DOI:10.11721/cqnuj20160403

星形箭图的极限*

陈梅香[1,2]，陈清华[2]，严益水[2]
(1. 莆田学院 数学学院，福建 莆田 351100；2. 福建师范大学 数学与计算机科学学院，福州 350007)

摘要:星形箭图是指只有一个 sink 点及一些指向该点并由该点连接的线性箭图，是一类常见的箭图；正向极限作为范畴理论中一个重要的研究对象，在代数学及范畴的上同调等方面都有重要的应用。余完备范畴 $\mathscr{A}$ 中任意正向系的正向极限是存在的。具体刻画了星形箭图所对应的偏序集的正向系的正向极限，即正向系的余积。作为应用，得到一类 Dynkin 箭图所对应的偏序集的正向系的正向极限。

关键词:星形箭图；正向极限；偏序集；Dynkin 箭图
中图分类号:O154.1 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2016)04-0061-04

正向极限与反向极限是范畴理论中一对非常重要的对偶概念，在代数学及范畴的上同调等方面都有重要的应用。2008 年，Glöckner[1]研究了无限维李群的正向极限，证明了无限维李群升链 $G_1\subseteq G_2\subseteq G_3\subseteq\cdots$ 均有正向极限 $\bigcup_{n\in N}G_n$；2013 年，Baranov[2]讨论了对合单结合代数的正向极限的分类及其维数群，由代数闭域上的有限维对合单结合代数的正向极限的分类得到相应的维数群的分类。本文考虑刻画星形箭图对应的偏序集的正向系的正向极限。星形箭图是一类常见的箭图，Etingof，Gan，Oblomkov[3]讨论了非 Dynkin 图的星形箭图所对应的代数的“Spherical”子代数；Chari，Greenstein[4]证明了存在大量的有限仿射型星形箭图(3 个分支)及 tame 拟遗传代数；Weist，Yusenko[5]则描述了与星形箭图对应的 * 代数的非等价的不可约 * 表示。

形如图 1 的箭图 Q 称为带 k 个分支的星形箭图(Star-shaped quiver with k arms)[6]：即只有一个 sink 点及一些指向该点并由该点连接的线性箭图(也称 arms)，所谓的 sink 点是指不存在以该点为起点的箭，线性箭图指的是形如 $\bullet\to\bullet\to\cdots\to\bullet$ 的箭图(本文只考虑两点之间单箭的情况)。

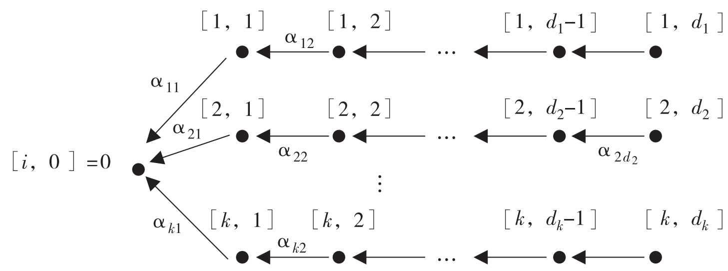

图 1 星形箭图
Fig. 1 Star-shaped quiver

通常，箭图(Quiver)记为 $Q(Q_0,Q_1,s,t)$[7]，其中 Q_0 为点集(Vertex)，常记为：$Q_0=\{1,2,3,\cdots,n\}$；Q_1 为箭集(Arrow)，其元素记为：$\alpha\in Q_1$；$s:Q_1\to Q_0,\alpha\quad s(\alpha)$($\alpha$ 的起点)；$t:Q_1\to Q,\alpha\quad t(\alpha)$($\alpha$ 的终点)。

这里对星形箭图的 k 个分支用指标集表示，$i=1,2,\cdots,k$，第 i 个分支的第 j 个点记为$[i,j]$，该 sink 点记为 $0=[i,0]$，$i=1,2,\cdots,k$，从点$[i,j]$指向$[i,j-1]$的箭记为 $\alpha_{i,j}$，即点集 $Q_0=\{0\}\cup\{[i,j]\mid 1\leqslant i\leqslant k,1\leqslant j\leqslant d_i\}$；箭集 $Q_1=\{a_{ij}\mid 1\leqslant i\leqslant k,1\leqslant j\leqslant d_i\}$，其中 $s(\alpha_{ij})=[i,j]$，$t(\alpha_{ij})=[i,j-1]$。

借助余积的定义，本文刻画了星形箭图所对应的偏序集的正向系的正向极限，作为应用，得到一类 Dynkin 箭图所对应的偏序集的正向系的正向极限。

* **收稿日期**:2015-09-27 **修回日期**:2015-12-02 **网络出版时间**:2016-07-07 16:35
资助项目:国家自然科学基金(No. 11071040)；2008 年福建省高校服务海西建设重点项目(No. 2008HX03)；福建省自然科学基金(No. 2016J01002；No. 2015J01590)；福建省高校杰出青年科研人才培育计划(2016)
作者简介:陈梅香，女，副教授，研究方向为代数及应用，E-mail:cmxmath@126.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20160707.1635.074.html

1 预备知识

引理 1 设 $Q(Q_0,Q_1,s,t)$ 是一个无圈(无 loop 和无 cycle)的箭图，I 以箭图 Q 中的点集 Q_0 为元素，对任意的 $x,y\in Q_0$，如果点 x 到点 y 存在路，则称 x 与 y 之间有关系，并记为 $x\leqslant y$，则 $(I,\leqslant)$ 是一个偏序集。

由偏序集的定义，引理 1 显然成立。

注 1 文中箭图 Q 所对应的偏序集均指引理 1 中的偏序集。若 Q 为星形箭图，此时 I 的偏序关系为：$[i,d_i]\leqslant[i,d_i-1]\leqslant\cdots\leqslant[i,1]\leqslant[i,0]=0,i=1,2,\cdots,k$，且各分支之间没有关系。

接下来回顾正向极限的定义，具体可参见文献[8-9]。

定义 1 设 $\{A_i,\varphi_j^i\}$ 为范畴 $\mathscr{A}$ 中的一个以 I 为指标集的正向系，则正向系 $\{A_i,\varphi_j^i\}$ 的正向极限是指 $\mathscr{A}$ 的一个对象 A 与一簇态射 $\alpha_i\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A_i,A)$，使当 $i\leqslant j$ 时，$\alpha_i=\alpha_j\varphi_j^i$，并且 $\forall X\in Ob\mathscr{A}$，$\forall f_i\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A_i,X)$，只要当 $i\leqslant j$ 时，$f_i=f_j\varphi_j^i$，就必有唯一的一个 $\beta\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,X)$，使对一切 i，恒有 $f_i=\beta\alpha_i$，即图 2 为交换图，此时记正向系 $\{A_i,\varphi_j^i\}$ 的正向极限(简称为极限)为 $\{A,\alpha_i\}$。

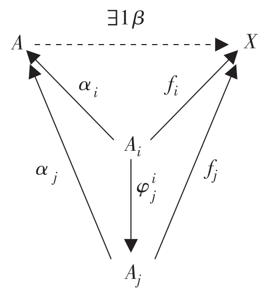

图 2 正向极限

Fig. 2 Direct limit

为方便读者，这里列出正向系的定义如下。

定义 2[10] 设 $\mathscr{I}$ 是偏序集 I 做成的小范畴，F 是范畴 $\mathscr{I}$ 到范畴 $\mathscr{A}$ 的一个函子。$\forall i,j\in Ob\mathscr{I}$，$\Gamma_j^i\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{I}}(i,j)$，$F(i)=\mathscr{A}_i\in Ob\mathscr{A}$，$F(\Gamma_j^i)=\varphi_j^i\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A_i,A_j)$，且 $\varphi_i^i=1_{A_i}$，当 $i\leqslant j\leqslant k$ 时，$\varphi_k^j\varphi_j^i=\varphi_k^i$。那么 $\{A_i,\varphi_j^i\}$ 叫做 $\mathscr{A}$ 的一个以 I 为指标集的正向系，也称函子 F 为正向系。当 I 是一个有限集时，称 $\{A_i,\varphi_j^i\}$ 是 $\mathscr{A}$ 的一个以 I 为指标集的有限正向系。

引理 2[10] 设 $\mathscr{A}$ 是范畴，若 $\mathscr{A}$ 中正向系 $\{A_i,\varphi_j^i\}$ 的极限 $\{A,\alpha_i\}$ 存在，则基本唯一。

对余完备范畴 $\mathscr{A}$，任意正向系的正向极限是存在的，原因如下。

命题 1[11] 设 $\mathscr{A}$ 是一个范畴，下面表述等价：

(1) $\mathscr{A}$ 是(有限)余完备的；

(2) $\mathscr{A}$ 中存在任意(有限)直和及差余核；

(3) $\mathscr{A}$ 中的任意(有限)正向系的正向极限都存在。

注 2 结合 Abel 范畴定义，Abel 范畴是有限余完备范畴。

为证明主定理的需要，引进余积的定义。

定义 3[10] 设 $\mathscr{A}$ 是范畴，$A_i\in Ob\mathscr{A}$，$i\in I$，称二元组 $(A,\{\lambda_i\})$ 为 $\{A_i\,|\,i\in I\}$ 的余积，其中 $A\in Ob\mathscr{A}$，$\{\lambda_i:A_i\to A\}$ 是一族态射使得对所有的二元组 $(B,\{f_i\})$，其中 $B\in Ob\mathscr{A}$，$\{f_i:A_i\to B\}$ 是一族态射，均存在唯一的态射 $f:A\to B$，使得 $f\lambda_i=f_i$ 对所有的 $i\in I$ 都成立，即有如下交换图 3。

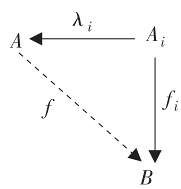

图 3 余积

Fig. 3 Coproduct

一般地，本文简单地称 A 为 $\{A_i\,|\,i\in I\}$ 的余积，记为 $\coprod\limits_{i\in I}A_i$。

2 主要结论

由引理 2，以 I 为指标集的 Abel 范畴 $\mathscr{A}$ 的正向系 $\{A_i,\varphi_j^i\}$ 的正向极限存在，具体是：

定理 1 设箭图 Q 为星形箭图，I 是该箭图所对应的偏序集，则以 I 为指标集的 Abel 范畴 $\mathscr{A}$ 的正向系 $\{A_i,\varphi_j^i\}$ 的正向极限同构于 A_i 的余积 $(A,\{\lambda_i\})$，其中 $\lambda_i=\lambda_j\varphi_j^i$。

证明 因为 $\mathscr{A}$ 是 Abel 范畴，由命题 1 知对 $\mathscr{A}$ 中的任意正向系 $\{A_i,\varphi_j^i\}$ 的正向极限存在，且对 $\{A_i\,|\,i\in I\}$ 及一族态射 $\{\lambda_i\,|$ 其中 $\lambda_i=\lambda_j\varphi_j^i\}$，余积存在，简记为 A。

令 $f_i=\lambda_i:A_i\to A$，则 $f_j\varphi_j^i=\lambda_j\varphi_j^i=\lambda_i=f_i$，又对 $\mathscr{A}$ 中任意对象 X 及一族态射 $g_i:A_i\to X$，且满足 $g_i=g_j\varphi_j^i$，故有 $g_i=g_0\varphi_0^i$，$i\in I$。

由定义 3，存在唯一 $\beta: A \to X$，使得 $\beta\lambda_i = g_i$，从而 $\beta f_i = \beta\lambda_i = g_i$，即图 4 为交换图。

若另有 $\gamma: A \to X$，使得 $\gamma f_i = g_i$，则 $\gamma\lambda_i = \gamma f_i = g_i$，由余积定义中的泛性，知 $\beta = \gamma$。

由定义 1（极限的定义）得 $(A, \{\lambda_i\})$ 是正向系 $\{A_i, \varphi_j^i\}$ 的正向极限，其中 $\lambda_i = \lambda_j \varphi_j^i$，$i \in I$。由引理 2 即得结论。　　证毕。

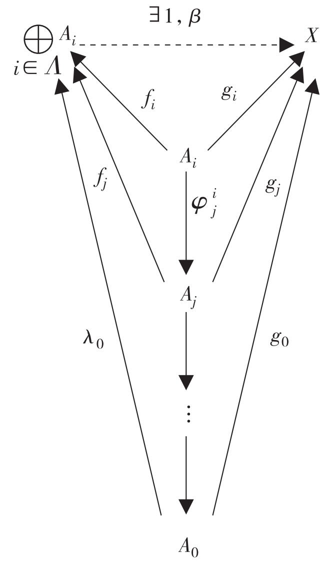

图 4　交换图

Fig. 4　Commutative diagrams

作为应用，本文考虑一类特殊的 Dynkin 箭图的极限。

命题 2　若箭图 Q 的底图为 Dynkin 图[7]，各分支的交叉点为 sink 点（A_n 只有一个分支，除外），且只有这么一个 sink 点，I 是该箭图所对应的偏序集，则以 I 为指标集的 Abel 范畴 $\mathscr{A}$ 的正向系 $\{A_i, \varphi_j^i\}$ 的正向极限同构于 A_i 的余积 $(A, \{\lambda_i\})$，其中 $\lambda_i = \lambda_j \varphi_j^i$。

证明　当箭图 Q 是一个 A_n 型的 Dynkin 图，此时 Q 是一个只有 1 个分支的星形箭图，其中 $d_1 = n-1$；当箭图 Q 是一个 D_n 型的 Dynkin 图，如图 5 所示，此时 Q 是一个有 3 个分支的星形箭图，其中 $d_1 = d_2 = 1$，$d_3 = n-3$；当箭图 Q 是一个 E_6 型的 Dynkin 图，如图 6 所示，此时 Q 是一个有 3 个分支的星形箭图，其中 $d_1 = 2$，$d_2 = 1$，$d_3 = 2$；当箭图 Q 是一个 E_7 型的 Dynkin 图，如图 7 所示，此时 Q 是一个有 3 个分支的星形箭图，其中 $d_1 = 2$，$d_2 = 1$，$d_3 = 3$；当箭图 Q 是一个 E_8 型的 Dynkin 图，如图 8 所示，此时 Q 是一个有 3 个分支的星形箭图，其中 $d_1 = 2$，$d_2 = 1$，$d_3 = 4$。

故由定理 1，易知此时以 I 为指标集的 Abel 范畴 $\mathscr{A}$ 的正向系 $\{A_i, \varphi_j^i\}$ 的正向极限同构于 A_i 的余积 $(A, \{\lambda_i\})$，其中 $\lambda_i = \lambda_j \varphi_j^i$。　　证毕

图 5　D_n 型的 Dynkin 图

Fig. 5　Dynkin graph for D_n type

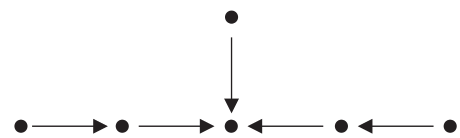

图 6　E_6 型的 Dynkin 图

Fig. 6　Dynkin graph for E_6 type

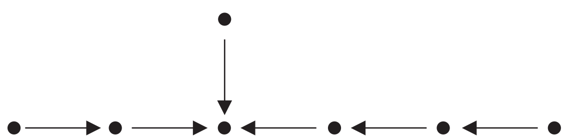

图 7　E_7 型的 Dynkin 图

Fig. 7　Dynkin graph for E_7 type

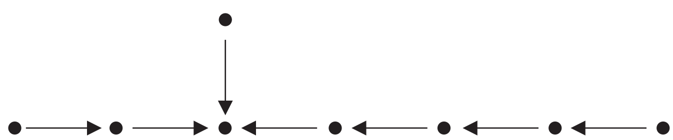

图 8　E_8 型的 Dynkin 图

Fig. 8　Dynkin graph for E_8 type

3 结语

星形箭图是一类常见的箭图，包含了 A_n 及 D_n 箭图。以星形箭图所对应的偏序集 I 为指标集的 Abel 范畴 $\mathscr{A}$ 自然是有限余完备范畴，$\mathscr{A}$ 中的任意（有限）正向系的正向极限都存在。本文进一步对星形箭图所对应的偏序集的正向系的正向极限进行刻画，恰恰同构于 A_i 的余积，作为应用，得到一类 Dynkin 箭图所对应的偏序集的正向系的正向极限。事实上，可以类似讨论星形箭图所对应的偏序集的逆向系的极限。

参考文献：

[1] Glöckner H. Direct limits of infinite-dimensional Lie groups [J]. Developments and Trends in Infinite-Dimensional Lie Theory Progress in Mathematics, 2011, 288: 243-280.

[2] Baranov A A. Classification of the direct limits of involution simple associative algebras and the corresponding dimension groups[J]. Journal of Algebra, 2013, 381: 73-95.

[3] Etingof P, Gan W L, Oblomkov A. Generalized double affine Hecke algebras of higher rank [J]. J Reine Angew

Math,2006,600:177-201.

[4] Chari V,Greenstein J. Current algebras,highest weight categories and quivers[J]. Advances in Mathematics,2007,216:811-840.

[5] Weist T,Yusenko K. Unitarizable representations of quivers[J]. Algebras and Representation Theory,2013,16(5):1349-1383.

[6] Albeverioa S,Ostrovskyid V,Samoilenkod Y. On functions on graphs and representations of a certain class of algebras [J]. Journal of Algebra,2007,308(2):567-582.

[7] Assem I,Simson D,Skowronski A. Elements of therepresentation theory of associative algebras[M]. Oxford:Cambridge University Press,2006.

[8] 周伯壎. 同调代数[M]. 北京:科学出版社,1988.
Zhou B X. Homological algebra[M]. Beijing:Science Press,1988.

[9] 李桃生. 范畴与同调代数基础[M]. 武汉:华中师范大学出版社,1988.
Li T S. Elements ofcategory and homological algebra[M]. Wuhan:Central China Normal University Press,1988.

[10] 陈志杰. 代数基础(模、范畴、同调代数与层)[M]. 上海:华东师范大学出版社,2001.
Chen Z J. Elements of algebra(module,category,homological algebra and sheave) [M]. Shanghai:East China Normal University Press,2001.

[11] Freyd J P. Abeliancategories[M]. New York:Harper and Row,1964.

Direct Limits of Star-shaped Quivers

CHEN Meixiang[1,2], CHEN Qinghua[2], YAN Yishui[2]

(1. School of Mathematics, Putian University, Putian Fujian 351100;

2. School of Mathematics and Computer Science, Fujian Normal University, Fuzhou 350007, China)

Abstract: The star-shaped quiver is a quiver which only has a sink vertex connecting with some linear branches, it is a common quiver. And as an important object in category theory, direct limit plays an important role in algebra and cohomology in category. As well known, for a cocomplete category $\mathscr{A}$, direct limits of any direct systems always exist. In this paper, the direct limits of directed systems of posets, which are corresponded to the star-shaped quivers, are characterized; it is isomorphic to the coproduct of direct systems. Finally, as an application, the direct limits of directed systems of posets, corresponding to a class of Dynkin quivers, are obtained.

Key words: star-shaped quiver; direct limit; poset; Dynkin quiver

(责任编辑 游中胜)