DOI:10.11721/cqnuj20160408

时标上一类 p-Laplacian 哈密顿系统的变分结构*

薛益民，苏　莹
(徐州工程学院 数学与物理科学学院，江苏 徐州 221111)

摘　要： 研究了形式如下的时标 $\boldsymbol{T}$ 上二阶非自治的 p-Laplacian 哈密顿系统 $\begin{cases}(|u^{\Delta}(t)|^{p-2}|u^{\Delta}(t)|)^{\Delta}=\nabla F(\sigma(t),u^{\sigma}(t)),\Delta-\text{a.e. } t\in[0,T]_{\boldsymbol{T}^k}\\ u(0)-u(T)=0,u^{\Delta}(0)-u^{\Delta}(T)=0\end{cases}$ 的边值问题，给出了该系统上的变分结构，同时证明了该系统的求解问题等价于求其相应泛函 $\varphi\in C^1(W^{1,p}_{\Delta,T}(\boldsymbol{T},\mathbf{R}^n),\mathbf{R})$ 的临界点。

关键词： 时标；p-Laplacian 哈密顿系统；变分结构；临界点

中图分类号： O175.8　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1672-6693(2016)04-0090-04

自 1988 年 Stefan Hilger 在他的博士论文[1]中提出时标理论以来，时标上的动力方程越来越受到学者们的关注，因为时标动力方程统一了微分方程和差分方程，能够揭示更为复杂的动力系统，而且时标动力方程有广泛的应用基础，用该理论来描述生物学、计算机网络、工程技术、物理等领域的许多现象，更能够揭示这些现象的本质属性。关于时标动力方程有很多问题值得研究，其中一个重要的方面就是解的存在性问题，有关时标上动力方程解的存在性的文章有很多，如文献[2-10]。

受文献[11]的启发，本文主要研究了形式如下的时标上二阶非自治的 p-Laplacian 哈密顿系统边值问题

$$\begin{cases}(|u^{\Delta}(t)|^{p-2}|u^{\Delta}(t)|)^{\Delta}=\nabla F(\sigma(t),u^{\sigma}(t)),\Delta-\text{a.e. } t\in[0,T]_{\boldsymbol{T}^k},\\ u(0)-u(T)=0,u^{\Delta}(0)-u^{\Delta}(T)=0。\end{cases}\tag{1}$$

其中 $0,T\in\boldsymbol{T}$，$p>1$，$\nabla F(t,u)=D_uF(t,u)$，$F:[0,T]_{\boldsymbol{T}}\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$，且满足如下假设：

(H_0) 对于 $\forall x\in\mathbf{R}^n$，$F(t,x)$ 关于 t 是可测，对于 $\Delta-$a.e. $t\in[0,T]_{\boldsymbol{T}}$，$F(t,x)$ 关于 x 是连续可微的，且对任意的 $x\in\mathbf{R}^n$ 和 $\Delta-$a.e. $t\in[0,T]_{\boldsymbol{T}}$，存在 $a\in C(\mathbf{R}^+,\mathbf{R}^+)$，$b\in L^1([0,T]_{\boldsymbol{T}},\mathbf{R}^+)$ 满足 $|F(t,x)|\leqslant a(|x|)b(t)$，$|\nabla F(t,x)|\leqslant a(|x|)b(t)$。

1 相关定义和引理

为了研究问题的需要，本节将给出时标上一些相关的基本定义和引理，更详尽的内容可参考文献[11-12]。

定义 1　设 $f(t)=(f_1(t),f_2(t),\cdots,f_N(t)):\boldsymbol{T}\to\mathbf{R}^N$，$t\in\boldsymbol{T}$，若 $f^{\Delta}(t)=(f_1^{\Delta}(t),f_2^{\Delta}(t),\cdots,f_N^{\Delta}(t))$ 存在，则称 $f^{\Delta}(t)$ 为 f 在 t 点的 Δ-(或 Hilger)导数。若对于所有的 $t\in\boldsymbol{T}$，$f^{\Delta}(t)$ 存在，则称 f 在 $\boldsymbol{T}$ 上 Δ-(或 Hilger)可微，称 $f^{\Delta}(t):\boldsymbol{T}^k\to\mathbf{R}^N$ 为 f 在 $\boldsymbol{T}^k$ 上 Δ-导数。

定义 2　若函数 $f:\boldsymbol{T}\to\mathbf{R}^N$ 在 $\boldsymbol{T}$ 每个右稠点连续，且在 $\boldsymbol{T}$ 左稠点极限(有限)存在，则称 f 是 rd-连续的。

定义 3　假设 $f(t)=(f_1(t),f_2(t),\cdots,f_N(t)):\boldsymbol{T}\to\mathbf{R}^N$，$A$ 是一 Δ-可测的 $\boldsymbol{T}$ 的子集，则 f 在 A 上可积当且仅当 $f_i(i=1,2,\cdots,N)$ 在 A 上可积，且

* 收稿日期：2015-11-10　　修回日期：2016-05-12　　网络出版时间：2016-07-07 16:35
资助项目：国家自然科学基金(No. 11301454)；国家自然科学数学天元基金(No. 11526177)；江苏省自然科学基金(No. BK20151160)；江苏省六大人才高峰项目(No. 2013-JY-003)；江苏省高校自然科学基金(No. 14KJB110025)；徐州工程学院重点项目(No. 2013102)；徐州工程学院青年项目(No. XKY2013314)
作者简介：薛益民，男，讲师，研究方向为微分方程及其应用，E-mail：xueym@xzit.edu.cn
网络出版地址：http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20160707.1635.064.html

$$\int_A f(t)\Delta t=\left(\int_A f_1(t)\Delta t,\int_A f_1(t)\Delta t,\cdots,\int_A f_N(t)\Delta t\right)。$$

定义 4 假设 $f(t)=(f_1(t),f_2(t),\cdots,f_N(t)):[a,b]_{\boldsymbol{T}}\to\mathbf{R}^N$，如果对于 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $[a_k,b_k)_{\boldsymbol{T}}|_{k=1}^n$ 是 $[a,b]_{\boldsymbol{T}}$ 上任意一族互不相交的子区间，且其总长 $\sum_{k=1}^n(b_k-a_k)<\delta$ 时，恒有 $\sum_{k=1}^n|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon$ 成立，则称 f 在 $[a,b]_{\boldsymbol{T}}$ 上绝对连续或全连续(即 $f\in C([a,b]_{\boldsymbol{T}},\mathbf{R}^N)$)，其中 $f(t)=(f_1(t),f_2(t),\cdots,f_N(t)):[a,b]_{\boldsymbol{T}}\to\mathbf{R}^N$。

绝对连续函数有如下性质：

性质 1[11] 若 $f,g:[a,b]_{\boldsymbol{T}}\to\mathbf{R}^N$ 为绝对连续函数，则 fg 在 $[a,b]_{\boldsymbol{T}}$ 上绝对连续，且有下式成立

$$\int_{[a,b)_{\boldsymbol{T}}}((f^\Delta,g)+(f^\sigma,g^\Delta))(t)\Delta t=f(b)g(b)-f(a)g(a)=\int_{[a,b)_{\boldsymbol{T}}}((f,g^\Delta)+(f^\Delta,g^\sigma))(t)\Delta t。$$

设 $p\in\mathbf{R}$，$p\geqslant1$，对空间 $L_\Delta^p([0,T)_{\boldsymbol{T}},\mathbf{R}^N)=\left\{f:[0,T)_{\boldsymbol{T}}\to\mathbf{R}^N:\int_{[0,T)_{\boldsymbol{T}}}|f(t)|^p\Delta t<+\infty\right\}$ 赋以范数

$$\|f\|_{L_\Delta^p([0,T)_{\boldsymbol{T}},\mathbf{R}^N)}=\left(\int_{[0,T)_{\boldsymbol{T}}}|f(s)|^p\Delta s\right)^{\frac{1}{p}}\tag{2}$$

则 $L_\Delta^p([0,T)_{\boldsymbol{T}},\mathbf{R}^N)$ 空间在范数(2)下是 Banach 空间，定义 $L_\Delta^p([0,T)_{\boldsymbol{T}},\mathbf{R}^N)$ 内积为：$\langle f,g\rangle=\int_{[0,T)_{\boldsymbol{T}}}(f(t),g(t))\Delta t$，其中 $(f,g)\in L_\Delta^p([0,T)_{\boldsymbol{T}},\mathbf{R}^N)\times L_\Delta^p([0,T)_{\boldsymbol{T}},\mathbf{R}^N)$，$(.,.)$ 表示 $\mathbf{R}^N$ 上的内积。

定义 5 $W_{\Delta,T}^{1,p}(\boldsymbol{T},\mathbf{R}^n)=\left\{u:[0,T]_{\boldsymbol{T}}\to\mathbf{R}^n\;\middle|\;\begin{array}{l}u\text{ 绝对连续},u(0)=u(T),\\ u^\Delta([0,T)_{\boldsymbol{T}},\mathbf{R}^n)\end{array}\right\}$。则 $W_{\Delta,T}^{1,p}(\boldsymbol{T},\mathbf{R}^n)$ 是一个定义了如下范数的 Banach 空间：$\|u\|=\|u\|_{W_{\Delta,T}^{1,p}(\boldsymbol{T},\mathbf{R}^n)}=\left(\int_{[0,T)_{\boldsymbol{T}}}|u|^p\Delta t+\int_{[0,T)_{\boldsymbol{T}}}|u^\Delta|^p\Delta t\right)^{\frac{1}{p}}$，其中 $u\in W_\Delta^{1,p},T(\boldsymbol{T},\mathbf{R}^n)$。

定义 6 假设 $p\geqslant1(p\in\mathbf{R})$，且 $u:[0,T]_{\boldsymbol{T}}\to\mathbf{R}^N$，则 $u\in W_{\Delta,T}^{1,p}([0,T]_{\boldsymbol{T}},\mathbf{R}^N)$，当且仅当对 $\forall u\in L_\Delta^p([0,T)_{\boldsymbol{T}},\mathbf{R}^N)$，存在 $g:[0,T]_{\boldsymbol{T}}\to\mathbf{R}^N$，使得 $g\in L_\Delta^p([0,T)_{\boldsymbol{T}},\mathbf{R}^N)$，且 $\int_{[0,T]_{\boldsymbol{T}}}(u(t),\varphi^\Delta(t))\Delta t=-\int_{[0,T]_{\boldsymbol{T}}}(g^\Delta(t),\varphi(t))\Delta t$，对 $\forall\varphi\in C_{T,rd}^1([0,T)_{\boldsymbol{T}},\mathbf{R}^N)$，其中 $C_{T,rd}^1([0,T]_{\boldsymbol{T}},\mathbf{R}^N)=\{f\in C_{rd}^1([0,T]_{\boldsymbol{T}},\mathbf{R}^N)$，且 $f(0)=f(T)\}$。

引理 1[11] 如果序列 $\{u_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ 在 $W_{\Delta,T}^{1,p}((0,T)_{\boldsymbol{T}},\mathbf{R}^n)$ 上弱收敛于 u，则序列 $\{u_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ 在 $C([0,T]_{\boldsymbol{T}},\mathbf{R}^N)$ 上强收敛于 u。

引理 2 假设 $p\geqslant1(p\in\overline{\mathbf{R}})$，则对 $\forall q\in[1,+\infty)$，$W^{1,p}([a,b],\mathbf{R}^n)\hookrightarrow L^q([a,b),\mathbf{R}^n)$ 的嵌入是紧的。

2 主要结论

本节将给出 p-Laplacian 哈密顿系统(1)上的变分结构，同时证明 p-Laplacian 哈密顿系统(1)解的存在性等价于一个相应泛函 $\varphi\in C^1(W_{\Delta,T}^{1,p}(\boldsymbol{T},\mathbf{R}^n),R)$ 临界点的存在性。

令 $\tilde{u}=u-\bar{u}$，其中 $\bar{u}=\dfrac{1}{T}\int_{[0,T)_{\boldsymbol{T}}}u(t)\Delta t=0$，则 $\widetilde{W}_{\Delta,T}^{1,p}(\boldsymbol{T},\mathbf{R}^n)=\{u\in W_{\Delta,T}^{1,p}(\boldsymbol{T},\mathbf{R}^n):\bar{u}=0\}$。从而 $W_{\Delta,T}^{1,p}(\boldsymbol{T},\mathbf{R}^n)=\mathbf{R}^n\oplus\widetilde{W}_{\Delta,T}^{1,p}(\boldsymbol{T},\mathbf{R}^n)$。

定理 1 若定义函数 $\varphi:W_{\Delta,T}^{1,p}(\boldsymbol{T},\mathbf{R})\to\mathbf{R}$ 为 $\varphi(u)=\dfrac{1}{p}\int_{[0,T)_{\boldsymbol{T}}}|u^\Delta|^p\Delta t+\int_{[0,T)_{\boldsymbol{T}}}F(t,u)\Delta t$，则 $\varphi\in C^1(W_{\Delta,T}^{1,p}(\boldsymbol{T},\mathbf{R}^n),\mathbf{R})$。

证明 首先，证明 Gateaux 导数的存在性。

对任意的 $v\in W_{\Delta,T}^{1,p}(\boldsymbol{T},\mathbf{R}^n)$ 和 $\varepsilon\in\mathbf{R}$ 且 $0<|\varepsilon|<1$，有

$$\frac{1}{\varepsilon}[\varphi(u+\varepsilon v)-\varphi(u)]=\int_{[0,T)_{\boldsymbol{T}}}\frac{1}{\varepsilon p}(|u^\Delta+\varepsilon v^\Delta|^p-|u^\Delta|^p)\Delta t+\int_{[0,T)_{\boldsymbol{T}}}\frac{F(t,u+\varepsilon v)-F(t,u)}{\varepsilon}\Delta t。$$

根据中值定理，存在 $\lambda_1\in(0,1)$，使得对 $\forall u\in\mathbf{R}^n$，有

$\frac{\left|\,|u^{\Delta}+\varepsilon v^{\Delta}|^{p}-|u^{\Delta}|^{p}\right|}{|\varepsilon|}=p\left(|u^{\Delta}+\varepsilon\lambda_1 v^{\Delta}|^{p-2}|u^{\Delta}+\varepsilon\lambda_1 v^{\Delta}|\right)|v^{\Delta}|\leqslant Cp\left(|u^{\Delta}|^{p-1}+|v^{\Delta}|^{p-1}\right)|v^{\Delta}|$,其中 C 为正的常数。由时标上的 Hölder 不等式,可得 $(|u^{\Delta}|^{p-1}+|v^{\Delta}|^{p-1})|v^{\Delta}|\in L^1_{\Delta,T}(\boldsymbol{T},\mathbf{R}^n)$。

另一方面,由中值定理可知存在 $\lambda_2\in(0,1)$,使得对于任意给定的 $u\in\mathbf{R}^n$,有 $\frac{1}{|\varepsilon|}|F(t,u+\varepsilon v)-F(t,u)|=|F_u(t,u+\varepsilon\lambda_2 v)||v|$,又因为 $|F_u(t,u+\varepsilon\lambda_2 v)||v|\in L^1_{\Delta,T}(\boldsymbol{T},\mathbf{N}^n)$,所以由时标上的控制收敛定理,有

$$\langle\varphi'(u),v\rangle=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}(\varphi(u+\varepsilon v)-\varphi(u))=\int_{[0,T)_{\boldsymbol{T}}}(|u^{\Delta}|^{p-2}u^{\Delta},v^{\Delta})+(\nabla F(t,u),v)\Delta t。$$

下面证明 Gateaux 导数的连续性。

设 $\{u_n\}\subset W^{1,p}_{\Delta,T}(\boldsymbol{T},\mathbf{R}^n)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=u$,则由引理1和引理2,在 $L^{1,p}_{\Delta,T}(\boldsymbol{T},\mathbf{R}^n)$ 上有 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=u$,其中 $q_1=\frac{p}{p-1}$,从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\||u_n^{\Delta}|^{p-2}u_n^{\Delta}-|u^{\Delta}|^{p-2}u\|_{L^{q_1}_{\Delta}}=0$。由时标上的控制收敛定理和 (H_0),可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{[0,T)_{\boldsymbol{T}}}|\nabla F(t,u_n),\nabla F(t,u)|\Delta t=0$。对于任意的 $v\in W^{1,p}_{\Delta,T}(\boldsymbol{T},\mathbf{R}^n)$,有

$$\langle\varphi'(u_n)-\varphi'(u),v\rangle=\int_{[0,T)_{\boldsymbol{T}}}(|u_n^{\Delta}|^{p-2}u_n^{\Delta}-|u^{\Delta}|^{p-2}u^{\Delta},v^{\Delta})+(\nabla F(t,u_n)-\nabla F(t,u),v)\Delta t,$$

由时标上的 Hölder 不等式,有

$$\langle\varphi'(u_n)-\varphi'(u),v\rangle\leqslant\int_{[0,T)_{\boldsymbol{T}}}\left||u_n^{\Delta}|^{p-2}u_n^{\Delta}-|u^{\Delta}|^{p-2}|u^{\Delta}|\right||v^{\Delta}\Delta t+\int_{[0,T)_{\boldsymbol{T}}}|(\nabla F(t,u_n)-\nabla F(t,u),v)|\Delta t\leqslant$$

$$\left(\int_{[0,T)_{\boldsymbol{T}}}\left||u_n^{\Delta}|^{p-2}u_n^{\Delta}-|u^{\Delta}|^{p-2}\right|^{\frac{p}{p-1}}\Delta t\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{[0,T)_{\boldsymbol{T}}}|v^{\Delta}|^{p}\Delta t\right)^{\frac{1}{p}}+\int_{[0,T)_{\boldsymbol{T}}}|(\nabla F(t,u_n)-\nabla F(t,u),v)|\Delta t\leqslant$$

$$\||u_n^{\Delta}|^{p-2}u_n^{\Delta}-|u^{\Delta}|^{p-2}u\|_{L^{q_1}_{\Delta}}\|v\|+\|v\|\int_{[0,T)_{\boldsymbol{T}}}|\nabla F(t,u_n)-\nabla F(t,u)|\Delta \mathrm{t}。$$

因此 $\|\varphi'(u_n)-\varphi'(u)\|\leqslant\left(\||u_n^{\Delta}|^{p-2}u^{\Delta}-|u^{\Delta}|^{p-2}u\|_{L^{q_1}_{\Delta}}+\int_{[0,T)_{\boldsymbol{T}}}|\nabla F(t,u_n)-\nabla F(t,u)|\Delta t|\right)\to 0$,当 $n\to\infty$,从而有 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi'(u_n)=\varphi'(u)$,对 $\forall v\in W^{1,p}_{\Delta,T}(\boldsymbol{T},\mathbf{R}^n)$,由 p-Laplacian 哈密顿系统(1),有 $((|u^{\Delta}\rho(t)|^{p-2}|u^{\Delta}\rho(t)|)^{\Delta},v)=(\nabla F(t,u),v)$,从0到 T 积分,由性质1,有

$$0=\int_{[0,T)_{\boldsymbol{T}}}((|u^{\Delta}\rho(t)|^{p-2}|u^{\Delta}\rho(t)|)^{\Delta},v)\Delta t-\int_{[0,T)_{\boldsymbol{T}}}(\nabla F(t,u),v)\Delta t=$$

$$-\int_{[0,T)_{\boldsymbol{T}}}((|u^{\Delta}|^{p-2}|u^{\Delta}|),v^{\Delta})\Delta t-\int_{[0,T)_{\boldsymbol{T}}}(\nabla F(t,u),v)\Delta t。$$

证毕

由上面的讨论,可知函数 φ 的临界点即为 p-Laplacian 哈密顿系统(1)的解。

参考文献:

[1] Hilger S. Ein Maßkettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten[D]. Würzburg:Universität Würzburg,1988.

[2] Hilger S. Analysis on measure chains-a unified approach to continuous and discrete calculus[J]. Results in Mathematics,1990,18:18-56.

[3] Sun H R,Li W T. Existence theory for positive solutions to one-dimensional p-Laplacian boundary value problems on time scales[J]. Differential Equations,2007,240:217-248.

[4] Li S,Su Y H,Feng Z. Positive solutions to p-Laplacian multi-point BVPs on time scales[J]. Dynamics of Partial Differential Equations,2010,7:46-64.

[5] Su Y H,Feng Z. Positive solution to a singular p-Laplacian BVPs in Banach space[J]. Dynamics of Partial Differential Equations,2011,8:149-171.

[6] Su Y H. Arbitrary positive solutions to a multi-point p-Laplacian boundary value problem involving the derivative on time scales[J]. Mathematical and Computer Modelling,2011,53:1742-1747.

[7] Su Y H. Existence theory for positive solutions of p- Laplacian multi-point BVPs on time scales[J]. Turkish Journal of Mathematics,2011,35:219-248.

[8] Su Y H. Multiple positive pseudo-symmetric solutions of p-Laplacian dynamic equations on time scales[J]. Mathematical and Computer Modelling,2009,49:1664-1681.

[9] Su Y H,Li W T. Periodic solutions of second order Hamiltonian systems with a change sign potential on time scales

[J]. Discrete Dynamics in Nature and Society, 2009, 328479, 1-17.

[10] Su Y H, Li W T. Periodic solutions for non-autonomous second order Hamiltonian systems on time scales[J]. Dynamic Systems and Applications, 2009, 18: 621-636.

[11] Zhou J, Li Y. Sobolev's spaces on time scales and its applications to a class of second order Hamiltonian systems on time scales[J]. Nonlinear Analysis, 2010, 73: 1375-1388.

[12] 袁晓红,周德高,许方,等. 非线性项带导数的 p-Laplacian 边值问题解的存在性[J]. 徐州工程学院学报:自然科学版,2010,25(1):1-5.

Yuan X H, Zhou D G, Xu F, et al. Existence of solution of BVPs for p-Laplacian dynamic equations involving derivative[J]. Journal of Xuzhou Institute of Technology: Natural Science, 2010, 25(1): 1-5.

The Variational Structure for p-Laplacian Hamiltonian System on Time Scales

XUE Yimin, SU Ying

(School of Mathematics and Physical Science, Xuzhou Institute of Technology, Xuzhou Jiangsu 221111, China)

Abstract: In this paper, we are concerned with a second order non-autonomous p-Laplacian Hamiltonian system on time scales $\boldsymbol{T}$ of the form $\begin{cases}(|u^{\Delta}(t)|^{p-2}|u^{\Delta}(t)|)^{\Delta}=\nabla F(\sigma(t),u^{\sigma}(t)),\Delta-\text{a. e. } t\in[0,T]_{\boldsymbol{T}^k},\\ u(0)-u(T)=0,u^{\Delta}(0)-u^{\Delta}(T)=0.\end{cases}$ We present the variational structure of our p-Laplacian Hamiltonian system, and prove that finding solutions of this p-Laplacian Hamiltonian system is equivalent to finding the critical points of the associated functional.

Key words: time scales; p-Laplacian Hamiltonian system; variational structure; critical point

(责任编辑 许 甲)