DOI:10.11721/cqnuj20160406

# 非奇异 M-矩阵的 Hadamard 积的最小特征值的下界估计*

赵建兴，桑彩丽
(贵州民族大学 理学院，贵阳 550025)

**摘要**：针对非奇异 M-矩阵 $\boldsymbol{B}$ 和非奇异 M-矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的 Hadamard 积的最小特征值 $\tau(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})$ 的下界估计问题，分别利用 Gerschgorin 圆盘定理和 Brauer 卵形定理，给出了 $\tau(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})$ 的两个新的下界估计式 $\tau(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})\geqslant\min\limits_{i\in\mathbf{N}}\left\{\dfrac{b_{ii}-(b_{ii}-\tau(\boldsymbol{B}))m_i}{a_{ii}}\right\}$ 和 $\tau(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})\geqslant\min\limits_{i\neq j}\dfrac{1}{2}\{b_{ii}\alpha_{ii}+b_{jj}\alpha_{jj}-[(b_{ii}\alpha_{ii}-b_{jj}\alpha_{jj})^2+4m_im_j\alpha_{ii}\alpha_{jj}(b_{ii}-\tau(\boldsymbol{B}))(b_{jj}-\tau(\boldsymbol{B}))]^{\frac{1}{2}}\}$，新估计式改正并改进了某些已有结果。数值例子显示新的下界比某些已有下界更接近 $\tau(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})$。

**关键词**：M-矩阵；Hadamard 积；最小特征值；下界

**中图分类号**：O151.21　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2016)04-0065-04

生物学、物理学和经济数学等领域中的诸多问题都与 M-矩阵联系密切。矩阵的 Hadamard 积在概率论中的特征函数和偏微分方程中的弱极小原理等方面的研究中应用广泛[1-2]。受这些应用背景的影响，最近许多学者对非奇异 M-矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与非奇异 M-矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵的 Hadamard 积的最小特征值 $\tau(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})$ 的下界估计进行了深入研究，给出了一系列好的估计式[3-9]。本文继续研究这一问题，给出 $\tau(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})$ 的新的下界估计式。

## 1 预备知识

用 $\mathbf{R}^{n\times n}(\mathbf{C}^{n\times n})$ 表示 $n$ 阶实(复)矩阵集，令 $\mathbf{N}=\{1,2,\cdots,n\}$，$n\geqslant 2$。

**定义 1**[1]　设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in\mathbf{R}^{n\times n}$，若 $a_{ij}\geqslant 0$，$i,j\in\mathbf{N}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为非负矩阵，记为 $\boldsymbol{A}\geqslant\mathbf{0}$。

**定义 2**[2]　设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in\mathbf{R}^{n\times n}$，若 $a_{ij}\leqslant 0$，$i\neq j$，$i,j\in\mathbf{N}$，$\boldsymbol{A}$ 非奇异，且 $\boldsymbol{A}^{-1}\geqslant\mathbf{0}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异 M-矩阵。用 $M_n$ 表示非奇异 M-矩阵的集合；用 $\sigma(\boldsymbol{A})$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的谱，并称 $\tau(\boldsymbol{A})=\min\{\mathrm{Re}(\lambda)\,|\,\lambda\in\sigma(\boldsymbol{A})\}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的最小特征值。

**定义 3**[2]　设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$，$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]\in\mathbf{C}^{m\times n}$，用 $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的对应元素相乘而成的 $m\times n$ 矩阵，即 $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}=[a_{ij}b_{ij}]$，称其为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的 Hadamard 积。

**定义 4**[2]　设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in\mathbf{C}^{n\times n}$，若对任意 $i\in\mathbf{N}$，$|a_{ii}|>\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为行严格对角占优矩阵。

为叙述方便先给出一些记号。$\forall\, i,j,k\in\mathbf{N}$，$j\neq i$，记：

$$r_{ji}=\frac{|a_{ji}|}{|a_{jj}|-\sum\limits_{k\neq j,i}|a_{jk}|},\ r_i=\max_{j\neq i}\{r_{ji}\};\ s_{ji}=\frac{|a_{ji}|+\sum\limits_{k\neq j,i}|a_{jk}|r_k}{|a_{jj}|},\ s_i=\max_{j\neq i}\{s_{ji}\};$$

$$m_{ji}=\frac{|a_{ji}|+\sum\limits_{k\neq j,i}|a_{jk}|r_i}{|a_{jj}|},\ m_i=\max_{j\neq i}\{m_{ji}\}。$$

2011 年崔润卿等人[3]给出如下结果。

**定理 1**[3]　设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$，$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]\in M_n$，则 $\tau(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})\geqslant\min\limits_{i\in\mathbf{N}}\left\{\dfrac{b_{ii}-(b_{ii}-\tau(\boldsymbol{B}))s_i}{a_{ii}}\right\}$。

**注 1**　文献[4]用一个反例说明文献[5]中引理 2.2(a)是不正确的，而定理 1 的证明用到了文献[5]中的引理

* **收稿日期**：2015-07-01　**修回日期**：2016-05-19　**网络出版时间**：2016-07-07 16:35

**资助项目**：国家自然科学基金(No. 11361074；No. 11501141)；贵州省科学技术基金项目(No. 黔科合 J 字[2015]2073)；贵州民族大学引进人才科研基金(No. 15XRY003)；贵州民族大学科研基金(No. 15XJS009)

**作者简介**：赵建兴，男，副教授，博士，研究方向为数值代数，E-mail：zjx810204@163.com

**网络出版地址**：http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20160707.1635.068.html

2.2(a),因此定理1不一定正确。

**引理1**[6] 设 $\boldsymbol{A}\in M_n$ 是行严格对角占优矩阵,则 $\boldsymbol{A}^{-1}=[\alpha_{ij}]$ 存在,且 $\alpha_{ji}\leqslant m_{ji}\alpha_{ii}\leqslant m_i\alpha_{ii}$,$\alpha_{ii}\geqslant\frac{1}{a_{ii}}$,$i\neq j,i,j\in\mathbf{N}$。

**引理2**[10] 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in\mathbf{R}^{n\times n}$,则 $\boldsymbol{A}$ 的任意特征值 $\lambda$ 都属于下列区域之一:

(a) Gerschgorin 圆盘 $\bigcup_{i\in\mathbf{N}}\left\{z\in\mathbf{C}:|z-a_{ii}|\leqslant\sum_{k\neq i}|a_{ik}|\right\}$;

(b) Brauer 卵形区域 $\bigcup_{\substack{i\neq j\\ i,j\in\mathbf{N}}}\left\{z\in\mathbf{C}:|z-a_{ii}|\cdot|z-a_{jj}|\leqslant\sum_{k\neq i}|a_{ik}|\sum_{k\neq j}|a_{jk}|\right\}$。

**引理3**[11] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbf{R}^{n\times n}$,$\boldsymbol{D},\boldsymbol{E}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 是对角矩阵,则

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A})\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{DAE})\circ\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{DA})\circ(\boldsymbol{BE})=(\boldsymbol{AE})\circ(\boldsymbol{DB})=\boldsymbol{A}\circ(\boldsymbol{DBE})。$$

# 2 主要结果

应用引理1、引理2的(a)和类似于定理1的证明,可得如下定理。

**定理2** 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$,$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]\in M_n$,则 $\tau(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})\geqslant\min_{i\in\mathbf{N}}\left\{\frac{b_{ii}-(b_{ii}-\tau(\boldsymbol{B}))m_i}{a_{ii}}\right\}$。

下面给出 $\tau(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})$ 的另外一个估计式。

**定理3** 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$,$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]\in M_n$,$\boldsymbol{A}^{-1}=[\alpha_{ij}]$,则

$$\tau(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})\geqslant\min_{i\neq j}\frac{1}{2}\{b_{ii}\alpha_{ii}+b_{jj}\alpha_{jj}-[(b_{ii}\alpha_{ii}-b_{jj}\alpha_{jj})^2+4(b_{ii}-\tau(\boldsymbol{B}))(b_{jj}-\tau(\boldsymbol{B}))m_im_j\alpha_{ii}\alpha_{jj}]^{\frac{1}{2}}\}。$$

**证明** (a) 假设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 均是不可约矩阵。由 $\boldsymbol{A}\in M_n$ 知存在正对角矩阵 $\boldsymbol{D}$,使得 $\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{AD}$ 是行严格对角占优M-矩阵[7]。由引理3得

$$\tau(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})=\tau(\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{D})=\tau(\boldsymbol{B}\circ(\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{D}))=\tau(\boldsymbol{B}\circ(\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{AD})^{-1})。$$

因而,为方便起见,且不失一般性,可设 $\boldsymbol{A}$ 是行严格对角占优M-矩阵。

因为 $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]\in M_n$ 是不可约矩阵,故存在正向量 $\boldsymbol{u}=[u_1,u_2,\cdots,u_n]^{\mathrm{T}}$,使得 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\tau(\boldsymbol{B})\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}$,由此可得 $b_{ii}-\sum_{j\neq i}\frac{|b_{ji}|u_j}{u_i}=\tau(\boldsymbol{B})$。

设 $\boldsymbol{U}=\mathrm{diag}[u_1,u_2,\cdots,u_n]$,则 $\boldsymbol{U}$ 是非奇异对角矩阵。令 $\overline{\boldsymbol{B}}=[\bar{b}_{ij}]=\boldsymbol{UBU}^{-1}$,则

$$\overline{\boldsymbol{B}}=[\bar{b}_{ij}]=\boldsymbol{UBU}^{-1}=\begin{bmatrix} b_{11} & \frac{b_{12}u_1}{u_2} & \cdots & \frac{b_{1n}u_1}{u_n}\\ \frac{b_{21}u_2}{u_1} & b_{22} & \cdots & \frac{b_{2n}u_2}{u_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{b_{n1}u_n}{u_1} & \frac{b_{n2}u_n}{u_2} & \cdots & b_{nn}\end{bmatrix}。$$

显然 $\overline{\boldsymbol{B}}$ 是不可约非奇异M-矩阵,且 $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{U}^{-1}=(\boldsymbol{UBU}^{-1})\circ\boldsymbol{A}^{-1}=\overline{\boldsymbol{B}}\circ\boldsymbol{A}^{-1}$,故 $\tau(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})=\tau(\overline{\boldsymbol{B}}\circ\boldsymbol{A}^{-1})$。

设 $\lambda=\tau(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})$,则 $0<\lambda<b_{ii}\alpha_{ii}$,$i\in\mathbf{N}$。由引理2的(b)知,存在正整数对 $i,j\in\mathbf{N}$,$i\neq j$,使得

$$|(\lambda-b_{ii}\alpha_{ii})(\lambda-b_{jj}\alpha_{jj})|\leqslant\sum_{k\neq i}|\bar{b}_{ki}\alpha_{ki}|\sum_{k\neq j}|\bar{b}_{kj}\alpha_{kj}|\leqslant\sum_{k\neq i}\left|\frac{b_{ki}u_k}{u_i}\alpha_{ki}\right|\sum_{k\neq j}\left|\frac{b_{kj}u_k}{u_j}\alpha_{kj}\right|\leqslant$$
$$\sum_{k\neq i}\left|\frac{b_{ki}u_k}{u_i}m_{ki}\alpha_{ii}\right|\sum_{k\neq j}\left|\frac{b_{kj}u_k}{u_j}m_{kj}\alpha_{jj}\right|\leqslant\sum_{k\neq i}\left|\frac{b_{ki}u_k}{u_i}m_i\alpha_{ii}\right|\sum_{k\neq j}\left|\frac{b_{kj}u_k}{u_j}m_j\alpha_{jj}\right|=$$
$$(b_{ii}-\tau(\boldsymbol{B}))m_i\alpha_{ii}(b_{jj}-\tau(\boldsymbol{B}))m_j\alpha_{jj},$$

即 $(\lambda-b_{ii}\alpha_{ii})(\lambda-b_{jj}\alpha_{jj})\leqslant(b_{ii}-\tau(\boldsymbol{B}))(b_{jj}-\tau(\boldsymbol{B}))m_i\alpha_{ii}m_j\alpha_{jj}$。

由此得

$$\lambda\geqslant\frac{1}{2}\{b_{ii}\alpha_{ii}+b_{jj}\alpha_{jj}-[(b_{ii}\alpha_{ii}-b_{jj}\alpha_{jj})^2+4(b_{ii}-\tau(\boldsymbol{B}))(b_{jj}-\tau(\boldsymbol{B}))m_i\alpha_{ii}m_j\alpha_{jj}]^{\frac{1}{2}}\}\geqslant$$
$$\min_{i\neq j}\frac{1}{2}\{b_{ii}\alpha_{ii}+b_{jj}\alpha_{jj}-[(b_{ii}\alpha_{ii}-b_{jj}\alpha_{jj})^2+4(b_{ii}-\tau(\boldsymbol{B}))(b_{jj}-\tau(\boldsymbol{B}))m_i\alpha_{ii}m_j\alpha_{jj}]^{\frac{1}{2}}\}。$$

(b) 假设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 中至少有一个是可约矩阵。令 $\boldsymbol{T}=[t_{ij}]$ 是 $n$ 阶置换阵,其中 $t_{12}=t_{23}=\cdots=t_{n-1,n}=t_{n1}=1$,其

余 $t_{ij}$ 为零，则对任意充分小的正数 $\varepsilon$，$\boldsymbol{A}-\varepsilon\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{B}-\varepsilon\boldsymbol{T}$ 都是不可约非奇异 M-矩阵。用 $\boldsymbol{A}-\varepsilon\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{B}-\varepsilon\boldsymbol{T}$ 分别代替情形(a)中的 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，类似于情形(a)的讨论，并令 $\varepsilon\to 0$，利用连续性可得结论成立。

下面给出定理 2 和定理 3 的比较定理。

**定理 4**　设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$，$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]\in M_n$，$\boldsymbol{A}^{-1}=[\alpha_{ij}]$，则

$$\min_{i\neq j}\frac{1}{2}\{b_{ii}\alpha_{ii}+b_{jj}\alpha_{jj}-[(b_{ii}\alpha_{ii}-b_{jj}\alpha_{jj})^2+4(b_{ii}-\tau(\boldsymbol{B}))(b_{jj}-\tau(\boldsymbol{B}))m_im_j\alpha_{ii}\alpha_{jj}]^{\frac{1}{2}}\}\geqslant\min_{i\in\mathbf{N}}\left\{\frac{b_{ii}-(b_{ii}-\tau(\boldsymbol{B}))m_i}{a_{ii}}\right\}。$$

**证明**　不失一般性，对任意 $i,j\in\mathbf{N}$，$i\neq j$，假设 $b_{ii}\alpha_{ii}-(b_{ii}-\tau(\boldsymbol{B}))m_i\alpha_{ii}\geqslant b_{jj}\alpha_{jj}-(b_{jj}-\tau(\boldsymbol{B}))m_j\alpha_{jj}$，由此可得 $(b_{ii}-\tau(\boldsymbol{B}))m_i\alpha_{ii}\leqslant b_{ii}\alpha_{ii}-b_{jj}\alpha_{jj}+(b_{jj}-\tau(\boldsymbol{B}))m_j\alpha_{jj}$。从而

$$\frac{1}{2}\{b_{ii}\alpha_{ii}+b_{jj}\alpha_{jj}-[(b_{ii}\alpha_{ii}-b_{jj}\alpha_{jj})^2+4(b_{ii}-\tau(\boldsymbol{B}))(b_{jj}-\tau(\boldsymbol{B}))m_i\alpha_{ii}m_j\alpha_{jj}]^{\frac{1}{2}}\}\geqslant$$

$$\frac{1}{2}\{b_{ii}\alpha_{ii}+b_{jj}\alpha_{jj}-[(b_{ii}\alpha_{ii}-b_{jj}\alpha_{jj})^2+4(b_{jj}-\tau(\boldsymbol{B}))m_j\alpha_{jj}(b_{ii}\alpha_{ii}-b_{jj}\alpha_{jj}+(b_{jj}-\tau(\boldsymbol{B}))m_j\alpha_{jj})]^{\frac{1}{2}}\}=$$

$$\frac{1}{2}\{b_{ii}\alpha_{ii}+b_{jj}\alpha_{jj}-[(b_{ii}\alpha_{ii}-b_{jj}\alpha_{jj}+2(b_{jj}-\tau(\boldsymbol{B}))m_j\alpha_{jj})^2]^{\frac{1}{2}}\}=$$

$$\frac{1}{2}\{b_{ii}\alpha_{ii}+b_{jj}\alpha_{jj}-(b_{ii}\alpha_{ii}-b_{jj}\alpha_{jj}+2(b_{jj}-\tau(\boldsymbol{B}))m_j\alpha_{jj})\}=[b_{jj}-(b_{jj}-\tau(\boldsymbol{B}))m_j]\alpha_{jj}\geqslant$$

$$\frac{b_{jj}-(b_{jj}-\tau(\boldsymbol{B}))m_j}{a_{jj}}\geqslant\min_{i\in\mathbf{N}}\left\{\frac{b_{ii}-(b_{ii}-\tau(\boldsymbol{B}))m_i}{a_{ii}}\right\}。$$

证毕

**注 2**　定理 4 说明定理 3 的结果比定理 2 的结果精确。

## 3 数值算例

下面给出一个例子来验证理论结果。

**例 1**　设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4&-1&-1&-1\\-2&5&-1&-1\\0&-2&4&-1\\-1&-1&-1&4\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-0.5&0&0\\-0.5&1&-0.5&0\\0&-0.5&1&-0.5\\0&0&-0.5&1\end{bmatrix}$，易知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in M_4$。应用文献[7]中定理 5.7.31、文献[4]中定理 4.8、文献[8]中定理 9 以及文献[9]中定理 1，分别得：

$$\tau(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})\geqslant\tau(\boldsymbol{B})\min\alpha_{ii}=0.07;\tau(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})\geqslant\min_{i\in\mathbf{N}}\left\{\frac{b_{ii}-m_i\sum\limits_{j\neq i}|b_{ji}|}{a_{ii}}\right\}=0.075;$$

$$\tau(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})\geqslant(1-\rho(J_{\boldsymbol{A}})\rho(J_{\boldsymbol{B}}))\tau(\boldsymbol{B})\min_{i\in\mathbf{N}}\frac{b_{ii}}{a_{ii}}=0.0762;$$

$$\tau(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})\geqslant\min_{i\in\mathbf{N}}\left\{\frac{b_{ii}-p_i^{(10)}\sum\limits_{j\neq i}|b_{ji}|}{a_{ii}}\right\}=0.0833。$$

但应用本文定理 3 得 $\tau(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})\geqslant 0.1761$。可见定理 3 的结果优于文献[4,7-9]中的相关结果。实际上，$\tau(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})=0.2148$。

**参考文献：**


[1] 陈景良，陈向辉. 特殊矩阵[M]. 北京：清华大学出版社，2000.
Chen J L，Chen X H. Special matrices[M]. Beijing：Qing Hua University Press，2000.

[2] 黄廷祝，杨传胜. 特殊矩阵分析及应用[M]. 北京：科学出版社，2003.
Huang T Z，Yang C S. Special matrix analysis and applications[M]. Beijing：Science Press，2003.

[3] 崔润卿，司纪龙. 矩阵的 Hadamard 积最小特征值的下界估计[J]. 河南理工大学学报：自然科学版，2011，30(4)：493-496.
Cui R Q，Si J L. Estimate of lower bounds for the minimum eigenvalue of Hadamard product of matrices[J]. Journal of Henan Polytechnic University：Natural Science，2011，30(4)：493-496.

[4] Zhou D M，Chen G L，Wu G X，et al. On some new bounds for eigenvalues of the Hadamard product and the Fan prod-

uct of matrices[J]. Linear Algebra Appl, 2013, 438: 1415-1426.

[5] Li Y T, Li Y Y, Wang R W, et al. Some new bounds on eigenvalues of the Hadamard product and the Fan product of matrices[J]. Linear Algebra Appl, 2010, 432: 536-545.

[6] Li Y T, Chen F B, Wang D F. New lower bounds on eigenvalue of the Hadamard product of an M-matrix and its inverse[J]. Linear Algebra Appl, 2009, 430: 1423-1431.

[7] Horn R A, Johnson C R. Topics in matrix analysis[M]. New York: Cambridge University Press, 1991.

[8] Zhou D M, Chen G L, Wu G X, et al. Some inequalities for the Hadamard product of an M-matrix and an inverse M-matrix[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2013, 16: 1-10.

[9] Zhao J X, Wang F, Sang C L. Some inequalities for the minimum eigenvalue of the Hadamard product of an M-matrix and an inverse M-matrix[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2015, 92: 1-9.

[10] Varga R S. Gerschgorin and his circles[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2004.

[11] Berman A, Plemmons R J. Nonnegative matrices in the mathematical sciences[M]. New York: Academic Press, 1979.

## Estimate of the Lower Bounds for the Minimum Eigenvalue of the Hadamard Product of Nonsingular M-matrices

ZHAO Jianxing, SANG Caili

(College of Science, Guizhou Minzu University, Guiyang 550025, China)

**Abstract**: By Gerschgorin's disk theorem and Brauer's oval theorem, respectively, two new lower bounds for the minimum eigenvalue $\tau(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})$ of the Hadamard product of a nonsingular M-matrix $\boldsymbol{B}$ and the inverse of a nonsingular M-matrix $\boldsymbol{A}$ are given, which are $\tau(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})\geqslant\min\limits_{i\in\mathbf{N}}\left\{\frac{b_{ii}-(b_{ii}-\tau(\boldsymbol{B}))m_i}{\alpha_{ii}}\right\}$ and $\tau(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})\geqslant\min\limits_{i\neq j}\frac{1}{2}\{b_{ii}\alpha_{ii}+b_{jj}\alpha_{jj}-[(b_{ii}\alpha_{ii}-b_{jj}\alpha_{jj})^2+4m_im_j\alpha_{ii}\alpha_{jj}(b_{ii}-\tau(\boldsymbol{B}))(b_{jj}-\tau(\boldsymbol{B}))]^{\frac{1}{2}}\}$, and correct and improve some known results. Numerical examples are given to show that these new lower bounds in this paper can approach the real value of the minimum eigenvalue than some existing ones.

**Key words**: M-matrix; Hadamard product; minimum eigenvalue; lower bounds

(责任编辑 黄 颖)