DOI:10.11721/cqnuj20160437

素图非连通的单群$^2A_n(3)$的谱刻画*

何 怀 玉
(上海政法学院 经济管理学院,上海 201701)

摘要:将有限群的元素的阶的集合称之为谱。根据谱,利用单群的分类,借助丢番图方程的求解,采用排除法,对素图非连通的特殊射影酉群$^2A_n(3)$进行了刻画,证明了和$^2A_n(3)$具有相同谱的有限群均与$^2A_n(3)$同构,仅$^2A_2(3)$除外,进一步地证实了 Kondratiev 的猜想。

关键词:谱;素图;刻画;丢番图方程
中图分类号:O152.1 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2016)04-0057-04

对于有限群 G,若将群的阶$|G|$的全部素因子用数集$\pi(G)$表示,群 G 的所有元素的阶用数集$\omega(G)$表示,即群 G 的谱,则$\omega(G)$可由$\pi(G)$中若干个元素的乘积构成。如果$\pi(G)$中某两元素的乘积属于$\omega(G)$,则称它们是连通的,反之称为不连通。于是,根据$\pi(G)$可定义一个素图$\Gamma(G)$:$\pi(G)$的每个元素作为顶点,两个元素若连通则相连作为边。显然,若$\omega(G_1)=\omega(G_2)$,则两者具有相同的素图。

从施武杰的开创性工作[1]可以看到,某些有限单群与其群谱具有一一对应关系,由此开始了利用群谱来刻画有限群的一系列工作[2]。如果群 L 为已知,将与 L 的谱一样的群记为 G,如果 G 同构于 L,称 L 是可用谱刻画的;若 G 中存在唯一的非交换合成因子同构于 L,则称 L 是可用谱拟刻画的。

经过不懈的工作探知:除去 Alt_6,素图分支数 $s(G)>2$ 的单群均是可用谱拟刻画的。于是,俄罗斯数学家 Kondratiev 提出了以下猜想。

猜想 素图非连通的有限单群均是可用谱拟刻画的。

在该猜想提出之后,许多新的谱刻画工作[3]均支持了这个猜想。目前仅剩部分单群 $A_n(q)$,$^2A_n(q)$,$B_n(q)$和$C_n(q)$尚待确定。而在剩余的这些单群中,研究得比较多的是 $A_n(q)$,$B_n(q)$和 $C_n(q)$[4],却少有刻画特殊射影酉群$^2A_n(q)$的。特别是与$^2A_n(q)$的素图结构类似的单群 $A_n(q)$的数量性质[5]越来越清晰的时候,针对$^2A_n(q)$的刻画就提到日程上了。目前已知,素图分支数大于 1 的单群 $A_n(3)$是可刻画的[6],那么结构类似的$^2A_n(3)$可否也能刻画呢?下面将对这个问题进行讨论。

这里先介绍一下后面要用到的通用符号。将$\pi(G)$中在包含关系下的一个极大子集记为$\rho(G)$,它是由$\Gamma(G)$中两两不连通的顶点构成的;若 $r\in\rho(G)$,也可将之记为$\rho(r,G)$;集合的大小用 $t(G)=|\rho(G)|$或 $t(r,G)=|\rho(r,G)|$来表示。若 r 为 q^n-1 的本原素因子,则记为 r_n。若素图$\Gamma(G)$非连通,就将它的第 i 个素图分支用 $n_i(G)$表示,$1\leqslant i\leqslant s(G)$;这里令 $2\in n_1(G)$,则其他素图分支 $n_i(G)$为全连通,且为$\omega(G)$中在可整除关系下的一个最大元[7]。

引理 1[8] 设 G 为有限群,其中 $t(G)>3$,$t(2,G)>2$。则群 G 具有如下性质:

1) 对群 G 的某可解极大正规子群 K,必有非交换单群 S,满足 $S\leqslant\overline{G}=G/K\leqslant \mathrm{Aut}(S)$,同时 S 中总能找到等于 $n_i(G)$的素图分支,$i>1$。

2) 在极大孤立点集$\rho(G)$中取子集 ρ,若其元素个数$|\rho|\geqslant 3$,则 ρ 中最多有一个元能整除$|K|\cdot|\overline{G}/S|$,且 $t(S)\geqslant t(G)-1$。

3) 在$\rho(2,G)$中任取一个奇素数 p,则 p 不整除$|K|\cdot|\overline{G}/S|$,且$\rho(2,S)\supseteq\rho(2,G)$。

* **收稿日期**:2015-10-16 **修回日期**:2016-05-08 **网络出版时间**:2016-07-07 16:31
资助项目:国家自然科学基金青年科学基金(No.11201401);2015 年上海高校本科重点教学改革项目(No.沪教委高[2015]16);上海政法学院 2014 年度青年科研基金(No.2014XQN22)
作者简介:何怀玉,男,副教授,博士,研究方向为有限单群,E-mail:he-huaiyu@163.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20160707.1631.006.html

定理 当自然数 $n\geqslant 4$ 时,素图非连通的 ${}^2A_n(3)$ 可用谱刻画。

证明 从文献[7]中可看到,若 $\Gamma({}^2A_n(3))$ 非连通,则 n 或 $n+1$ 是一个素数。将该素数记为 p,那么 $p\geqslant 5$。

设有限群 G 与 ${}^2A_n(3)$ 具有相同的谱,那么 $\Gamma(G)=\Gamma({}^2A_n(3))$,从而可知 $t(G)=\left[\dfrac{p+1}{2}\right]$,$t(3,G)=3$,$s(G)=2$,$n_2(G)=\dfrac{3^p+1}{4}\geqslant 61$。

根据引理1可知,必能找到某单群 S,满足 $S\leqslant\overline{G}=G/K\leqslant \mathrm{Aut}(S)$,同时 $r_{2p}\in\rho(2,S)$。下面根据非交换单群的分类,讨论 S 的所有可能性,采用排除法逐步缩小范围来确定 S。

1) 若 S 为交错单群 Alt_m。

根据 $r_{2p}\in\rho(2,S)$,由素图的连接标准[9]可知,数集 $\{m,m-1,m-2,m-3\}$ 中必有一个数为 r_{2p}。再由 $n_i(S)=n_2(G)$,可知 $r_{2p}=\dfrac{3^p+1}{4}\leqslant m$,又因 $4(3^{p-2}+1)<3^p+1$,且 $4(3^{\frac{p-1}{2}}+1)<3^p+1$,则有 $r_{2p-4}+r_{p-1}<r_{2p}\leqslant m$,从而在单群 Alt_m 中,r_{2p-4} 与 r_{p-1} 是相连的,但这与 $r_{2p-4}\cdot r_{p-1}\notin\omega(G)$ 矛盾[9],假设不成立。

2) 若 S 为散在单群。

根据 $n_i(S)=n(G)\geqslant 61$,可知 S 只可能为 F_1 和 LyS。但反过来把 S 代入到 $n_i(S)=n_2(G)$ 中时,发现该方程无解[10],从而假设不成立。

3) 若 S 为例外型李型单群。

当 $p=5$ 时,$n_i(S)=n(G)=61$,再由 61 为群 G 的最大素因子可知,61 也是群 S 的最大素因子,无例外型单群 S 满足该条件,舍去。

同理可知,p 不等于 7 和 11。

当 $13\leqslant p\leqslant 23$ 时,$t(S)\geqslant t(G)-1=6$,同时由 $s(G)=2$ 可知,S 只可能是 $E_7(2)$、$E_7(3)$ 和 $E_8(q)$,但此时方程 $n_i(S)=n_2(G)$ 同样无解[10],舍去。

当 $p>23$ 时,$t(S)\geqslant t(G)-1=14$,同样找不到符合此条件的单群 S。

故 S 不是例外型李型单群。

4) 若 $S\cong{}^2D_k(q)$,其中 $q=m^t$(m 为素数)。

根据极大孤立点数 $t(S)\geqslant t(G)-1$ 可得,$\left[\dfrac{3k+4}{4}\right]\geqslant\left[\dfrac{p-1}{2}\right]$,即 $k\geqslant\dfrac{2p}{3}-2$。

当 $m=2$ 时,由素图的连通分支情况[7]可知:$n_i(S)=2^t+1$,此时方程 $n_i(S)=n_2(G)$ 显然无解,舍去。

当 $m\geqslant 5$ 时,可知 $n_i(S)=\dfrac{q^k+1}{2}$,其中 k 为 2 的方幂。若 $m>5$,由于 $k\geqslant\dfrac{2p}{3}-2$,则 $n_i(S)>n_2(G)$,舍去。若 $m=5$,根据 $n_i(S)=n_2(G)$,可得 $3^p-1=2\cdot 5^k=10a$,那么 p 必然是 4 的倍数,与 p 为素数矛盾。

当 $m=3$ 时,S 与 G 的特征相同。同时由 $s(G)>1$ 可知,k 或 $k-1$ 为 2 的方幂。此时,$n_i(S)=\dfrac{3^k+1}{4}$ 或 $\dfrac{3^k+1}{2}$。再根据 $n_i(S)=n_2(G)$ 可知,若该方程有解[10]则必然有 $S\cong{}^2D_p(3)$,但此时有素数 $r_{p-2}\in\pi(S)\backslash\pi(G)$,矛盾。

故单群 S 不能是 ${}^2D_k(q)$。

5) 若 $S\cong D_k(q)$。

根据素图分支数 $s(S)>1$,可知 $q\in\{2,3,5\}$。

当 $q=3$ 或 5 时,可推知方程 $n_i(S)=n_2(G)$ 显然无解,矛盾。

当 $q=2$ 时,有 $n_i(S)=2^k-1$,则根据 $n_i(S)=n_2(G)$ 的解[10]可得:$2(2^{k+1}-1)=3(3^{p-1}+1)$,从而 $r_{2p-2}\in\pi(S)\backslash\pi(G)$,矛盾。

6) 若 $S\cong B_k(q)$ 或 $C_k(q)$,其中 $q=m^t$(m 为素数)。

当 $m=2$ 时,则有 $n_i(S)=2^k-1$ 或 $2^{tk}+1$。若 $n_i(S)=2^{tk}+1$,显然 $n_i(S)=n_2(G)$ 无解,矛盾。若 $n_i(S)=2^k-1$,其中 k 为素数,则根据 $n_i(S)=n_2(G)$ 的解[10]可有 $2(2^{k+1}-1)=3(3^{p-1}+1)$,从而 $r_{2p-2}\in\pi(S)\backslash\pi(G)$,同样矛盾。

当 $m=3$ 时,由单群 S 的素图分支取值可知,此时方程 $n_i(S)=n_2(G)$ 无解。

因此，$m\geqslant5$。再由 $s(G)\geqslant2$ 可知，此时 $n_i(S)=\dfrac{q^k+1}{2}$，其中 k 为 2 的方幂。通过求解素图分支方程 $n_i(S)=n_2(G)$，可得 $q^k=\dfrac{3^p-1}{2}$。由于 $q^k\cdot(q^k-1)$ 整除群 S 的阶，从而 $\{r_p,r_{p-1},r_{(p-1)/2}\}\subset\pi(S)$，同时，由于已知群 S 中 r_{p-1} 和 $r_{(p-1)/2}$ 均与 3 相连[2]，这与极大孤立点集 $\rho(3,{}^2A_{p-1}(3))$ 的情况相矛盾。那么只能有 $\omega(G)=\omega({}^2A_p(3))$，而此时又由于存在素数 $r_p\in\pi(S)\backslash\pi(G)$，同样不可能成立。

7) 若 $S\cong A_k(q)$，其中 $q=m^t$（m 为素数）。

根据 $t(S)\geqslant t(G)-1$ 可知，$\left[\dfrac{k+2}{2}\right]\geqslant\left[\dfrac{p-1}{2}\right]$，即 $k\geqslant p-1$，且 k 或 $k+1$ 为素数。

若 $q>3$。当 $n_i(S)=\dfrac{q^k-1}{q-1}$ 时，由于 $n_i(S)=q^{k-1}+q^{k-2}+\cdots+1>q^{p-2}\geqslant\dfrac{3^p+1}{4}=n_2(G)$，则素图分支方程 $n_i(S)=n_2(G)$ 再次无解，舍去。而当 $n_i(S)=\dfrac{q^k-1}{(q-1)(k+1,q-1)}$ 时，$n_i(S)\geqslant\dfrac{q^{k+1}-1}{(q-1)^2}>q^{k-1}-1\geqslant q^{p-2}-1\geqslant\dfrac{3^p+1}{4}=n_2(G)$，同样 $n_i(S)=n_2(G)$ 无解，舍去。

若 $q=3$，则素图分支方程 $n_i(S)=n_2(G)$ 显然也无解，舍去。

若 $q=2$，则 $k+1$ 是一个素数，否则，根据单群 S 的素图分支情况可知：$2(2^{k+1}-1)=3(3^{p-1}+1)$，但此时 $r_{2p-2}\in\pi(S)\backslash\pi(G)$，矛盾。而当 $k+1$ 是素数时，方程 $n_i(S)=n_2(G)$ 同样无满足条件的解，矛盾。

故单群 S 不能是 $A_k(q)$。

8) 若 $S\cong{}^2A_k(q)$，其中 $q=m^t$（m 为素数）。

由孤立点数 $t(S)\geqslant t(G)-1$ 可知，$\left[\dfrac{k+2}{2}\right]\geqslant\left[\dfrac{p-1}{2}\right]$，即 $k\geqslant p-1$，且 k 或 $k+1$ 为素数。

当 $q=2$ 时，由丢番图方程 $3^x-2^y=1$ 的可能的解推知，$n_i(S)=n_2(G)$ 显然不成立[10]，舍去。

当 $q\geqslant4$ 时，由于 $n_i(S)>q^{k-2}\geqslant q^{p-3}$，则当 $q>5$ 且 $p>5$ 时，显然有 $n_i(S)>n(G)$，矛盾。当 $q>5$ 且 $p=5$ 时，或者 $q=4$ 时，很容易验证方程 $n_i(S)=n_2(G)$ 无解，同样可舍去。

从而有 $q=3$，进一步可得：$S\cong{}^2A_{p-1}(3)$ 或 ${}^2A_p(3)$

(i) 当 $\omega(G)=\omega({}^2A_{p-1}(3))$ 时，$S\cong{}^2A_{p-1}(3)$。否则，若 $S\cong{}^2A_p(3)$，当 $p+1\equiv0\pmod 4$ 时，素数 $r_{p+1}\in\pi(S)\backslash\pi(G)$；当 $p+1\equiv2\pmod 4$ 时，素数 $r_{(p+1)/2}\in\pi(S)\backslash\pi(G)$，皆不成立。因此，${}^2A_{p-1}(3)$ 是可以用谱拟刻画的。

(ii) 当 $\omega(G)=\omega({}^2A_p(3))$ 时，$S\cong{}^2A_p(3)$，其中 $p+1\equiv0\pmod 4$。否则，若 $S\cong{}^2A_{p-1}(3)$，则当 $(p+1)_2=4$ 时，由于 $\rho(2,G)=\{2,r_{2p},r_{p+1}\}$，而 $r_{p+1}\notin\pi(S)$，这与 $\rho(2,S)\supseteq\rho(2,G)$ 矛盾。当 $(p+1)_2>4$ 时，由于 $r_{p+1}\in\pi(S)\backslash\pi(G)$ 且 $S\leqslant\overline{G}=G/K\leqslant\mathrm{Aut}(S)$，则 $r_{p+1}\in\pi(K)$，从而 K 可看作是一个初等交换 r_{p+1}-群。众所周知，${}^2A_{p-1}(3)$ 中存在这样一个 Frobenius 子群：其核为 3 的方幂阶、补为 r_{p-3} 阶。再由文献[11]可知 $r_{p+1}\cdot r_{p-3}\in\omega(G)$，这与素图 $\Gamma({}^2A_p(3))$ 的连通情况冲突，不成立。从而 S 不可能是 ${}^2A_{p-1}(3)$。因此，${}^2A_p(3)$ 也是可用谱拟刻画的。

由(i)、(ii)可知：当素图非连通时，单群 ${}^2A_n(3)$ 是可用谱拟刻画的。也就是说，若 $\omega(G)=\omega({}^2A_n(3))$，那么必有 $S\cong{}^2A_n(3)$，使得 $S\leqslant\overline{G}=G/K\leqslant\mathrm{Aut}(S)$。

9) 若 $K\neq1$。

设 $r_l\in\pi(K)$，则可将 K 视为初等交换 r_l-群。

易知 $r_l\neq3$，否则，从文献[12]中可以看到，若记 K 和 S 的半直积群为 M，则 $\omega(M)\neq\omega(S)$，从而造成 $\omega(G)\neq\omega({}^2A_n(3))$，矛盾。

不妨取 $r_l\neq2$，显然 $l\geqslant3$。由文献[2]可知，S 含有这样一个 Frobenius 子群：其核为 3 的方幂阶、补为 r_t 阶（其中 $t\in\{p-1,2p-4,p-3,2p-8\}$），从而根据文献[2]可得 $r_l\cdot r_t\in\omega(G)$。

当 $l=3$ 或 4 时，$r_l\cdot r_{2p-4}\notin\omega(G)$，矛盾。当 $l=5$ 时，由于 $4\mid(p-1)(p-3)$，不妨令 $4\mid(p-3)$。当 $5\mid(p-3)$ 时，$2p-4$ 就不被 5 除，依据素图的连通情况[9]，可得 $r_5\cdot r_{2p-4}\notin\omega(G)$，矛盾；而若 $p-3$ 不能被 5 除时，可知 $r_5\cdot r_{p-3}\notin\omega(G)$，同样得出矛盾，舍去。与此同理，可以证明 $l\neq10$。但如果 $l\geqslant6$ 且 $l\neq10$，此时 l 又不能同时整除 $2(p-2)$ 和 $2(p-4)$，不妨令不能整除 $2(p-4)$，则由文献[9]可知 $r_l\cdot r_{2p-8}\notin\omega(G)$，同样不成立。

综上可知：$r_l=2$，即 K 只可能是一个初等交换 2-群。此时，由于 S 含有这样一个 Frobenius 子群：其核为 3 的方幂阶、补为 $3^{p-1}-1$ 阶，根据文献[2]可得：$2(3^{p-1}-1)\in\omega(G)$。另一方面，从极大环面的知识可以看到，S 中

不存在 $2(3^{p-1}-1)$ 阶极大环面[9]，从而 $2(3^{p-1}-1)\notin\omega(S)$，这与 $\omega(G)=\omega(^2A_n(3))$ 冲突，可舍去。

因此可得 $K=1$，即 K 为单位元群，进而 $S\leqslant G\leqslant \mathrm{Aut}(S)$。

再根据文献[13]可知：当 $S\cong {}^2A_p(q)$ 或 ${}^2A_{p-1}(q)$，$q=p^n$ 时，若 $s(G)>1$，则有 $G/S\cong\langle\gamma\rangle$，且 γ 的阶为 $2^s p^t$（其中 $s+t>0$）。从而可知，当 $S\cong {}^2A_p(3)$ 或 ${}^2A_{p-1}(3)$ 时，若要使群 G 的素图非连通，则必有 $G\cong S$。

综上所述，最终可得：当 ${}^2A_n(3)$ 的素图非连通时，若 $\omega(G)=\omega(^2A_n(3))$，则 $G\cong {}^2A_n(3)$，即 $n\geqslant 4$ 的非连通单群 ${}^2A_n(3)$ 都可用谱刻画。 证毕

又因为已知 ${}^2A_2(3)$ 不可用谱刻画[14]，而 ${}^2A_3(3)$ 可用谱刻画[15]，所以可得如下结论。

推论 除 ${}^2A_2(3)$ 以外，素图非连通的单群 ${}^2A_n(3)$ 均可用谱刻画。

参考文献：

[1] 施武杰. A_5 的一个特征性质[J]. 西南师范大学学报：自然科学版，1986，11(3)：11-14.
Shi W J. A characteristic property of A_5[J]. Journal of Southwest-China Teachers University：Natural Science，1986，11(3)：11-14.

[2] He H Y，Shi W J. Recognition of some finite simple groups of type $D_n(q)$ by spectrum[J]. International Journal of Algebra and Computation，2009，19(5)：681-698.

[3] Shen R L，Shi W J，Zinov'eva M R. Recognition of simple groups $B_p(3)$ by the set of element orders[J]. Siberian Mathematical Journal，2010，51(2)：244-254.

[4] 何怀玉. $B_n(3)$型单群的谱刻画[J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2012，37(8)：5-8.
He H Y. A characterization of the simple group $B_n(3)$ by spectrum[J]. Journal of South-China Teachers University：Natural Science，2012，37(8)：5-8.

[5] Vasiliev A V，Grechkoseeva M A. On recognition by spectrum of finite simple linear groups over fields of characteristic 2[J]. Siberian Mathematical Journal，2005，46(4)：593-600.

[6] 何怀玉，耿金玲. 有限单群 $A_n(3)$的元素阶的刻画[J]. 辽宁工程技术大学学报：自然科学版，2014，33(11)：1560-1563.
He H Y，Geng J L. Recognition of finite simple groups $A_n(3)$ by their its element orders[J]. Journal of Liaoning Technical University：Natural Science，2014，33(11)：1560-1563.

[7] Mazurov V D. Characterizations of groups by arithmetic properties[J]. Algebra Colloquium，2004，11(1)：129-140.

[8] Vasiliev A V，Gorshkov I B. On recognition of finite simple groups with connected prime graph[J]. Siberian Mathematical Journal，2009，50(2)：233-238.

[9] Vasiliev A V，Vdovin E P. An adjacency criterion for the prime graph of a finite simple group[J]. Algebra and Logic，2005，44(6)：381-406.

[10] Scott R，Styer R. On $p^x-q^y=c$ and related three term exponential Diophantine equations with prime bases[J]. Journal of Number Theory，2004，105(2)：212-234.

[11] He H Y，Shi W J. A note on the adjacency criterion for the prime graph and the charaterization of $C_p(3)$[J]. Algebra Colloquium，2012，19(3)：553-562.

[12] Zavarnitsine A V. Properties of element orders in covers for $L_n(q)$ and $U_n(q)$[J]. Siberian Mathematical Journal，2008，49(2)：246-256.

[13] Lucido M S. Prime graph components of finite almost simple groups[J]. Rend Sem Mat Padova，1999，102：1-14.

[14] 施武杰. 关于单 K_3-群[J]. 西南师范大学学报：自然科学版，1988，13(3)：1-4.
Shi W J. On the simple K_3-groups[J]. Journal of South-China Teachers University：Natural Science，1988，13(3)：1-4.

[15] Shi W J. The characterization of the finite simple group $U_4(3)$[J]. Analele Universitatii De Vest Din Timisoara (Ser Stiinte Mat)，1992，30(2/3)：319-323.

Recognition by Spectrum for the Simple Group ${}^2A_n(3)$ with Disconnected Prime Graph

HE Huaiyu

(Department of Economics and Management, Shanghai University of Political Science and Law, Shanghai 201701, China)

Abstract: The set of element orders of finite groups is named as spectrum. By the spectrum and the solutions of Diophantine equations, the simple group ${}^2A_n(3)$ with disconnected prime graph is recognized, in which the classification of finite simple groups and elimination are employed. The conclusion is that every finite group with the same spectrum as ${}^2A_n(3)$ is isomorphic to ${}^2A_n(3)$ except ${}^2A_2(3)$, which furthermore supports Kondratiev's conjecture.

Key words: spectrum; prime graph; characterization; Diophantine equations

（责任编辑 黄 颖）