运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20160405

求解二层线性规划的极点算法*

赵礼阳[1]，霍永亮[2]
(1. 重庆师范大学 数学学院，重庆 401331；2. 重庆文理学院 数学与财经学院，重庆 402160)

摘要：给出了求解二层线性规划全局最优解的极点搜索方法。该方法首先通过单纯形方法分别求出原问题约束域和下层对偶问题约束域的极点，并按照上层目标函数值的大小顺序将原问题约束域的极点进行排序，然后把下层对偶问题约束域的极点依次和原问题约束域中有序极点进行组合，利用下层对偶问题的对偶间隙等于零来验证极点的有效性，以此确定问题的全局最优解。最后通过算例验证算法的有效性和可行性。该方法具有简单易行、可操作性强的优点。

关键词：二层线性规划；约束条件；全局最优解；极点算法
中图分类号：O221.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2016)04-0001-05

二层线性规划的一般模型可以表示成如下形式(LBP)：

$$
\begin{aligned}
&\text{(a)}\ \min_{x\in X} F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0},\text{其中 }\boldsymbol{y}\text{ 是解。}\\
&\text{(b)}\ \min_{y\in Y} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{c}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y},\\
&\quad\ \text{s.t. } \boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{By}\leqslant\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{0}。
\end{aligned}
\tag{1}
$$

在上式中，$\boldsymbol{x}\in X\subset\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{y}\in Y\subset\mathbf{R}^m$ 分别为上层规划问题和下层规划问题的决策变量，$F:X\times Y\to\mathbf{R}$，$f:X\times Y\to\mathbf{R}$ 均是线性函数，$\boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{c}_2^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{d}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{d}_2^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^m$，$\boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^p$，$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别是约束函数的系数矩阵。在对二层优化问题的求解研究中，和一般单层数学规划问题不一样的是，它的上层目标函数的最优值和最优解要受下层的最优解的影响，而下层的目标函数和约束条件又要以上层决策变量作为参数[1-2]。目前针对而二层线性规划的求解已经有很多有效的方法，文献[3]利用 KKT 最优性条件把下层问题等价的变为一个带有互补约束的单层优化问题，然后求解该单层规划问题得到原问题的最优解。文献[4]首先得到下层问题的对偶问题，利用对偶问题的对偶间隙等于零这一理论，把下层对偶间隙作为罚函数项，添加到上层目标函数中，先求出该问题的一个局部最优解，然后引进割平面约束来修正当前的局部最优解，最终求得问题的全局最优解。而文献[5]把二层规划的下层问题用对偶问题替换，利用下层对偶间隙作为罚函数项，添加到上层问题的目标函数中，然后去求解单层的数学规划问题达到求解原问题最优解的目的。文献[8-9]都是利用罚函数原理，把二层规划问题转化成为了单层规划问题，再通过割平面约束来求得问题的全局最优解。

受文献[5]的启发，针对上、下层规划问题有唯一最优解的二层线性规划问题，提出了一种求解二层线性规划问题全局最优解简单易行的方法。根据二层线性规划的最优解一定在约束域的极点处取得的理论性质，通过去求解约束域的所有极点，为了更快确定问题的最优解，按照上层目标函数值从小到大的顺序重新排列约束域极点。在验证所得到的极点是否为最优解的过程中，为避免求解下层规划的最优解，本文通过下层问题的对偶间隙等于零，检验所求得的极点是否为有效极点，以此确定问题的全局最优解。最后通过数值实验表明了算法是有效的和可行的。

1 理论分析

记问题(1)的约束域为 $S\triangleq\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}):\boldsymbol{x}\in X,\boldsymbol{y}\in Y,\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{By}\leqslant\boldsymbol{b},\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{0}\}$，对每个给定的上层决策变量 $\boldsymbol{x}$，下层问题的可行集为 $S(\boldsymbol{x})\triangleq\{\boldsymbol{y}\in Y,\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{By}\leqslant\boldsymbol{b},\boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{0}\}$。

* 收稿日期：2015-05-12　修回日期：2016-05-19　网络出版时间：2016-07-07 16:35
资助项目：重庆高校创新团队建设计划项目(No. KJ301321)
作者简介：赵礼阳，男，研究方向最优化理论与算法，E-mail：371900780@qq.com；通信作者：霍永亮，教授，E-mail：yongliang-huo@126.com
网络出版地址：http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20160707.1635.070.html

定义 1 对于任意给定的上层决策变量 $\boldsymbol{x}$,下层问题的合理反应集为

$$P(\boldsymbol{x})\triangleq\{\boldsymbol{y}\in Y:\boldsymbol{y}\in\arg\min\{f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}\in S(\boldsymbol{x})\}\}。$$

定义 2 称 $IR=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}):(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in S,\boldsymbol{y}\in P(\boldsymbol{x})\}$为问题(1)的可行集。

定义 3 如果存在$(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)\in IR$,使得对任意的$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in IR$,$F(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)\leqslant F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$恒成立,则称$(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)$为问题(1)的全局最优解,简称最优解[6]。

为了保证问题(1)有最优解,做两个必要的假设:(A) S 为非空紧集;(B) 可行集 $IR\neq\varnothing$[9]。

定义 4 如果对于 S 中异于(x_0,y_0)的任意两点(x_1,y_1),$(x_2,y_2)\in S$,以及任意的实数 $\lambda>0$,$\lambda\in(0,1)$,有

$$\lambda(x_1,y_1)+(1-\lambda)(x_2,y_2)=(x_0,y_0) \tag{2}$$

不成立,则称(x_0,y_0)是 S 的任意一个极点(顶点)。

定理 1 如果(x_0,y_0)是问题(1)的唯一最优解,则(x_0,y_0)是问题(1)约束域的极点。

证明 反证法。假设(x_0,y_0)是问题(1)的唯一最优解,但(x_0,y_0)不是问题(1)约束域的极点。由定义 3 可得,存在(x_1,y_1),$(x_2,y_2)\in S$,且$(x_1,y_1)\neq(x_0,y_0)$,$(x_2,y_2)\neq(x_0,y_0)$和正数 $\lambda\in(0,1)$,有

$$\lambda(x_1,y_1)+(1-\lambda)(x_2,y_2)=(x_0,y_0)$$

成立。即 $\lambda x_1+(1-\lambda)x_2=x_0$,$\lambda y_1+(1-\lambda)y_2=y_0$,则$(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)$也是问题(1)的最优解,显然 $F(x_0,y_0)=F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)$成立。

又因为(x_0,y_0)是问题(1)的唯一最优解,有:

$$F(x_0,y_0)<F(x_1,y_1)=c_1^{\mathrm{T}}x_1+d_1^{\mathrm{T}}y_1, \tag{3}$$

$$F(x_0,y_0)<F(x_2,y_2)=c_1^{\mathrm{T}}x_2+d_1^{\mathrm{T}}y_2。 \tag{4}$$

则由 $\lambda\times(3)+(1-\lambda)\times(4)$得:

$$\begin{gathered}F(x_0,y_0)<\lambda(c_1^{\mathrm{T}}x_1+d_1^{\mathrm{T}}y_1)+(1-\lambda)(c_1^{\mathrm{T}}x_2+d_1^{\mathrm{T}}y_2)<\lambda c_1^{\mathrm{T}}x_1+(1-\lambda)c_1^{\mathrm{T}}x_2+\lambda d_1^{\mathrm{T}}y_1+(1-\lambda)d_1^{\mathrm{T}}y_2=\\ c_1^{\mathrm{T}}(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)+d_1^{\mathrm{T}}(\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)=F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)。\end{gathered}$$

这就与 $F(x_0,y_0)=F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)$矛盾,故定理得证。 证毕

上面的定理从求解问题(1)的最优解,转化为在有限个极点中去找一个极点为最优解。根据极点处上层目标函数值从小到大进行极点排序。为了在验证有效极点时,避免去求解下层规划在上层规划给定决策后的最优解,本文给出另一种简单的方法来检验得到的有序极点是否为最优解。

当上层给定任意一个 $\boldsymbol{x}\in S$ 以后,下层规划(b)的最优解与 c_2^{T} 无关,问题(1)的下层规划(b)等价于:

$$\begin{aligned}&\min_{y} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=d_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y},\\ &\text{s. t. } \boldsymbol{By}\leqslant\boldsymbol{b}-\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{y}\geqslant 0。\end{aligned} \tag{5}$$

问题(5)的对偶问题可以表示为:

$$\begin{aligned}&\min_{y} Z(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u},\\ &\text{s. t. } -\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\leqslant d_2,\boldsymbol{u}\geqslant\boldsymbol{0}。\end{aligned} \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^p$,问题(6)的可行域记为 $U=\{\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^p:-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\leqslant d_2,\boldsymbol{u}\geqslant\boldsymbol{0}\}$。

对于任意固定的 $\boldsymbol{x}\in S$,假设 $\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{u}$ 分别是问题(5)与问题(6)的可行解,根据对偶理论的性质,有 $d_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\geqslant(\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}$ 恒成立,令 $h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{u})=d_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}-(\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}$,则称 $h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{u})$是下层规划问题的对偶间隙。

引理 1[5] 假设$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in S$,如果$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in IR$ 当且仅当对偶问题存在 $\boldsymbol{u}\in U$,成立 $h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{u})=0$。

通过上面引理,构造下列问题

$$\begin{aligned}&\min_{x,y,u} H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{u})=h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{u}),\\ &\text{s. t. } \boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{By}\leqslant\boldsymbol{b},-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\leqslant d_2,\boldsymbol{u}\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{0}。\end{aligned} \tag{7}$$

为了找到问题(1)的可行解,那么只需要求解问题(7)的最优解$(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*,\boldsymbol{u}^*)$,如果 $h(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*,\boldsymbol{u}^*)=0$,就有$(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)\in IR$。分析问题(7)不难看出,其约束域中的$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$与 $\boldsymbol{u}$ 是不相关联的。用 $S_D=\{(x_i,y_i),i=1,2,\cdots,t\}$和 $U_D=\{u_j,j=1,2,\cdots,s\}$分别表示问题(1)的约束域 S 的有序极点和问题(6)的约束域 U 的极点所构成的集合。

定理 2 如果$(x_0,y_0)\in S_D$ 是问题(1)的最优解,则存在 $u_0\in U_D$,成立等式 $h(x_0,y_0,u_0)=0$。

证明 如果$(x_0,y_0)\in S_D$ 是问题(1)的最优解,则$(x_0,y_0)\in IR\subset S$。根据引理 1 可得,存在 $u_0\in U$,有

$h(x_0,y_0,u_0)=0$。当上层给定 x_0 时，y_0 和 u_0 分别是问题(5)、(6)的最优解，且 $h(x_0,y_0,u_0)=0$。根据对偶理论的性质，对于任意的 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in S$ 和 $u\in U$，有 $h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{u})=d_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}-(\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\geqslant 0$，于是得出 (x_0,y_0,u_0) 是问题(7)的最优解。在问题(7)中，其约束域中的 (x,y) 与 u 是不相关联的，所以问题(7)最优解中的 u_0 和下面问题(8)的最优解相同。

$$\begin{aligned}&\min_u H(x_0,y_0,u)=h(x_0,y_0,u),\\&\text{s. t. }\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\geqslant -d_2,\boldsymbol{u}\geqslant \boldsymbol{0}。\end{aligned}\tag{8}$$

而问题(8)是关于 $\boldsymbol{u}$ 的一个线性规划问题，根据定理 1 可得，问题(8)的最优解一定存在于约束域的极点(顶点)中，也就是 u_0 是问题(8)约束域的极点，即 $u_0\in U_D$。

对于问题(1)，无论上层规划问题给下层规划任何决策，U 都不发生任何变化，即 U_D 也不变。从上面的理论，可以得出问题(7)的最优解是由 S_D 中的某一个极点和 U_D 中的某一个极点组合而成。针对于求解二层线性规划问题，只需要求解出原问题约束域的有序极点与其下层对偶问题约束域的极点。从 S_D 中 (x_i,y_i)，$i=1$ 和 U_D 中的 u^j，$j=1,\cdots,s$ 依次组合，如果有 $h(x_i,y_i,u^j)=0$，那么就能得出 (x_i,y_i) 为问题(1)的最优解，否则 $i=i+1$，重复验证。该方法主要工作集中在求解约束域的极点，然后只需要验证一个等式是否成立，便可以确定这个极点是不是最优解，该方法大大降低了求解难度。

2 算法描述

通过前面的理论分析，给出求解二层线性规划问题全局最优解的方法，具体步骤描述如下。

第 1 步，利用线性规划技术求出问题(1)约束域的极点，并且按照上层目标函数值从小到大排序，记为 $S_D=\{(x_i,y_i),i=1,2,\cdots,t\}$，转第 2 步；

第 2 步，利用线性规划技术求出问题(1)的下层对偶问题约束域的极点，记为 $\boldsymbol{U_D}=\{u^j,j=1,2,\cdots,s\}$，令 $i=1,j=1$，转第 3 步；

第 3 步，给定初始条件 (x_i,y_i) 和 u^j，转第 4 步；

第 4 步，如果 $h(x_i,y_i,u^j)=0$，则终止算法，输出最优解 (x_i,y_i)，否则转第 5 步；

第 5 步，如果 $j<s$，令 $j=j+1$，转第 3 步，否则令 $i=i+1,j=1$，转第 3 步。

3 数值实验

极点算法是针对二层线性规划最优解在约束域极点取到这一性质提出的，并且通过极点算法求得的最优解就是精确最优解。在算法的求解过程中，只需找出对偶间隙等零所对应的极点即为最优解。如果问题的约束域有 m 个极点，下层对偶问题约束域有 n 个极点，其求解过程最多需要 $m\times n$ 步即可确定最优解。

例 1[6]
$$\begin{aligned}&\min_{\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}} F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}-4\boldsymbol{y},\\&\min_{\boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{0}} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y},\\&\text{s. t. }\ \boldsymbol{y}+2\boldsymbol{x}\leqslant 12,2\boldsymbol{y}-3\boldsymbol{x}\geqslant -4,\\&\qquad \boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}\geqslant 3,\boldsymbol{y}-2\boldsymbol{x}\leqslant 0。\end{aligned}$$

利用线性规划技术得到例 1 约束域 S 的极点，并根据上层目标函数值从小到大排列后有 $(x_1,y_1)=(3,6)$，$(x_2,y_2)=(4,4)$，$(x_3,y_3)=(1,2)$，$(x_4,y_4)=(2,1)$。利用线性规划技术求得例 1 下层对偶问题约束域 U 的极点分别为 $\boldsymbol{u}^1=(0,0,0,0)$，$\boldsymbol{u}^2=(1,0.5,1,0)$，$\boldsymbol{u}^3=(0,0.5,0,0)$，$\boldsymbol{u}^4=(0,0.5,1,1)$，$\boldsymbol{u}^5=(0,0,1,0)$，$\boldsymbol{u}^6=(0,1,0,1)$。

当 $i=1$ 时，$(x_i,y_i)=(3,6)$ 对应 U_D 中 6 个极点的

表 1　(x_i,y_i)**对应的对偶间隙** $h(x_i,y_i,u^j)(i=1)$

Tab. 1　(x_i,y_i)Corresponding duality gap $h(x_i,y_i,u^j)(i=1)$

j	u^j	(x_i,y_i)	$h(x_i,y_i,u^j)$
1	(0,0,0,0)	(3,6)	6
2	(1,0.5,1,0)	(3,6)	9.5
3	(0,0.5,0,0)	(3,6)	3.5
4	(0,0.5,1,1)	(3,6)	9.5
5	(0,0,1,0)	(3,6)	6
6	(0,1,0,1)	(3,6)	7

表 2　(x_i,y_i)**对应的对偶间隙** $h(x_i,y_i,u^j)(i=2)$

Tab. 2　(x_i,y_i)Corresponding duality gap $h(x_i,y_i,u^j)(i=2)$

j	u^j	(x_i,y_i)	$h(x_i,y_i,u^j)$
1	(0,0,0,0)	(4,4)	4
2	(1,0.5,1,0)	(4,4)	5
3	(0,0.5,0,0)	(4,4)	0
4	(0,0.5,1,1)	(4,4)	9
5	(0,0,1,0)	(4,4)	5
6	(0,1,0,1)	(4,4)	4

对偶间隙如表 1 所示。

当 $i=2$ 时,$(x_i,y_i)=(4,4)$对应 U_D 中 6 个极点的对偶间隙如表 2 所示。

当 $i=2$ 时,从表 2 可得,$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(4,4)$为问题的最优解,并且 $h(x_i,y_i,u^j)=0$。此结果与文献[6]的结果一致,表明该算法有效。

4 数值结果比较

根据例 1 的极点算法求解过程,明显地看到极点算法在有限步就能确定精确最优解。下面通过例 2 和例 3,比较本文算法与文献[10]中算法求出的最优解和最优值的精确度。

例 2[10] $\min\limits_{x,y} F(x,y)=-8x_1-4x_2+4y_1-40y_2-4y_3, x_1,x_2\geqslant 0$,其中 y_1,y_2,y_3 是解。

$\min\limits_{y} f(x,y)=y_1+y_2+2y_3$,

s.t. $-y_1+y_2+y_3\leqslant 1, 2x_1-y_1+2y_2-0.5y_3\leqslant 1, 2x_2+2y_1-y_2-0.5y_3\leqslant 1, y_1,y_2,y_3\geqslant 0$。

例 3[10] $\min\limits_{x,y} F(x,y)=x_1-2x_2-x_3-3y,\ x_1,x_2,x_3\geqslant 0$,其中 y 是解。

$\min\limits_{y} f(x,y)=-2x_1+x_3+4y$,

s.t. $0.2x_1+x_3+y\leqslant 12, -2x_2+y\leqslant 10; -3x_1-x_2+x_3\leqslant 12, -x_1+y\leqslant -2; -2x_1-x_3\leqslant -2, x_2\leqslant 15; y\geqslant 2$。

表 3 为本文的极点算法得到的最优解和文献[10]的得到的最优解进行比较,显然极点算法得到的最优解精确度更高。

表 3 与文献[10]算法的最优解比较

Tab. 3 Comparison with the optimal solution of the algorithm in literature [10]

算例	本文最优解$(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)$	文献最优解$(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}})$
例 2	(0,0.9,0,0.6,0.4)	(2e−6,0.899 997,4e−6,0.6,0.400 005)
例 3	(4,15,9.2,2)	(4.000 517,14.999 931,9.199 862,2)

表 4 是极点算法得到的最优解所对应的上、下层目标函数值和文献[10]的最优解所对应的上、下层目标函数值作比较。

表 4 与文献[10]最优解对应的上层和下层目标函数值比较

Tab. 4 Comparison with the corresponding upper and lower objective function values to the optimal solution of literature [10]

算例	本文上、下层目标函数值		文献上、下层目标函数值	
	$F(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)$	$f(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)$	$F(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}})$	$f(\overline{\boldsymbol{x}},\overline{\boldsymbol{y}})$
例 2	29.2	3.2	29.200 009	3.200 09
例 3	−41.2	9.2	−41.199 207	9.198 828

通过上面两个算例,对本文极点算法和文献[10]中的算法进行数值结果的比较,表明极点算法更容易得到问题的精确最优解。文献[10]是利用 KKT 条件和拉格朗日函数来转化二层规划,最终求解单层规划达到求解原规划最优解的目的。本文的极点算法在解决规模不大的二层线性规划问题时,只要找到约束域和对偶问题约束域的所有极点,然后进行相应的等式验证即可确定最优解。相比文献[5,10]的算法来说,本文的算法求解过程具有:目标清楚、步骤简单、收敛速度快、有限步确定最优解、精确度高等优点。

5 结束语

对于二层线性规划,大多数文献都考虑把二层规划问题转化为与之等价的单层规划问题进行求解,得到原问题的最优解。本文根据二层线性规划的最优解一定可以在约束域极点找到的这一性质,给出了求解二层线性规划全局最优解的极点搜索方法。该方法首先求解出原问题约束域的极点和下层对偶问题约束域的极点,然后把下层对偶问题约束域的极点依次和原问题约束域中有序极点进行组合,找到满足对偶间隙等于零的那个组合,进而确定问题的全局最优解。相对于转化为单层规划问题求解而言,本文给出的求解二层线性规划全局最优解的方法具有简单易行、可操作性强、有限步即可确定最优解、精确度高等优点。

参考文献:

[1] Bialas W F,Karwan M H. Two-level linear programming [J]. Managenment Science,1984,30(8):1004-1020.

[2] Candler W,Norton R. Mulilevel programming and development policy[R]. Washington:World Bank,1977.

[3] 郑跃,雷国梁,曹晓刚. 求解线性二层规划 ε 全局最优解的一种方法[J]. 数学杂志,2013,33(5):941-945.

Zheng Y, Lei G L, Cao X G. A method for a ε-global optimal solution of linear bilevel programming[J]. Journal of Mathematics, 2013, 33(5): 941-945.

[4] 危学茂,赵茂先,张志江.双层线性规划的一种全局优化方法[J].山东科技大学学报:自然科学版,2009,28(1):99-102.

Wei X M, Zhao M X, Zhang Z J. A global optimal algorithm for the bilevel linear programming[J]. Journal of Shandong University of Science and Technology: Natural Science, 2009, 28(1): 99-102.

[5] 赵茂先,高自友.用罚函数求解线性双层规划的全局优化方法[J].运筹与管理,2005,14(4):25-39.

Zhao M X, Gao Z Y. A global convergent method for linear bilevel programming based on penalty function[J]. Operations Research and Management Science, 2005, 14(4): 25-39.

[6] 胡长英.双层规划理论及其在管理中的应用[M].北京:知识产权出版社,2012:34-36.

Hu C Y. Theory of bilevel programming and its application in management[M]. Beijing: Intellectual Property Publishing House, 2012: 34-36.

[7] 郑跃,万仲平,吕一兵.非线性二层规划问题的全局优化方法[J].系统科学与数学,2012,32(5):513-521.

Zheng Y, Wan Z P, Lu Y B. A global convergent method for nonlinear bilevel programming problem[J]. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 2012, 32(5): 513-521.

[8] Ding X, Al-Khayyal F. Accelerating covergence of cutting plane algorithms for disjoint bilinear programming[J]. Journal of Global Opimization, 2007, 38: 421-436.

[9] 赵茂先,李桂林.一个求解线性双层规划的全局收敛算法[J].山东科技大学学报:自然科学版,2007,26(5):75-79.

Zhao M X, Li G L. A global convergent algorithm for solving linear bilevel programming[J]. Journal of Shandong University of Science and Technology: Natural Science, 2007, 26(5): 75-79.

[10] Wan Z P, Mao L J, Wang G M. Estimation of distribution algorithm for aclass of nonlinear bilevel programming problems[J]. Information Sciences, 2014, 256: 184-196.

Operations Research and Cybernetics

Extreme Points Algorithm for Solving Bilevel Linear Programming

ZHAO Liyang[1], HUO Yongliang[2]

(1. College of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331;

2. College of mathematics and Finance, Chongqing Academy of Arts and Sciences, Chongqing 402160, China)

Abstract: This paper puts forward a pole search method to find the global optimal solution of bilevel linear programming. The given method in this paper firstly finds out the constrained domain poles of both original and the follower's dual problems by means of simplex method and sorts the former ones by the size of optimal value of the upper-level objective function. Then the paper combines the constrained domain pole points of original problems with lower-level dual problem, by using the truth that the interval of lower-level dual problem equals to zero for verifies the validation, so that confirm the required global optimal resolution. Finally, the paper verifies the effectiveness and feasibility of the algorithm by an example and the result shows it's simple and strongly operable.

Key words: bilevel linear program; constrained condition; global optimal solution; pole algorithm

(责任编辑 黄 颖)