09-29
资助项目 :重庆师范大学青年基金(No.08XLQ01)
作者简介 :赵克全，男，讲师，硕士，研究方向为非光滑规划理论。

$$\xi \cdot \eta(x,u),(>,x \neq u),(p=0,r\neq 0)$$

$$b(x,u)(f(x)-f(u)) \geqslant$$

$$\frac{1}{p}\xi(e^{p\cdot\eta(x,u)}-1),(>,x\neq u),(p\neq 0,r=0)$$

$$b(x,u)(f(x)-f(u)) \geqslant$$

$$\xi \cdot \eta(x,u),(>,x\neq u),(p=0,r=0)$$

称f在X上关于η和b(严格)Lipschitz B-(p,r)-不变凸的,如果对任意的$u \in X$,f关于η和b(严格)是 Lipschitz B-(p,r)-不变凸的。

注1 文献[8]中,作者仅对$r\neq 0$,$p=0$给出“Lipschitz B-(p,r)-不变凸函数”的例子。下面给出 Lipschitz B-(p,r)-不变凸函数一般情形的例子。

例 设$f(x)=\ln(2+|x|)$,显然,f是关于η和b的 Lipschitz B-$(1,1)$-不变凸函数,其中

$$\eta(x,y)=\begin{cases}\ln(x+y), x>0, y>0, x>y \\ \ln(y-x+1), x<0, y<0, x<y \\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

$$b(x,y)=\begin{cases}1, x>0, y>0, x>y \\ y-x,, x<0, y<0, x<y \\ \dfrac{|x|-|y|}{2+|y|}, x>0, y\leqslant 0, x>-y \\ \dfrac{|x|-|y|}{2+|y|}, x<0, y\geqslant 0, x<-y \\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

本文考虑如下非光滑规划问题

$$(\mathrm{P}) \quad \min f(x)$$

$$\text{s.t.} \quad g_i(x)\leqslant 0, i\in I=\{1,\cdots,m\}$$

$$h_j(x)=0, j\in J=\{1,\cdots,p\}$$

其中$X\subset \mathbf{R}^n$,$f:X\to\mathbf{R}$,$g_i:X\to\mathbf{R}$,$i\in I$,$h_j:X\to\mathbf{R}$,$j\in J$是 Lipschitz 函数。记

$$D=\{x\in X: g_i(x)\leqslant 0, h_j(x)=0, i\in I, j\in J\}$$

为规划问题的可行域。

2 最优性条件

定理1[6] (Fritz-John 必要条件)假设$\bar{x}\in D$是问题(P)的最优解,则存在$\lambda\geqslant 0$,$\mu\in\mathbf{R}_+^m$,$\mu\in\mathbf{R}^p$,且$(\lambda,\mu,\upsilon)\neq 0$,满足

$$0\in\lambda\partial f(\bar{x})+\sum_{i=1}^m\mu_i\partial g_i(\bar{x})+\sum_{j=1}^p\upsilon_j\partial h_j(\bar{x}) \tag{1}$$

$$\mu_i g_i(\bar{x})=0, i=1,\cdots,m \tag{2}$$

$$\lambda\geqslant 0,\mu\in\mathbf{R}_+^n,\upsilon\in\mathbf{R}^p \tag{3}$$

若在$\bar{x}$处给出适当的限制条件就可以得到 KKT 条件,(1)式可改写为

$$0\in\partial f(\bar{x})+\sum_{i=1}^m\mu_i\partial g_i(\bar{x})+\sum_{j=1}^p\upsilon_j\partial h_j(\bar{x}) \tag{4}$$

记$J_1=\{j:h_j>0,j\in J\}$,$J_2=\{j:\upsilon_j<0,j\in J\}$。

定理2 (KKT最优性必要条件)设$\bar{x}\in D$是问题(P)的最优解。假设$\sum_{i=1}^m\mu_i g_i+\sum_{j=1}^p\upsilon_j h_j$在$\bar{x}$处是关于$\eta$和$b$的严格B-$(p,r)$-不变凸函数,且$g_i(i\in I)$,$h_j(j\in J_1)$,$-h_j(j\in J_2)$在$\bar{x}$处正则。那么存在$\lambda>0$,$\mu\in\mathbf{R}_+^m$,$v\in\mathbf{R}^p$,使得$\bar{x}$是问题(P)的 KKT 点。

证明 只考虑$p>0$,$r>0$的情况(其余情况证明类似)。

由于$\bar{x}$是问题(P)的最优解,则存在$\lambda\geqslant 0$,$\mu\in\mathbf{R}_+^m$,$v\in\mathbf{R}^p$,且$(\lambda,\mu,v)\neq 0$使得(1)~(3)式成立。下面证明$\lambda\neq 0$。

反证法。假设$\lambda=0$。则由(1)式可得

$$0\in\sum_{i=1}^m\mu_i\partial g_i(\bar{x})+\sum_{j=1}^p v_j\partial h_j(\bar{x})$$

从而存在$\zeta_j\in\partial g_i(\bar{x})$,$(i=1,\cdots,m)$和$\xi_j\in\partial h_j(\bar{x})$,$(j=1,\cdots,p)$使得

$$0=\sum_{i=1}^m\mu_i\zeta_i+\sum_{j=1}^p v_j\xi_j \tag{5}$$

由假设$\sum_{i=1}^m\mu_i g_i+\sum_{j=1}^p v_j h_j$在$\bar{x}$处是关于$\eta$和$b$的严格B-$(p,r)$-不变凸函数,且$g_i(i\in I)$,$h_j(j\in J_1)$,$-h_j(j\in J_2)$在$\bar{x}$处正则,那么对任意的$x\in D$,有

$$\frac{1}{r}b(x,\bar{x})\left(e^{r[(\sum_{i=1}^m\mu_i g_i+\sum_{j=1}^p v_j h_j)(x)-(\sum_{i=1}^m\mu_i g_i+\sum_{j=1}^p v_j h_j)(\bar{x})]}-1\right)>$$

$$\frac{1}{p}\left(\sum_{i=1}^m\mu_i\zeta_i+\sum_{j=1}^p v_j\xi_j\right)(e^{p\cdot\eta(x,\bar{x})}-1)=0$$

然而

$$\frac{1}{r}b(x,\bar{x})\left(e^{r[(\sum_{i=1}^m\mu_i g_i+\sum_{j=1}^p v_j h_j)(x)-(\sum_{i=1}^m\mu_i g_i+\sum_{j=1}^p v_j h_j)(\bar{x})]}-1\right)=$$

$$\frac{1}{r}b(x,\bar{x})\left(e^{r(\sum_{i=1}^m\mu_i g_i+\sum_{j=1}^p v_j h_j)(x)}-1\right)\leqslant 0$$

与(5)式矛盾。 证毕

定理3 (KKT最优性充分条件)设$\bar{x}\in D$,若在$\bar{x}$处KKT条件(2)~(4)式成立。如果$f+\sum_{i=1}^m\mu_i g_i+\sum_{j=1}^p v_j h_j$在$\bar{x}$处是关于$\eta$和$b$的B-$(p,r)$-不变凸函数且$f$,$g_i(i\in I)$,$h_j(j\in J_1)$,$-h_j(j\in J_2)$在$\bar{x}$处正则,那么$\bar{x}$是问题(P)的最优解。

证明 设x是问题(P)的可行点。因$f+\sum_{i=1}^m\mu_i g_i+$

$\sum_{j=1}^{p} v_j h_j$ 在 $\bar{x}$ 处是关于 η 和 b 的 B-(p,r)-不变凸函数且 $f, g_i (i \in I), h_j (j \in J_1), -h_j (j \in J_2)$ 在 $\bar{x}$ 处正则，那么对

$$\forall \zeta \in \partial f(\bar{x}), \forall \xi_i \in \partial g_i(\bar{x}) (i = 1, \cdots, m)$$
$$\forall \xi_j \in \partial h_j(\bar{x}) (j = 1, \cdots, p)$$

有

$$\frac{1}{r} b(x,\bar{x}) \left(e^{r\left[(f+\sum_{i=1}^{m}\mu_i g_i+\sum_{j=1}^{p} v_j h_j)(x) - (f+\sum_{i=1}^{m}\mu_i g_i+\sum_{j=1}^{p} v_j h_j)(\bar{x}) \right]} - 1 \right) \geqslant$$
$$\frac{1}{p}\left(\zeta + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \zeta_i + \sum_{j=1}^{p} v_j \xi_j\right)\left(e^{p\cdot\eta(x,\bar{x})} - 1\right)$$

由(4)式可得

$$\left(f + \sum_{i=1}^{m} \mu_i g_i + \sum_{j=1}^{p} v_j h_j\right)(x) \geqslant$$
$$\left(f + \sum_{i=1}^{m} \mu_i g_i + \sum_{j=1}^{p} v_j h_j\right)(\bar{x})$$

从而 $f(x) - f(\bar{x}) \geqslant -\sum_{i=1}^{m} \mu_i g_i(x) \geqslant 0$，即 $f(x) \geqslant f(\bar{x})$，从而 $\bar{x}$ 是问题(P)的最优解。 证毕

3 结束语

本文在非光滑 B-(p,r)-不变凸性条件下，建立了带等式和不等式约束的非光滑规划问题的 KKT 最优性必要条件和最优性充分条件。本文的结果是对文献[8]中相应结果的改进与完善。

参考文献：

[1] Hanson M A. On sufficiency of the Kuhn Tucker conditions [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1981, 80: 544-550.

[2] Jabarootian T, Zafarani J. Generalized invariant monotonicity and invexity of nondifferential functions [J]. Journal of Global Optimization, 2006, 36: 537-564.

[3] Jeyakumar V. Equivalence of a saddle-points and optima, and duality for a class of non-smooth nonconvex problems [J]. JMAA, 1988, 130: 334-343.

[4] Kaul R N, Suneja S K, Lalitha C S. Generalized nonsmooth invexity [J]. J Inf Optim Sci, 1994, 15: 1-17.

[5] Antczak T. Multiobjective programming under d-invexity [J]. Eur J Oper Res, 2002, 137: 28-36.

[6] Clarke F H. Optimization nonsmooth analysis [M]. New York: John Wiely, 1983.

[7] Antczak T. A class of B-(p,r)-invex functions and mathematical programming [J]. JMAA, 2003, 286: 187-206

[8] Zhang Y, Zhu B, Xu Y T. A class of Lipschitz B-(p,r)-invex functions and nonsmooth programming [J]. OR Transactions, 2009, 13: 61-71.

[9] 杨新民. 关于非线性规划的逆对偶[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2003, 20(4): 1-4.

[10] 赵克全, 陈哲. B-预不变凸函数在多目标规划中的对偶问题[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2008, 25(2): 1-4.

Operations Research and Cybernetics

Optimality Conditions of a Class of Nonsmooth Programming Problem

ZHAO Ke-quan, LUO Jie, TANG Li-ping

(College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: In this paper necessary KKT condition is given to a class of nonsmooth B-(p, r) programming problems with equality and inequality constraints as follows: Let $\bar{x} \in D$ be optimal solution for (P), $\sum_{i=1}^{m}\mu_i g_i + \sum_{j=1}^{p} v_j h_j$ is strictly B-(p, r) invex function at $\bar{x}$ with respect to η and b, $g_i (i \in I), h_j (j \in J_1), -h_j (j \in J_2)$ are regular at $\bar{x}$. Then there exist $\lambda > 0, \mu \in \mathbf{R}_+^m, v \in \mathbf{R}^p$, such that $\bar{x}$ is KKT point for (P). At the same time, the sufficient KKT condition is given to this programming problem as follows: Let KKT conditions (2) ~ (4) are satisfied at $\bar{x} \in D$, $f + \sum_{i=1}^{m}\mu_i g_i + \sum_{j=1}^{p} v_j h_j$ is B-(p, r) invex function at $\bar{x}$ with respect to η and b, $g_i (i \in I)$, $h_j (j \in J_1), -h_j (j \in J_2)$ are regular at $\bar{x}$. Then $\bar{x}$ is an optimal solution for (P).

Key words: B-(p, r)-invexity; optimality conditions; nonsmooth programming

(责任编辑 黄 颖)