DOI:10.11721/cqnuj20160422

双向联想记忆神经网络的指数输入-状态稳定性*

李建军, 杨志春
(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

摘要:研究关于具有多个时滞效应和时变外部输入双向联想记忆神经网络模型的指数输入-状态稳定性分析。首先,建立了双向联想记忆神经网络模型,该模型具有多个时滞效应并且外部输入是时变的。而且模型中非线性神经元激励函数不要求是有界的,也不要求是光滑的。然后给出双向联想记忆神经网络指数输入-状态稳定性的一个定义,利用 Lyapunov 泛函和线性矩阵不等式 $-m\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{QX}+2l\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi Y}\leqslant l^2\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}(m\boldsymbol{Q})^{-1}\boldsymbol{\pi Y}$ 和 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\leqslant\varepsilon\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda X}+\varepsilon\backslash\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{Y}$ 的方法,获得含有多时滞效应和时变外部输入的双向联想记忆神经网络模型指数输入-状态稳定性的一个充分条件。

关键词:时滞;双向联想记忆神经网络;指数输入-状态稳定;Lyapunov 泛函
中图分类号:O175 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-6693(2016)04-0079-06

1 研究背景

双向联想记忆(Bidirectional associative memory,BAM)神经网络模型[1-3]是由 Kosko 首次提出来的一种经典的递归神经网络。Kosko 假设神经元在处理输入信号和输出信号的过程都是被即时处理的,同时处理输入信号时也是被神经元即时的吸收。但是由于神经元轴突种类大小比较繁多、传输路径比较长以及神经元的个数较大等各种因素的影响,神经元在传输信号过程中并不一定总是即时被传输的,所以处理过程通常有时间延迟[4-5],由于双向联想记忆神经网络模型的应用比较广泛,在模式辨识和模式分类等各领域应用中具有较大的实际应用前景,从而目前已有许多学者获得了不少判别稳定性的一些相关判据[6-15]。比如,Wan 和 Tan 等人[7]研究了双向联想记忆神经网络模型平衡点的局部稳定的性质,得到了在平衡点指数收敛速度的一些估计以及确定指数吸引域的若干方法和技巧。Dong 和 Jiang 等人[12]通过构造线性矩阵不等式的方法以及构造新的 Lyapunov 泛函技术,得到了关于神经网络的稳定性、指数稳定性的一些条件与结果。但是,神经网络输入-状态稳定的研究成果不多[16-17]。Jiang 和 Shen 等人[16]针对非自治的动态神经网络模型,将其等效成非线性仿射控制系统,建立数学模型,给出了输入-状态稳定的一些充分条件,并分析了平衡点的存在唯一性以及渐近稳定性,通过构造新的 Lyapunov 函数的方法,获得了该模型渐近稳定性的若干充分条件。Yang 和 Zhou[17]研究了有时变的动态神经网络,通过运用一些线性矩阵不等式的方法以及构造新的 Lyapunov 泛函的技术,得到该神经网络模型的输入-状态稳定性的一个充分条件。然而,相对于神经网络的输入-状态稳定,神经网络指数输入-状态稳定的结果更少[18-19]。比如,Yang 和 Zhou 等人[18]对含有变时滞递归神经网络模型的指数对输入-状态稳定性进行了分析,从而得到了变时滞递归神经网络模型指数输入-状态稳定性的一些充分条件。Xu 和 Zhou 等人[19]研究了变时滞的 Cohen-Grossberg 神经网络模型,利用 Razumikhin 技术和构造新的 Halanay 微分不等式方法,获得了该模型指数输入-状态稳定性的一些充分条件。但是仍然未涉及到对含多时滞和外部输入含时延的双向联想记忆神经网络模型的指数输入-状态稳定性的研究。

下面将主要研究外部输入随时间变化和多时滞效应的双向联想记忆神经网络模型,建立双向联想记忆神经网络模型指数输入-状态稳定性的一个判据。

* **收稿日期:**2015-10-23 **修回日期:**2016-05-16 **网络出版时间:**2016-07-07 16:33
资助项目:国家自然科学基金(No. 11471061);重庆市自然科学基金(No. CQCSTC2014JCYJA40004);重庆市高校创新团队计划(No. KJTD201308);重庆市研究生科研创新项目(No. CYS16149)
作者简介:李建军,男,研究方向为微分方程与动力系统,E-mail:cqnulijianjun@163.com;**通信作者:**杨志春,教授,E-mail:yangzhch@126.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20160707.1633.036.html

2 模型建立

主要研究如下形式的双向联想记忆神经网络：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t}=-a_ix_i(t)+\sum\limits_{j=1}^{n}u_{ij}f_j(y_j(t-\tau_j))+s_i(t),i=1,\cdots,n,\\ \dfrac{\mathrm{d}y_j(t)}{\mathrm{d}t}=-b_jy_j(t)+\sum\limits_{i=1}^{n}v_{ji}g_i(x_i(t-\sigma_i))+h_j(t),j=1,\cdots,n。\end{cases}\tag{1}$$

其中 $x_i(t)$,$y_j(t)$为神经元的状态,f_j,g_i 在 $\mathbf{R}$ 上连续,a_i,b_j 是正常数,τ_j,σ_i 为非负常数,u_{ij},v_{ji},s_i,h_j 是常数,双向联想记忆神经网络模型是由两层神经元构成,分别记为第 X 层和第 Y 层,其中第 X 层是由 n 个神经元组成的,其对应的状态向量的表示记为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,外部输入记为 $s_i(t)$;同样,第 Y 层是由 n 个神经元组成的,其对应的状态向量的表示记为 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$,外部输入记为 $h_j(t)$。为了叙述方便,记：

$$\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}\{a_1,a_2,\cdots,a_n\},\boldsymbol{B}=\mathrm{diag}\{b_1,b_2,\cdots,b_n\},\boldsymbol{W}=(u_{ij})_{n\times n}\in\mathbf{R}^{n\times n},\boldsymbol{V}=(v_{ji})_{n\times n}\in\mathbf{R}^{n\times n},$$
$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t-\tau))=(f_1(y_1(t-\tau_1)),f_2(y_2(t-\tau_2)),\cdots,f_n(y_n(t-\tau_n)))^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t-\sigma))=(g_1(x_1(t-\sigma_1)),g_2(x_2(t-\sigma_2)),\cdots,g_n(x_n(t-\sigma_n)))^{\mathrm{T}},\boldsymbol{s}(t)=(s_1(t),s_2(t),\cdots,s_n(t))^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{h}(t)=(h_1(t),h_2(t),\cdots,h_n(t))^{\mathrm{T}}。$$

那么(1)式可简写为：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{W}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t-\tau))+\boldsymbol{s}(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}(t)}{\mathrm{d}t}=-\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}(t)+\boldsymbol{V}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t-\sigma))+\boldsymbol{h}(t)。\end{cases}\tag{2}$$

对 $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$,$\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\psi}\in C$,其中 C:$C([-r,0],\mathbf{R}^n)(r>0)$为连续函数映射,$\boldsymbol{s}$,$\boldsymbol{h}$ 为有界函数,定义 $|\boldsymbol{x}|=(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}}$, $|(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})|=(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})^{\frac{1}{2}}$, $\|(\boldsymbol{\xi};\boldsymbol{\psi})\|_r=\sup\limits_{t\in[-r,0]}|(\boldsymbol{\xi}(t);\boldsymbol{\psi}(t))|$, $r=\max(\tau,\sigma)$, $\|(\boldsymbol{s};\boldsymbol{h})\|_\infty=\sup\limits_{t\in[0,+\infty)}|(\boldsymbol{s}(t);\boldsymbol{h}(t))|$。定义 γ:$\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$为连续函数,如果满足严格递增且 $\gamma(0)=0$,称函数 γ 为 K-函数。定义函数 β:$\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$,如果满足对每一个 $t\geqslant0$ 函数 $\beta(\cdot,t)$为一个 K-函数,且对于每一个 $s\geqslant0$,当 $t\to\infty$都有函数 $\beta(\cdot,t)$递减且趋于0,称函数 $\beta(\cdot,t)$为 KL-函数。为了证明结论,下面引入一些定义与引理。

定义1 双向联想记忆神经网络(2)称为输入-状态稳定的。若存在一个 KL-函数 β:$\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ 和一个 K-函数 $\gamma(\cdot)$满足：

$$|(\boldsymbol{x}(t);\boldsymbol{y}(t))|\leqslant\beta(\|(\boldsymbol{\xi};\boldsymbol{\psi})\|,t)+\gamma(\|(\boldsymbol{s};\boldsymbol{h})\|_\infty),\tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\psi}\in C$,$\boldsymbol{s}(t)$,$\boldsymbol{h}(t)\in L_\infty^n$,$t>0$,$(\boldsymbol{x}(t);\boldsymbol{y}(t))=(\boldsymbol{x}(t,[\boldsymbol{\xi};\boldsymbol{\psi}]);\boldsymbol{y}(t,[\boldsymbol{\xi};\boldsymbol{\psi}]))$为模型(2)神经元的状态量,而 $\begin{cases}\boldsymbol{x}(s)=\boldsymbol{\xi}(s)\\ \boldsymbol{y}(s)=\boldsymbol{\psi}(s)\end{cases}$ 为该模型的初始值。

定义2 双向联想记忆神经网络(2)称为指数输入-状态稳定的。若存在一个 $\lambda>0$ 和两个 K-函数 γ,β 满足：

$$|(\boldsymbol{x}(t);\boldsymbol{y}(t))|\leqslant\beta((\boldsymbol{\xi};\boldsymbol{\psi})_\tau)\mathrm{e}^{-\lambda t}+\gamma(\|(\boldsymbol{s};\boldsymbol{h})\|_\infty),\tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\psi}\in C$ 为初值,$\boldsymbol{s}(t)$,$\boldsymbol{h}(t)\in L_\infty^n$,$t>0$。

引理1[20] 设 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 为两个 n 维向量,$\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{\pi}$ 为两个 n 阶矩阵并且 $\boldsymbol{Q}>\boldsymbol{0}$,对于任意两个正数 $m>0$ 和 $l>0$ 有以下不等式成立：

$$-m\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{X}+2l\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{Y}\leqslant l^2\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}(m\boldsymbol{Q})^{-1}\pi\boldsymbol{Y}。\tag{5}$$

引理2[21] 设 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 为两个 n 阶矩阵,$\boldsymbol{\Lambda}$ 是一个 n 阶矩阵且 $\boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\Lambda}>0$,对于任意 $\varepsilon>0$ 有,

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\leqslant\varepsilon\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{X}+\frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{Y}。\tag{6}$$

3 主要结果

为了获得神经网络(2)的指数输入状态稳定性,假设激励函数 $\boldsymbol{f}$,$\boldsymbol{g}$ 满足:(A1)存在 β_j,$\alpha_i>0$ 使得对于 $\forall\,\theta,\rho\in\mathbf{R}$,有 $0\leqslant\dfrac{f_j(\theta)-f_j(\rho)}{\theta-\rho}\leqslant\beta_j$,$0\leqslant\dfrac{g_i(\theta)-g_i(\rho)}{\theta-\rho}\leqslant\alpha_i$,$i,j=1,2,\cdots,n$。

定理 假设(A1)成立,如果：

$$-\boldsymbol{\alpha}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}^{-1}+\boldsymbol{W}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}-2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}^{-1}+\boldsymbol{I}+\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{V}+\varepsilon_2\boldsymbol{I}<0, \tag{7}$$

$$-\boldsymbol{\beta}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\beta}^{-1}+\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}-2\boldsymbol{B}\boldsymbol{\beta}^{-1}+\boldsymbol{I}+\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{W}+\varepsilon_4\boldsymbol{I}<0, \tag{8}$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 为正实数，$f_j(0)=0$，$g_i(0)=0$，$\boldsymbol{\beta}=\mathrm{diag}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}=\mathrm{diag}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，$i,j=1,2,\cdots,n$，那么双向联想记忆神经网络(2)是指数输入-状态稳定的。

证明　首先选择两个适当的数 $\xi^*,\zeta^*<0$ 和正数 $\varepsilon>0$ 使得：

$$\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t))(-\boldsymbol{\alpha}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}^{-1}+\boldsymbol{W}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}-2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}^{-1}+\boldsymbol{I}+\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{V}+\varepsilon_2\boldsymbol{I})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t))\leqslant\xi^*\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t)), \tag{9}$$

$$\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}(t))(-\boldsymbol{\beta}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\beta}^{-1}+\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}-2\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}^{-1}+\boldsymbol{I}+\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{W}+\varepsilon_4\boldsymbol{I})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t))\leqslant\zeta^*\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}(t))\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t)), \tag{10}$$

并且满足：

$$\varepsilon+\varepsilon\alpha_i+\varepsilon_1+\xi^*\alpha_i^2+(\alpha_i^2+\eta_1\alpha_i^2)\sigma\varepsilon\mathrm{e}^{\varepsilon\sigma}<0, \tag{11}$$

$$\varepsilon+\varepsilon\beta_j+\varepsilon_3+\zeta^*\beta_j^2+(\beta_j^2+\eta_2\beta_j^2)\tau\varepsilon\mathrm{e}^{\varepsilon\tau}<0, \tag{12}$$

其中 η_1,η_2 满足 $\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(r))\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{V}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(r))\leqslant\eta_1\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(r))\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(r))$，$\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}(\sigma))\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(\sigma))\leqslant\eta_2\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}(\sigma))\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(\sigma))$。下面构造如下的 Lyapunov 函数：

$$V(x(t),y(t))=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{x}(t)+2\sum_{i=1}^{n}\int_0^{x_i(t)}g_i(\xi)\mathrm{d}\xi+\sum_{i=1}^{n}\int_{t-\sigma}^{t}g_i^2(x_i(\zeta))\mathrm{d}\zeta+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{y}(t)+2\sum_{j=1}^{n}\int_0^{y_j(t)}f_j(\rho)\mathrm{d}\rho+$$
$$\sum_{j=1}^{n}\int_{t-\tau}^{t}f_j^2(y_j(\eta))\mathrm{d}\eta+\int_{t-\sigma}^{t}\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(r))\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{V}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(r))\mathrm{d}r+\int_{t-\tau}^{t}\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}(\sigma))\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(\sigma))\mathrm{d}\sigma。 \tag{13}$$

(13)式沿方程组(2)式关于 t 求导，可得：

$$\begin{aligned}\dot{V}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{y}(t))=&-2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{W}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t-\tau))+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{s}(t)-2\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\\&2\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{W}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t-\tau))+2\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{s}(t)+\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t))-\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t-\sigma))\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t-\sigma))-\\&\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}(t)-\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}(t)+2\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{V}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t-\sigma))+2\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{h}(t)-2\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}(t))\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}(t)+\\&2\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}(t))\boldsymbol{V}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t-\sigma))+2\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}(t))\boldsymbol{h}(t)+\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}(t))\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t))-\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}(t-\tau))\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t-\tau))+\\&\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{V}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t))-\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t-\sigma))\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{V}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t-\sigma))+\\&\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}(t))\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t))-\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}(t-\tau))\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t-\tau))。\end{aligned} \tag{14}$$

由引理 1 有：

$$\begin{aligned}&-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{W}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t-\tau))-\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}(t-\tau))\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t-\tau))=\\&-(\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{A}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t-\tau)))^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{A}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t-\tau)))\leqslant0,\\&-\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}(t)+2\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{V}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t-\sigma))-\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t-\sigma))\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{V}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t-\sigma))=\\&-(\boldsymbol{B}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{y}(t)-\boldsymbol{B}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t-\sigma)))^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{y}(t)-\boldsymbol{B}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t-\sigma)))\leqslant0,\\&-\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t-\sigma))\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t-\sigma))+2\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}(t))\boldsymbol{V}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t-\sigma))\leqslant\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}(t))\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t)),\\&-\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}(t-\tau))\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t-\tau))+2\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{W}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t-\tau))\leqslant\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{W}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t))。\end{aligned} \tag{15}$$

由引理 2 有：

$$2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{s}(t)\leqslant\varepsilon_1\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{x}(t)+\frac{1}{\varepsilon_1}\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{s}(t),2\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{s}(t)\leqslant\varepsilon_2\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t))+\frac{1}{\varepsilon_2}\boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{s}(t),$$
$$2\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{h}(t)\leqslant\varepsilon_3\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{y}(t)+\frac{1}{\varepsilon_3}\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{h}(t),2\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}(t))\boldsymbol{h}(t)\leqslant\varepsilon_4\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}(t))\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t))+\frac{1}{\varepsilon_4}\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{h}(t)。 \tag{16}$$

将(15)，(16)式以及假设条件(A1)代入(14)式以及由(9)，(10)式可得：

$$\begin{aligned}\dot{V}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{y}(t))\leqslant&-\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{\alpha}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}^{-1}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t))+\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{W}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t))-2\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}^{-1}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t))+\\&\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t))+\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{V}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t))-\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}(t))\beta^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\beta}^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t))+\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}(t))\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t))-\\&2\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}(t))\boldsymbol{B}\boldsymbol{\beta}^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t))+\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}(t))\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t))+\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}(t))\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t))+\varepsilon_1\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{x}(t)+\\&\varepsilon_2\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t))+\varepsilon_3\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{y}(t)+\varepsilon_4\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}(t))\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t))+\left(\frac{1}{\varepsilon_1}+\frac{1}{\varepsilon_2}\right)|\boldsymbol{s}(t)|^2+\\&\left(\frac{1}{\varepsilon_3}+\frac{1}{\varepsilon_4}\right)|\boldsymbol{h}(t)|^2=\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t))(-\boldsymbol{\alpha}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}^{-1}+\boldsymbol{W}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}-2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}^{-1}+\boldsymbol{I}+\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{V}+\varepsilon_2\boldsymbol{I})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t))+\varepsilon_1\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{x}(t)+\\&\varepsilon_3\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{y}(t)+\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}(t))(-\boldsymbol{\beta}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\beta}^{-1}+\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}-2\boldsymbol{B}\boldsymbol{\beta}^{-1}+\boldsymbol{I}+\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{W}+\varepsilon_4\boldsymbol{I})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t))+\varepsilon_1'|\boldsymbol{s}(t)|^2+\varepsilon_2'|\boldsymbol{h}(t)|^2\leqslant\\&\xi^*|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t))|^2+\zeta^*|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t))|^2+\varepsilon_1\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{x}(t)+\varepsilon_3\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{y}(t)+\varepsilon_1'|\boldsymbol{s}(t)|^2+\varepsilon_2'|\boldsymbol{h}(t)|^2,\end{aligned} \tag{17}$$

其中 $\varepsilon_1'=\frac{1}{\varepsilon_1}+\frac{1}{\varepsilon_2}$,$\varepsilon_2'=\frac{1}{\varepsilon_3}+\frac{1}{\varepsilon_4}$。下面对 $e^{\varepsilon t}V(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{y}(t))$ 求导并将(17)式带入有:

$$\frac{d(e^{\varepsilon t}V(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{y}(t)))}{dt}=\varepsilon e^{\varepsilon t}V(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{y}(t))+e^{\varepsilon t}\dot{V}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{y}(t))\leqslant\varepsilon e^{\varepsilon t}[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{x}(t)+2\sum_{i=1}^{n}\int_0^{x_i(t)}g_i(\xi)\,d\xi+$$
$$\sum_{i=1}^{n}\int_{t-\sigma}^{t}g_i^2(x_i(\zeta))d\zeta+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{y}(t)+2\sum_{j=1}^{n}\int_0^{y_j(t)}f_j(\rho)d\rho+\sum_{j=1}^{n}\int_{t-\tau}^{t}f_j^2(y_j(\eta))d\eta+\int_{t-\sigma}^{t}\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(r))\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{V}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(r))dr+$$
$$\int_{t-\tau}^{t}\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}(\sigma))\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(\sigma))d\sigma]+e^{\varepsilon t}[\xi^*|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t))|^2+\zeta^*|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t))|^2+\varepsilon_1\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{x}(t)+\varepsilon_3\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{y}(t)+$$
$$\varepsilon_1'|\boldsymbol{s}(t)|^2+\varepsilon_2'|\boldsymbol{h}(t)|^2]\leqslant\varepsilon e^{\varepsilon t}[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{x}(t)+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{x}(t)+\sum_{i=1}^{n}\int_{t-\sigma}^{t}g_i^2(x_i(\zeta))d\zeta+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{y}(t)+$$
$$2\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{y}(t)+\sum_{j=1}^{n}\int_{t-\tau}^{t}f_j^2(y_j(\eta))d\eta+\int_{t-\sigma}^{t}\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(r))\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{V}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(r))dr+\int_{t-\tau}^{t}\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}(\sigma))\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(\sigma))d\sigma]+$$
$$e^{\varepsilon t}\left[\xi^*\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2x_i^2(t)+\zeta^*\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2y_i^2(t)+\varepsilon_1|\boldsymbol{x}(t)|^2+\varepsilon_3|\boldsymbol{y}(t)|^2+\varepsilon_1'|\boldsymbol{s}(t)|^2+\varepsilon_2'|\boldsymbol{h}(t)|^2\right]\leqslant$$
$$e^{\varepsilon t}\Big[\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon+\varepsilon\alpha_i+\varepsilon_1+\xi^*\alpha_i^2)|x_i(t)|^2+\sum_{j=1}^{n}(\varepsilon+\varepsilon\beta_j+\varepsilon_3+\zeta^*\beta_j^2)|y_j(t)|^2+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_1'|s_i(t)|^2+$$
$$\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_2'|h_j(t)|^2+\sum_{i=1}^{n}\int_{t-\sigma}^{t}\varepsilon g_i^2(x_i(\zeta))d\zeta+\sum_{j=1}^{n}\int_{t-\tau}^{t}\varepsilon f_j^2(y_j(\eta))d\eta+\int_{t-\sigma}^{t}\varepsilon\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(r))\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{V}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(r))dr+$$
$$\int_{t-\tau}^{t}\varepsilon\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}(\sigma))\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(\sigma))d\sigma\Big]。\tag{18}$$

(18)式两边同时积分可得:

$$e^{\varepsilon t}V(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{y}(t))-V(\boldsymbol{x}(0),\boldsymbol{y}(0))\leqslant\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon+\varepsilon\alpha_i+\varepsilon_1+\xi^*\alpha_i^2)\int_0^t e^{\varepsilon s}|x_i(s)|^2ds+$$
$$\sum_{j=1}^{n}(\varepsilon+\varepsilon\beta_j+\varepsilon_3+\zeta^*\beta_j^2)\int_0^t e^{\varepsilon s}|y_j(s)|^2ds+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon\alpha_i^2\int_0^t e^{\varepsilon s}\int_{s-\sigma}^{s}|x_i(\xi)|^2d\xi ds+\sum_{j=1}^{n}\varepsilon\beta_j^2\int_0^t e^{\varepsilon s}\int_{s-\tau}^{s}|y_j(\zeta)|^2d\zeta ds+$$
$$\sum_{i=1}^{n}\eta_1\varepsilon\alpha_i^2\int_0^t e^{\varepsilon s}\int_{s-\sigma}^{s}|x_i(\xi)|^2d\xi ds+\sum_{j=1}^{n}\eta_2\varepsilon\beta_j^2\int_0^t e^{\varepsilon s}\int_{s-\tau}^{s}|y_i(\zeta)|^2d\zeta ds+$$
$$\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_1'\int_0^t e^{\varepsilon s}|s_i(s)|^2ds+\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_2'\int_0^t e^{\varepsilon s}|h_j(s)|^2ds\tag{19}$$

通过交换积分顺序,有下面两个积分成立:

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^2+\eta_1\alpha_i^2)\int_0^t e^{\varepsilon s}\int_{s-\sigma}^{s}|x_i(\xi)|^2d\xi ds=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^2+\eta_1\alpha_i^2)\int_{-\sigma}^{0}|x_i(\xi)|^2\int_{\max(0,\xi)}^{\min(t,\xi+\sigma)}e^{\varepsilon s}ds d\xi\leqslant$$
$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^2+\eta_1\alpha_i^2)\int_{-\sigma}^{t}\sigma e^{\varepsilon\gamma}e^{\varepsilon\xi}|x_i(\xi)|^2d\xi\leqslant\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^2+\eta_1\alpha_i^2)\left(\sigma e^{\varepsilon\gamma}\int_{-\sigma}^{0}|x_i(s)|^2ds+\sigma e^{\varepsilon\sigma}\int_0^t e^{\varepsilon s}|x_i(s)|^2ds\right),$$
$$\sum_{j=1}^{n}(\beta_j^2+\eta_2\beta_j^2)\int_0^t e^{\varepsilon s}\int_{s-\tau}^{s}|y_j(\zeta)|^2d\zeta ds=\sum_{j=1}^{n}(\beta_j^2+\eta_2\beta_j^2)\int_{-\tau}^{t}|y_j(\xi)|^2\int_{\max(0,\xi)}^{\min(t,\xi+\tau)}e^{\varepsilon s}ds d\xi\leqslant$$
$$\sum_{j=1}^{n}(\beta_j^2+\eta_2\beta_j^2)\int_{-\tau}^{t}\tau e^{\varepsilon\tau}e^{\varepsilon\xi}|y_j(\xi)|^2d\xi\leqslant$$
$$\sum_{j=1}^{n}(\beta_j^2+\eta_2\beta_j^2)\left(\tau e^{\varepsilon\tau}\int_{-\tau}^{0}|y_j(s)|^2ds+\tau e^{\varepsilon\tau}\int_0^t e^{\varepsilon s}|y_j(\xi)|^2ds\right)\tag{20}$$

将(20)式带入(19)式可得:

$$e^{\varepsilon t}V(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{y}(t))-V(\boldsymbol{x}(0),\boldsymbol{y}(0))\leqslant\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon+\varepsilon\alpha_i+\varepsilon_1+\xi^*\alpha_i^2+(\alpha_i^2+\eta_1\alpha_i^2)\sigma\varepsilon e^{\varepsilon\sigma})\int_0^t e^{\varepsilon s}|x_i(s)|^2ds+$$
$$\sum_{j=1}^{n}(\varepsilon+\varepsilon\beta_j+\varepsilon_3+\zeta^*\beta_j^2+(\beta_j^2+\eta_2\beta_j^2)\varepsilon\tau e^{\varepsilon\tau})\int_0^t e^{\varepsilon s}|y_j(s)|^2ds+\sum_{i=1}^{m}(\alpha_i^2+\eta_1\alpha_i^2)\sigma\varepsilon e^{\varepsilon\sigma}\int_{-\sigma}^{0}|x_i(s)|^2ds+$$
$$\sum_{j=1}^{n}(\beta_j^2+\eta_2\beta_j^2)\tau\varepsilon e^{\varepsilon\tau}\int_{-\tau}^{0}|y_j(s)|^2ds+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_1'\int_0^t e^{\varepsilon s}|s_i(s)|^2ds+\sum_{j=1}^{m}\varepsilon_2'\int_0^t e^{\varepsilon s}|h_j(s)|^2ds\tag{21}$$

由(21),(11),(12)式可得:

$$V(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{y}(t))\leqslant\Big\{\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^2+\eta_1\alpha_i^2)\sigma\varepsilon\,\mathrm{e}^{\varepsilon\sigma}\int_{-\sigma}^{0}|x_i(s)|^2\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^{n}|x_i(0)|^2+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\int_{-\sigma}^{0}|x_i(\xi)|^2\mathrm{d}\xi+$$
$$2\sum_{j=1}^{n}\int_0^{y_j(0)}f_j(\rho)\mathrm{d}\rho+\sum_{i=1}^{n}\eta_1\alpha_i^2\int_{-\sigma}^{0}|x_i(s)|^2\mathrm{d}s+\sum_{j=1}^{n}(\beta_j^2+\eta_2\beta_j^2)\tau\varepsilon\,\mathrm{e}^{\varepsilon\tau}\int_{-\tau}^{0}|y_j(s)|^2\mathrm{d}s+\sum_{j=1}^{n}|y_j(0)|^2+$$
$$2\sum_{i=1}^{n}\int_0^{x_i(0)}g_i(\xi)\mathrm{d}\xi+\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2\int_{-\tau}^{0}|y_j(\xi)|^2\mathrm{d}\xi+\sum_{j=1}^{n}\eta_2\beta_j^2\int_{-\tau}^{0}|y_j(\xi)|^2\mathrm{d}\xi\Big\}\ \mathrm{e}^{-\varepsilon t}+\frac{n\varepsilon_1'}{\varepsilon}\|\boldsymbol{s}\|_\infty^2+\frac{n\varepsilon_2'}{\varepsilon}\|\boldsymbol{h}\|_\infty^2。$$

则：

$$|\boldsymbol{x}(t)|^2+|\boldsymbol{y}(t)|^2\leqslant\{|\boldsymbol{x}(0)|^2+|\boldsymbol{y}(0)|^2+\Big(\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^2+\eta_1\alpha_i^2)\sigma\varepsilon\,\mathrm{e}^{\varepsilon\sigma}+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2+\sum_{i=1}^{n}\eta_1\alpha_i^2\Big)\int_{-\sigma}^{0}|x_i(s)|^2\mathrm{d}s+$$
$$\sum_{j=1}^{n}\beta_j|x_i(0)|^2+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i|y_i(0)|^2+\Big(\sum_{j=1}^{n}(\beta_j^2+\eta_2\beta_j^2)\tau\varepsilon\,\mathrm{e}^{\varepsilon\tau}+\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2+$$
$$\sum_{j=1}^{n}\eta_2\beta_j^2\Big)\int_{-\tau}^{0}|y_j(s)|^2\mathrm{d}s\}\mathrm{e}^{-\varepsilon t}+\frac{n\varepsilon_1'}{\varepsilon}\|\boldsymbol{s}\|_\infty^2+\frac{n\varepsilon_2'}{\varepsilon}\|\boldsymbol{h}\|_\infty^2\leqslant$$
$$\Big\{\bar{\omega}(|\boldsymbol{x}(0)|^2+|\boldsymbol{y}(0)|^2)+\Big(\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^2+\eta_1\alpha_i^2)\sigma\varepsilon\,\mathrm{e}^{\varepsilon\sigma}+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2+\sum_{i=1}^{n}\eta_1\alpha_i^2\Big)\int_{-\sigma}^{0}|x_i(s)|^2\mathrm{d}s+\Big(\sum_{j=1}^{n}(\beta_j^2+\eta_2\beta_j^2)\tau\varepsilon\,\mathrm{e}^{\varepsilon\tau}+$$
$$\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2+\sum_{j=1}^{n}\eta_2\beta_j^2\Big)\int_{-\tau}^{0}|y_i(s)|^2\mathrm{d}s\Big\}\,\mathrm{e}^{-\varepsilon t}+\frac{n\varepsilon_1'}{\varepsilon}\|\boldsymbol{S}\|_\infty^2+\frac{n\varepsilon_2'}{\varepsilon}\|\boldsymbol{h}\|_\infty^2,$$

其中 $\bar{\omega}:=\max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}\{1+\beta_j,1+\alpha_i\}$。由定义的范数可得：

$$|(\boldsymbol{x}(t);\boldsymbol{y}(t))|\leqslant\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon t}{2}}\Big[2\Big\{\bar{\omega}(|\boldsymbol{x}(0)|^2+|\boldsymbol{y}(0)|^2)+\Big(\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^2+\eta_1\alpha_i^2)\sigma\varepsilon\,\mathrm{e}^{\varepsilon\sigma}+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2+\sum_{i=1}^{n}\eta_1\alpha_i^2\Big)\int_{-\sigma}^{0}|x_i(s)|^2\mathrm{d}s+$$
$$\Big(\sum_{j=1}^{n}(\beta_j^2+\eta_2\beta_j^2)\tau\varepsilon\,\mathrm{e}^{\varepsilon\tau}+\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2+\sum_{j=1}^{n}\eta_2\beta_j^2\Big)\int_{-\tau}^{0}|y_j(s)|^2\mathrm{d}s\Big\}\Big]^{\frac{1}{2}}+\Big(\frac{2n\varepsilon'}{\varepsilon}\Big)^{\frac{1}{2}}(\|\boldsymbol{s}\|_\infty^2+\|\boldsymbol{h}\|_\infty^2)^{\frac{1}{2}},$$

其中 $\varepsilon'=\max(\varepsilon_1',\varepsilon_2')$，

$$\theta=\max\Big\{\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^2+\eta_1\alpha_i^2)\sigma\varepsilon\,\mathrm{e}^{\varepsilon\sigma}+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2+\sum_{i=1}^{n}\eta_1\alpha_i^2,\sum_{j=1}^{n}(\beta_j^2+\eta_2\beta_j^2)\tau\varepsilon\,\mathrm{e}^{\varepsilon\tau}+\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2+\sum_{j=1}^{n}\eta_2\beta_j^2\Big\}。$$

下面将定义两个新的函数为 $\beta(s)=\sqrt{2\bar{\omega}s+4\theta}$，$\gamma(s)=s\left(\frac{2n\varepsilon'}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}$。显然 $\beta(\cdot)$，$\gamma(\cdot)$ 为 K-函数。取 $\lambda=\frac{\varepsilon}{2}$，则有 $|(\boldsymbol{x}(t);\boldsymbol{y}(t))|\leqslant\beta(\|(\boldsymbol{\xi};\boldsymbol{\psi})\|_r)\mathrm{e}^{-\lambda t}+\gamma(\|(\boldsymbol{s};\boldsymbol{h})\|_\infty)$。根据定义，双向联想记忆神经网络(2)是指数输入-状态稳定的。　　证毕

4 结束语

主要研究了外部输入随时间变化的多时滞双向联想记忆神经网络，通过 Lyapunov 泛函方法及构造新的线性矩阵不等式的技术，获得了关于双向联想记忆神经网络模型的指数对输入-状态稳定性分析的一个充分条件，后期将通过构造新的积分微分不等式的技术进一步研究含脉冲和随机的神经网络模型的输入-状态稳定性问题。

参考文献：

[1] Kosko B. Adaptive bidirectional associative memories[J]. Applied Optics，1987，26(23)：4947-4960.

[2] Kosko B. Bidirectional associative memories[J]. IEEE Transactions on Systems，Man and Cybernetics，1988，18(1)：49-60.

[3] Kosko B. Unsupervised learning in noise[J]. IEEE Transactions on Neural Networks，1990，1(1)：44-57.

[4] Liao X，Yu J B. Qualitative analysis of bi-directional associative memory networks with time delays[J]. Int J Circ Theory，1998，26：219-229.

[5] Zhao H Y，Ding N. Dynamic analysis of stochastic bidirectional associative memory neural networks with delays[J]. Chaos，Solitons and Fractals，2007，32：1692-1702.

[6] Michel A N，Farrell J A，Porod W. Qualitative analysis of neural nerworks[J]. IEEE Trans Circuits Syst，1989，36(1)：229-243.

[7] Wang L S，Tan Z，Zhang Z P. Sufficient and necessary condition for local exponential stability of continuous bidirectional associative memory network[J]. Electronic Journal，1997，27(7)：119-121.

[8] Guan H X，Wang Z S，Zhang H G. Stability analysis of uncertain bi-directional associative memory neural networks with variable delays[J]. Control Theory and Application，

2008,25(3):421-426.

[9] 赵洪涌,徐道义.具有分布时滞的双向联想记忆神经网络稳定性分析[J].四川大学学报:自然科学版,2001,38(4):465-467.

Zhao H Y,Xu D Y. Stability analysis of bidirectional associative memory neural networks with distributed delay[J]. Journal of Sichuan University: Natural Science, 2001, 38(4):465-467.

[10] 张强,马润年.具有连续分布时滞的双向联想记忆神经网络的全局稳定[J].中国科学,2003,33(6):481-487.

Zhang Q,Ma R N. Global stability of bidirectional associative memory neural networks with continuous distributed delays[J]. Chinese Science,2003,33(6):481-487.

[11] 张强,高琳,王超,等.时滞双向联想记忆神经网络的全局稳定性[J].物理学报,2003,52(7):1600-1605.

Zhang Q,Gao L,Wang C,et al. Global stability of time delayed bidirectional associative memory neural networks [J]. Journal of Physics,2003,52(7):1600-1605.

[12] 董彪,蒋自国,蒲志林.变时滞的双向联想记忆神经网络的全局指数稳定性[J].西南民族大学学报,2011,379(4):521-524.

Dong B,Jiang Z G,Pu Z L. Global exponential stability of bidirectional associative memory neural networks with time varying delays[J]. Journal of Southwest University for Nationalities,2011,379(4):521-524.

[13] Niu J R,Zhang Z F,Xu D Y. Mean square exponential stability of stochastic neural networks with variable time delay Cohen-Grossberg[J]. Journal of Engineering Mathematics,2005,6:1001-1005.

[14] 高潮,周山雪.双向联想记忆神经网络的全局指数稳定性[J].中山大学学报,2002,41(6):14-17.

Gao C,Zhou S X. Global exponential stability of bidirectional associative memory neural network[J]. Journal of Zhongshan University,2002,41(6):14-17.

[15] Yang Z C,Xu D Y. Global exponential stability of Hopfield neural networks with time-varying delays and impulsive effects[J]. Applied Mathematics and Mechanics,2006,27(11):1329-1334.

[16] 沈艳霞,纪志成,姜建国.动态神经网络的输入-状态稳定性分析[J].控制与决策,2004,19(12):1391-1394.

Shen Y X,Ji Z C,Jiang J G. Analysis of input state stability of dynamic neural networks[J]. Control and Decision, 2004,19(12):1391-1394.

[17] Zhou W S,Yang Z C. Input-to-state stability for dynamical neural networks with time-varying delays[J]. Abstract Applied Analysis,2012(4):665-681.

[18] Yang Z C,Zhou W S,Hang T W. Cognitive neurodynamics exponential input-to-state stability of recurrent neural networks with multiple time-varying delays[J]. Cogn Neurodyn,2014,8:47-54.

[19] Zhou W,Teng L Y,Xu D. Mean-square exponentially input-to-state stability of stochastic Cohen-Grossberg neural networks with time-varying delays[J]. Neuro Computing, 2015,153:54-61.

[20] Zhang H G,Wang Z S,Liu D R. Global asymptotic stability of recurrent neural networks with multiple time-varying delays[J]. IEEE Transaction on Neural Networks, 2008,19(5):855-873.

[21] Horn R A,Johnson C R. Topics in matrix analysis[M]. London:Cambridge University Press,1991.

Exponential Input-to-State Stability of Bidirectional Associative Memory Neural Networks

LI Jianjun,YANG Zhichun

(College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: We study exponential input-to-state stability of bidirectional associative memory neural networks with multiple time delays effects and external input with time varying. Firstly, a model of BAM neural network is established, in which there are multiple time delay effects and the external inputs with time varying. We don't require that active functions are bounded and smooth in the BAM networks. Then, the definition of exponential input-to-state stability for BAM neural networks is given. We obtain a sufficient condition ensuring exponential input-to-state stability of BAM neural networks with multiple time delays and external input with time varying by using Lyapunov function method and the linear matrix inequality $-m\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{X}+2l\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{Y}\leqslant l^2\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}(m\boldsymbol{Q})^{-1}\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{Y}$ and $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\leqslant\varepsilon\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{X}+\varepsilon\backslash\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{Y}$.

Key words: delays; bidirectional associative memory neural networks; exponential input-to-state stability; Lyapunov functional

(责任编辑 黄 颖)