DOI:10.11721/cqnuj20160414

Rosenau-KdV 方程的一个线性守恒加权差分逼近*

王婷婷，胡劲松
(西华大学 理学院，成都 610039)

摘要:利用 LXA 加权差分格式的构造思想,在空间层引入加权系数,对 Rosenau-KdV 方程的初边值问题进行了数值研究,提出了一个具有二阶精度的三层线性空间加权差分格式,该格式合理地模拟了原问题的两个守恒性质,给出了差分解的先验估计,分析了差分解的存在唯一性,用离散泛函分析方法证明了该格式的无条件稳定性与收敛性。数值算例表明,该加权方法是可靠的,且适当调整加权系数可以大幅提高计算精度。

关键词:Rosenau-KdV 方程;差分格式;守恒;收敛性;稳定性
中图分类号:O241.82　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2016)04-0094-06

本文考虑如下一类 Rosenau-KdV 方程的初边值问题：

$$u_t+u_{xxxxt}+u_x+uu_x+u_{xxx}=0,x\in(x_L,x_R),t\in(0,T],\tag{1}$$

$$u(x,0)=u_0(x),x\in[x_L,x_R],\tag{2}$$

$$u(x_L,t)=u(x_R,t)=0,u_x(x_L,t)=u_x(x_R,t)=0,u_{xx}(x_L,t)=u_{xx}(x_R,t)=0,t\in[0,T],\tag{3}$$

其中,$u_0(x)$是已知光滑函数。在对描述紧离散系统的动力学行为时,Rosenau-KdV 方程(1)可以看作是对 Rosenau 方程[1-3]和 KdV 方程[4-6]的推广形式,它是在对非线性波的研究中被文献[7]首先提出来并给出了其周期解和孤波解,文献[8-10]讨论了一类广义形式的 Rosenau-KdV 方程的孤波解及其两个守恒性质：

$$Q(t)=\int_{x_L}^{x_R}u(x,t)\mathrm{d}x=\int_{x_L}^{x_R}u_0(x)\mathrm{d}x=Q(0),\tag{4}$$

$$E(t)=\|u\|_{L_2}^2+\|u_{xx}\|_{L_2}^2=E(0)。\tag{5}$$

由于构造守恒的差分格式始终是一件非常有意义的工作。文献[11]对初边值问题(1)～(3)构造了一个具有二阶精度的三层线性差分格式,并对守恒量(4)和(5)进行了合理的数值模拟;文献[12-13]又进一步对广义形式的 Rosenau-KdV 方程进行了有限差分方法研究,分别提出了 3 层线性和两层非线性差分格式,但都只对其中一个守恒量(5)进行了模拟。本文利用 LAX 加权格式的构造思想,在空间层引入加权系数,对初边值问题(1)～(3)构造了一个具有二阶精度的含有加权系数的线性差分格式,该格式合理地模拟了守恒量(4)和(5),并保持了线性格式的优点。适当调整加权系数可以大幅提高计算精度,且明显优于文献[11]中的二阶三层线性差分格式。

1 差分格式及守恒律

对区域$[x_L,x_R]\times[0,T]$作网格剖分,取空间步长 $h=\dfrac{x_R-x_L}{J}$,时间步长为 τ, $x_j=x_L+jh(0\leqslant j\leqslant J)$,$t_n=n\tau\left(n=0,1,2,\cdots,N,N=\left[\dfrac{T}{\tau}\right]\right)$。用$C$ 表示与τ,h 无关的正常数,它在不同处可取不同的值。记 $u_j^n\equiv u(x_j,t_n)$,$U_j^n\approx u(x_j,t_n)$,以及 $Z_h^0=\{u=(u_j)\mid u_{-1}=u_0=u_J=u_{J+1}=0,j=-1,0,\cdots,J,J+1\}$,并定义以下记号:$(U_j^n)_x=\dfrac{U_{j+1}^n-U_j^n}{h}$,$(U_j^n)_{\bar{x}}=\dfrac{U_j^n-U_{j-1}^n}{h}$, $(U_j^n)_{\hat{x}}=\dfrac{U_{j+1}^n-U_{j-1}^n}{2h}$,$(U_j^n)_{\hat{t}}=\dfrac{U_j^{n+1}-U_j^{n-1}}{2\tau}$, $\overline{U}_j^n=\dfrac{U_j^{n+1}+U_j^{n-1}}{2}$,$\langle U^n,V^n\rangle=$

---

* **收稿日期**:2015-04-27　**网络出版时间**:2016-07-07 16:34
资助项目:四川省教育厅重点基金项目(No.16ZA0167);西华大学重点基金项目(No.Z1513324)
作者简介:王婷婷,女,讲师,研究方向为偏微分方程数值解法,E-mail: 2417706@qq.com;**通信作者**:胡劲松,教授,E-mail: hjs888hjs@163.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20160707.1634.052.html

$h\sum_{j=1}^{J-1}U_j^nV_j^n$，$\|U^n\|^2=\langle U^n,U^n\rangle$，$\|U^n\|_\infty=\max_{1\leqslant j\leqslant J-1}|U_j^n|$。

对问题(1)～(3)考虑如下有限差分格式$\left(\beta>\frac{1}{2}\right)$：

$$\frac{1-\beta}{2}(U_{j+1}^n+U_{j-1}^n)_{\hat{t}}+\beta(U_j^n)_{\hat{t}}+(U_j^n)_{xx\bar{x}\bar{x}\hat{t}}+(\overline{U}_j^n)_{\hat{x}}+(\overline{U}_j^n)_{x\bar{x}\hat{x}}+$$

$$\frac{1}{3}[U_j^n(\overline{U}_j^n)_{\hat{x}}+(U_j^n\overline{U}_j^n)_{\hat{x}}]=0,j=1,2,\cdots,J-1;n=1,2,\cdots,N-1,\tag{6}$$

$$U_j^0=u_0(x_j),\ j=0,1,2,\cdots,J,\tag{7}$$

$$U^n\in Z_h^0,(U_0^n)_{\hat{x}}=(U_J^n)_{\hat{x}}=0,(U_0^n)_{x\bar{x}}=(U_J^n)_{x\bar{x}}=0,n=0,1,2,\cdots,N。\tag{8}$$

为了便于分析，在本文中定义：$\psi(U_j^n,\overline{U}_j^n)=\frac{1}{3}[U_j^n(\overline{U}_j^n)_{\hat{x}}+(U_j^n\overline{U}_j^n)_{\hat{x}}]$。

定理 1　差分格式(6)～(8)式具有如下离散守恒量：

$$Q^n=h\sum_{j=1}^{J-1}\left\{\frac{(1-\beta)[U_{j+1}^{n+1}+U_{j-1}^{n+1}+U_{j+1}^n+U_{j-1}^n]}{4}+\frac{\beta(U_j^{n+1}+U_j^n)}{2}\right\}+$$

$$\frac{\tau}{6}h\sum_{j=1}^{J-1}(U_j^{n+1})_{\hat{x}}U_j^n=Q^{n-1}=\cdots=Q^0,\tag{9}$$

$$E^n=\frac{1-\beta}{2}h\sum_{j=1}^{J-1}(U_{j+1}^{n+1}U_j^{n+1}+U_{j+1}^nU_j^n)+\frac{\beta}{2}(\|U^{n+1}\|^2+\|U^n\|^2)+$$

$$\frac{1}{2}(\|U_{xx}^{n+1}\|^2+\|U_{xx}^n\|^2)=E^{n-1}=\cdots=E^0,\tag{10}$$

其中，$n=1,2,\cdots,N-1$。

证明　以 h 乘(6)式两端，然后对 j 求和，由(8)式和分部求和公式[14]，得

$$h\sum_{j=1}^{J-1}\left\{\frac{(1-\beta)}{2}(U_{j+1}^n+U_{j-1}^n)_{\hat{t}}+\beta(U_j^n)_{\hat{t}}\right\}+\frac{1}{3}h\sum_{j=1}^{J-1}U_j^n(\overline{U}_j^n)_{\hat{x}}=0,\tag{11}$$

又

$$h\sum_{j=1}^{J-1}U_j^n(\overline{U}_j^n)_{\hat{x}}=\frac{h}{2}\sum_{j=1}^{J-1}U_j^n(U_j^{n+1})_{\hat{x}}+\frac{h}{2}\sum_{j=1}^{J-1}U_j^n(U_j^{n-1})_{\hat{x}}=\frac{h}{2}\sum_{j=1}^{J-1}U_j^n(U_j^{n+1})_{\hat{x}}-\frac{h}{2}\sum_{j=1}^{J-1}U_j^{n-1}(U_j^n)_{\hat{x}},\tag{12}$$

将(12)式代入(11)式，然后递推可得(9)式。

将(6)式与 $2\overline{U}^n$ 作内积，由边界条件(8)和分部求和公式[14]得

$$\frac{1-\beta}{2\tau}h\sum_{j=1}^{J-1}(U_{j+1}^{n+1}U_j^{n+1}-U_{j+1}^{n-1}U_j^{n-1})+\beta\|U^n\|_{\hat{t}}^2+\|U_{xx}^n\|_{\hat{t}}^2+$$

$$2\langle\overline{U}_{\hat{x}}^n,\overline{U}^n\rangle+2\langle\overline{U}_{x\bar{x}\hat{x}}^n,\overline{U}^n\rangle+2\langle\psi(U^n,\overline{U}^n),\overline{U}^n\rangle=0,\tag{13}$$

又

$$\langle\overline{U}_{\hat{x}}^n,\overline{U}^n\rangle=0,\langle\overline{U}_{x\bar{x}\hat{x}}^n,\overline{U}^n\rangle=0,\tag{14}$$

$$\langle\psi(U^n,\overline{U}^n),\overline{U}^n\rangle=\frac{1}{3}h\sum_{j=1}^{J-1}[U_j^n(\overline{U}_j^n)_{\hat{x}}+(U_j^n\overline{U}_j^n)_{\hat{x}}]\overline{U}_j^n=\frac{1}{3}h\sum_{j=1}^{J-1}U_j^n\overline{U}_j^n(\overline{U}_j^n)_{\hat{x}}+\frac{1}{3}h\sum_{j=1}^{J-1}(U_j^n\overline{U}_j^n)_{\hat{x}}\overline{U}_j^n=$$

$$\frac{1}{3}h\sum_{j=1}^{J-1}(U_j^n\overline{U}_j^n)(\overline{U}_j^n)_{\hat{x}}-\frac{1}{3}h\sum_{j=1}^{J-1}U_j^n\overline{U}_j^n(\overline{U}_j^n)_{\hat{x}}=0,\tag{15}$$

于是由 E^n 的定义，将(14)和(15)式代入(13)式，然后对 n 递推可得(10)式。　　证毕

2 差分解的存在唯一性

定理 2　差分格式(6)～(8)的解存在且唯一。

证明　用数学归纳法证明。由于 U^0 由条件(7)确定，再用其他方法(如两层格式[12])先计算出 U^1，即 U^0 和 U^1 是被唯一确定的。假设 $U^1,\cdots,U^{n-1},U^n(n\leqslant N-1)$是唯一可解的，现在来考虑方程(6)中的 U^{n+1}，有

$$\frac{1-\beta}{4\tau}(U_{j+1}^{n+1}+U_{j-1}^{n+1})+\frac{\beta}{2\tau}U_j^{n+1}+\frac{1}{2\tau}(U_j^{n+1})_{xx\bar{x}\bar{x}}+\frac{1}{2}(U_j^{n+1})_{\hat{x}}+\frac{1}{2}(U_j^{n+1})_{x\bar{x}\hat{x}}+\frac{1}{2}\psi(U_j^n,U_j^{n+1})=0,\tag{16}$$

将(16)式与U^{n+1}作内积,由边界条件(8)和分部求和公式[14]得

$$\frac{1-\beta}{4\tau}h\sum_{j=1}^{J-1}(U_{j+1}^{n+1}+U_{j-1}^{n+1})U_j^{n+1}+\frac{\beta}{2\tau}\|U^{n+1}\|^2+\frac{1}{2\tau}\|U_{xx}^{n+1}\|^2+$$

$$\frac{1}{2}\langle U_{\hat{x}}^{n+1},U^{n+1}\rangle+\frac{1}{2}\langle U_{xx\hat{x}}^{n+1},U^{n+1}\rangle+\frac{1}{2}\langle\psi(U^n,U^{n+1}),U^{n+1}\rangle=0,\tag{17}$$

又

$$\langle U_{\hat{x}}^{n+1},U^{n+1}\rangle=0,\langle U_{xx\hat{x}}^{n+1},U^{n+1}\rangle=0,\tag{18}$$

$$\langle\psi(U^n,U^{n+1}),U^{n+1}\rangle=\frac{1}{3}h\sum_{j=1}^{J-1}U_j^nU_j^{n+1}(U_j^{n+1})_{\hat{x}}+\frac{1}{3}h\sum_{j=1}^{J-1}(U_j^nU_j^{n+1})_{\hat{x}}U_j^{n+1}=$$

$$\frac{1}{3}h\sum_{j=1}^{J-1}U_j^nU_j^{n+1}(U_j^{n+1})_{\hat{x}}-\frac{1}{3}h\sum_{j=1}^{J-1}U_j^nU_j^{n+1}(U_j^{n+1})_{\hat{x}}=0。\tag{19}$$

再根据 Cauchy-Schwarz 不等式,有

$$h\sum_{j=1}^{J-1}(U_{j+1}^{n+1}+U_{j-1}^{n+1})U_j^{n+1}\leqslant 2\|U^{n+1}\|^2。\tag{20}$$

由$\beta>\frac{1}{2}$,则$\beta-|1-\beta|>0$,于是将(18)~(20)式代入(17)式,整理有

$$(\beta-|1-\beta|)\|U^{n+1}\|^2+\|U_{xx}^{n+1}\|^2\leqslant 0,$$

即方程(16)仅有唯一零解。故差分格式(6)~(8)中的U_j^{n+1}存在且唯一。 证毕

3 差分格式的稳定性与收敛性

本小节,笔者在先验估计的基础上,运用离散泛函分析方法讨论差分解的收敛性和稳定性。

差分格式(6)~(8)的截断误差定义如下:

$$r_j^n=\frac{1-\beta}{2}(u_{j+1}^n+u_{j-1}^n)_{\hat{t}}+\beta(u_j^n)_{\hat{t}}+(u_j^n)_{xx\bar{x}x\hat{t}}+(\bar{u}_j^n)_{\hat{x}}+(\bar{u}_j^n)_{xx\hat{x}}+$$

$$\psi(u_j^n,\bar{u}_j^n),j=1,2,\cdots,J-1;n=1,2,\cdots,N-1,\tag{21}$$

$$u_j^0=u_0(x_j),j=0,1,2,\cdots,J,\tag{22}$$

$$u^n\in Z_h^0,(u_0^n)_{\hat{x}}=(u_J^n)_{\hat{x}}=0,(u_0^n)_{x\bar{x}}=(u_J^n)_{x\bar{x}}=0,n=0,1,2,\cdots,N。\tag{23}$$

由 Taylor 展开,可知,当$h,\tau\to 0$时,$|r_j^n|=O(\tau^2+h^2)$。

引理 1[11] 设$u_0\in H^2[x_L,x_R]$,则初边值问题(1)~(3)的解满足:

$$\|u\|_{L_2}\leqslant C,\|u_x\|_{L_2}\leqslant C,\|u_{xx}\|_{L_2}\leqslant C,\|u_x\|_{L_\infty}\leqslant C,\|u\|_{L_\infty}\leqslant C。$$

定理 3 设$u_0\in H_0^2[x_L,x_R]$,则差分格式(6)~(8)的解满足:$\|U^n\|\leqslant C$,$\|U_x^n\|\leqslant C$,$\|U_{xx}^n\|\leqslant C$,从而有$\|U^n\|_\infty\leqslant C$,$\|U_x^n\|_\infty\leqslant C(n=1,2,\cdots,N)$。

证明 由于

$$h\sum_{j=1}^{J-1}U_{j+1}^{n+1}U_j^{n+1}\leqslant\|U^{n+1}\|^2;h\sum_{j=1}^{J-1}U_{j+1}^nU_j^n\leqslant\|U^n\|^2,\tag{24}$$

则由定理1可得$\left(\frac{\beta}{2}-\frac{|1-\beta|}{2}\right)(\|U^{n+1}\|^2+\|U^n\|^2)+\frac{1}{2}(\|U_{xx}^{n+1}\|^2+\|U_{xx}^n\|^2)\leqslant E^n=E^0=C$,由$\beta>\frac{1}{2}$,则$\frac{\beta}{2}-\frac{|1-\beta|}{2}>0$,从而有$\|U^n\|\leqslant C$,$\|U_{xx}^n\|\leqslant C$,再由 Cauchy-Schwarz 不等式有:

$$\|U_x^n\|^2\leqslant\|U^n\|\cdot\|U_{xx}^n\|\leqslant\frac{1}{2}(\|U^n\|^2+\|U_{xx}^n\|^2),\tag{25}$$

则$\|U_x^n\|\leqslant C$,最后由离散 Sobolev 不等式[14]得$\|U^n\|_\infty\leqslant C$,$\|U_x^n\|_\infty\leqslant C$。 证毕

注 定理3也表明,差分格式(6)~(8)的解U^n关于初值以$\|\cdot\|_\infty$无条件稳定。

定理 4 设$u_0\in H_0^2[x_L,x_R]$,则差分格式(6)~(8)的解U^n以$\|\cdot\|_\infty$收敛到原问题(1)~(3)的解,并且收敛阶为$O(\tau^2+h^2)$。

证明 记$e_j^n=u_j^n-U_j^n$,由(21)~(23)式减去(6)~(8)式,得

$$r_j^n=\frac{1-\beta}{2}(e_{j+1}^n+e_{j-1}^n)_{\hat{t}}+\beta(e_j^n)_{\hat{t}}+(e_j^n)_{xx\bar{x}\bar{x}\hat{t}}+(\bar{e}_j^n)_{\hat{x}}+(\bar{e}_j^n)_{x\bar{x}\hat{x}}+$$

$$\psi(u_j^n,\bar{u}_j^n)-\psi(U_j^n,\bar{U}_j^n),j=1,2,\cdots,J-1,n=1,2,\cdots,N-1, \tag{26}$$

$$e_j^0=0,j=0,1,2,\cdots,J, \tag{27}$$

$$e^n\in Z_h^0,(e_0^n)_{\hat{x}}=(e_J^n)_{\hat{x}}=0,(e_0^n)_{x\bar{x}}=(e_J^n)_{x\bar{x}}=0,n=0,1,2,\cdots,N。 \tag{28}$$

将(26)式两端与 $2\bar{e}^n$ 作内积，由边界条件(28)和分部求和公式[14]有

$$\langle r^n,2\bar{e}^n\rangle=\frac{1-\beta}{2\tau}h\sum_{j=1}^{J-1}(e_{j+1}^{n+1}e_j^{n+1}-e_{j+1}^{n-1}e_j^{n-1})+\beta\|e^n\|_{\hat{t}}^2+\|e_{xx}^n\|_{\hat{t}}^2+2\langle\bar{e}_{\hat{x}}^n,\bar{e}^n\rangle+$$

$$2\langle\bar{e}_{x\bar{x}\hat{x}}^n,\bar{e}^n\rangle+2\langle\psi(u_j^n,\bar{u}_j^n)-\psi(U_j^n,\bar{U}_j^n),\bar{e}^n\rangle, \tag{29}$$

类似于(14)式有

$$\langle\bar{e}_{\hat{x}}^n,\bar{e}^n\rangle=0,\langle\bar{e}_{x\bar{x}\hat{x}}^n,\bar{e}^n\rangle=0。 \tag{30}$$

利用引理 1、定理 3 以及 Cauchy-Schwarz 不等式，有

$$\langle\psi(u^n,\bar{u}^n)-\psi(U^n,\bar{U}^n),\bar{e}^n\rangle=\frac{1}{3}h\sum_{j=1}^{J-1}[u_j^n(\bar{u}_j^n)_{\hat{x}}-U_j^n(\bar{U}_j^n)_{\hat{x}}]\bar{e}_j^n-\frac{1}{3}h\sum_{j=1}^{J-1}(u_j^n\bar{u}_j^n-U_j^n\bar{U}_j^n)(\bar{e}_j^n)_{\hat{x}}=$$

$$\frac{1}{3}h\sum_{j=1}^{J-1}[e_j^n(\bar{u}_j^n)_{\hat{x}}+U_j^n(\bar{e}_j^n)_{\hat{x}}]\bar{e}_j^n-\frac{1}{3}h\sum_{j=1}^{J-1}(e_j^n\bar{u}_j^n+U_j^n\bar{e}_j^n)(\bar{e}_j^n)_{\hat{x}}\leqslant$$

$$C(\|e^n\|^2+\|\bar{e}^n\|^2+\|\bar{e}_x^n\|^2)\leqslant C(\|e^{n+1}\|^2+\|e^n\|^2+\|e^{n+1}\|^2+\|e_x^{n+1}\|^2+\|e_x^{n-1}\|^2), \tag{31}$$

$$\langle r^n,2\bar{e}^n\rangle=\langle r^n,e^{n+1}+e^{n-1}\rangle\leqslant\|r^n\|^2+\|e^{n+1}\|^2+\|e^{n-1}\|^2。 \tag{32}$$

将(30)～(32)式代入(29)式，并结合(25)式，整理得

$$\frac{1-\beta}{2\tau}h\sum_{j=1}^{J-1}(e_{j+1}^{n+1}e_j^{n+1}-e_{j+1}^{n-1}e_j^{n-1})+\beta\|e^n\|_{\hat{t}}^2+\|e_{xx}^n\|_{\hat{t}}^2\leqslant\|r^n\|^2+C(\|e^{n+1}\|^2+\|e^n\|^2+\|e^{n-1}\|^2+$$

$$\|e_x^{n+1}\|^2+\|e_x^n\|^2)\leqslant\|r^n\|^2+C(\|e^{n+1}\|^2+\|e^n\|^2+\|e^{n-1}\|^2+\|e_{xx}^{n+1}\|^2+\|e_{xx}^{n-1}\|^2)。 \tag{33}$$

令 $B^n=(1-\beta)h\sum_{j=1}^{J-1}(e_{j+1}^{n+1}e_j^{n+1}+e_{j+1}^ne_j^n)+\beta(\|e^{n+1}\|^2+\|e^n\|^2)+(\|e_{xx}^{n+1}\|^2+\|e_{xx}^n\|^2)$，将(33)式两端同时乘以 2τ，然后从 1 到 n 求和得：

$$B^n\leqslant B^0+2\tau\sum_{l=1}^{n}\|r^l\|^2+C\tau\sum_{l=0}^{n+1}(\|e^l\|^2+\|e_{xx}^l\|^2)。 \tag{34}$$

先用具有二阶精度的两层差分格式[12]先计算出 U^1，使满足：$B^0=O(\tau^2+h^2)^2$，又 $\tau\sum_{l=1}^{n}\|r^l\|^2\leqslant n\tau\max_{1\leqslant l\leqslant n}\|r^l\|^2\leqslant T\cdot O(\tau^2+h^2)^2$，又类似于(24)式，有 $B^n\geqslant(\beta-|1-\beta|)(\|e^{n+1}\|^2+\|e^n\|^2)+(\|e_{xx}^{n+1}\|^2+\|e_{xx}^n\|^2)$。由 $\beta>\frac{1}{2}$，则 $\beta-|1-\beta|>0$，则(34)式可整理为：$(\|e^{n+1}\|^2+\|e^n\|^2)+(\|e_{xx}^{n+1}\|^2+\|e_{xx}^n\|^2)\leqslant O(\tau^2+h^2)^2+C\tau\sum_{l=0}^{n+1}(\|e^l\|^2+\|e_{xx}^l\|^2)$，于是由离散 Gronwall 不等式[14]，有 $\|e^n\|\leqslant O(\tau^2+h^2)$，$\|e_{xx}^n\|\leqslant O(\tau^2+h^2)$。再类似(25)式，有 $\|e_x^n\|\leqslant O(\tau^2+h^2)$，最后由离散 Sobolev 不等式[14]有：$\|e^n\|_\infty\leqslant O(\tau^2+h^2)$。

证毕

4 数值实验

由于 Rosenau-KdV 方程(1)的孤波解[7]为：

$$u(x,t)=\left(-\frac{35}{24}+\frac{35}{312}\sqrt{313}\right)\mathrm{sech}^4\left[\frac{1}{24}\sqrt{-26+2\sqrt{313}}\cdot\left(x-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{26}\sqrt{313}\right)t\right)\right],$$

在数值实验中，取 $u_0(x)=u(x,0)$，固定 $x_L=-70$，$x_R=100$，$T=40$。对于本文格式就 τ 和 h 的不同取值，分别列出了 $t=20$ 和 $t=40$ 两个时刻在加权系数 β 取不同值的时候的误差比较，以及加权系数取 0.5 和 1.0 两种情形下的守恒量 Q^n 和 E^n 的部分数据(表 1～4)。

注意到，文献[11]中的 3 层线性差分格式为本文格式的一个特例($\beta=1$)。从表 1～4 可以看出，本文格式在不同参数下都明显地具有二阶精度；随着加权系数($\beta>0.5$)逐渐增大，数值解的误差也随之变大；当加权系数

$\beta<1$ 时,计算效果都比文献[11]中的差分格式要好,且当 $\beta=0.5$ 时计算效果最佳。另外,格式也对守恒量(4)和(5)进行了高精度模拟。故本文对初边值问题(1)～(3)提出的加权格式是可靠的。

表1 $t=20$ 时,在不同参数下的误差比较

Tab.1 The error at various weight coefficient with $t=20$

β	$\tau=h=0.1$		$\tau=h=0.05$		$\tau=h=0.025$	
	$\|e^n\|$	$\|e^n\|_\infty$	$\|e^n\|$	$\|e^n\|_\infty$	$\|e^n\|$	$\|e^n\|_\infty$
0.5	1.672 45e−3	6.059 46e−4	4.187 80e−4	1.517 57e−4	1.045 59e−4	3.797 71e−5
0.75	2.356 65e−3	8.688 49e−4	5.903 26e−4	2.176 51e−4	1.474 90e−4	5.446 49e−5
1.0	3.045 41e−3	1.131 44e−3	7.631 23e−4	2.835 87e−4	1.907 42e−4	7.096 70e−5
1.25	3.735 86e−3	1.394 12e−3	9.364 57e−4	3.495 25e−4	2.341 30e−4	8.747 24e−5
1.5	4.426 94e−3	1.656 53e−3	1.110 06e−3	4.154 45e−4	2.775 94e−4	1.039 79e−4

表2 $t=40$ 时,在不同参数下的误差比较

Tab.2 The error at various weight coefficient with $t=40$

β	$\tau=h=0.1$		$\tau=h=0.05$		$\tau=h=0.025$	
	$\|e^n\|$	$\|e^n\|_\infty$	$\|e^n\|$	$\|e^n\|_\infty$	$\|e^n\|$	$\|e^n\|_\infty$
0.5	3.003 93e−3	1.047 71e−3	7.521 33e−4	2.623 25e−4	1.873 73e−4	6.550 86e−5
0.75	4.148 86e−3	1.463 21e−3	1.039 26e−3	3.665 93e−4	2.592 37e−4	9.159 75e−5
1.0	5.297 87e−3	1.878 95e−3	1.327 66e−3	4.709 15e−4	3.314 25e−4	1.177 11e−4
1.25	6.448 07e−3	2.294 08e−3	1.616 61e−3	5.752 77e−4	4.037 62e−4	1.438 35e−4
1.5	7.598 32e−3	2.708 60e−4	1.905 81e−3	6.796 01e−4	4.761 78e−4	1.699 61e−4

表3 $\beta=0.5$ 时,守恒量 Q^n 和 E^n 的部分数据

Tab.3 Numerical simulations on two conservation invariants Q^n and E^n with $\beta=0.5$

	$\tau=h=0.1$		$\tau=h=0.025$	
	Q^n	E^n	Q^n	E^n
$t=0$	5.498 286 705 639	1.989 637 717 935	5.498 180 747 372	1.989 773 862 561
$t=10$	5.498 286 706 444	1.989 637 718 515	5.498 181 572 242	1.989 774 459 065
$t=20$	5.498 286 707 225	1.989637719077	5.498 182 392 754	1.989 775 051 477
$t=30$	5.498 286 708 645	1.989 637 719 643	5.498 183 212 845	1.989 775 643 306
$t=40$	5.498 286 672 426	1.989 637 720 220	5.498 184 024 306	1.989 776 231 307

表4 $\beta=1.0$ 时,守恒量 Q^n 和 E^n 的部分数据

Tab.4 Numerical simulations on two conservation invariants Q^n and E^n with $\beta=1.0$

	$\tau=h=0.1$		$\tau=h=0.025$	
	Q^n	E^n	Q^n	E^n
$t=0$	5.498 286 705 639	1.989 781 381 251	5.498 201 945 035	1.989 782 549 954
$t=10$	5.498 286 706 441	1.989 781 381 831	5.498 201 970 525	1.989 782 568 330
$t=20$	5.498 286 707 244	1.989 781 382 408	5.498 201 996 085	1.989 782 586 764
$t=30$	5.498 286 708 470	1.989 781 382 979	5.498 202 021 876	1.989 782 605 276
$t=40$	5.498 286 667 302	1.989 781 383 552	5.498 202 036 346	1.989 782 623 639

参考文献:

[1] Rosenau P. A quasi-continuous description of a nonlinear transmission line[J]. Physical Scripta,1986,34:827-829.

[2] Rosenau P. Dynamics of dense discrete systems[J]. Progress of Theoretical Physics,1988,79:1028-1042.

[3] Park M A. On the Rosenau equation[J]. Applied Mathematics and Computation,1990,9(2):145-152.

[4] Cui Y F, Mao D K. Numerical method satisfying the first two conservation laws for the Kortewegde Vries equation [J]. Journal of Computational Physics, 2007, 227(1): 376-399.

[5] Zhu S H, Zhao J. The alternating segment explicit-implicit scheme for the dispersive equation[J]. Applied Mathematics Letters, 2001, 14(6): 657-662.

[6] Özer S, Kutluay S. An analytical-numerical method for solving the Korteweg-de Vries equation[J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, 164(3): 789-797.

[7] Zuo J M. Solitons and periodic solutions for the Rosenau-KdV and Rosenau-Kawahara equations[J]. Applied Mathematics and Computation, 2009, 215(2): 835-840.

[8] Esfahani A. Solitary wave solutions for generalized Rosenau-KdV equation[J]. Communication in Theoretical Physics, 2011, 55(3): 396-398.

[9] Razborova P, Triki H, Biswas A. Perturbation of dispersive shallow water waves[J]. Ocean Engineering, 2013, 63: 1-7.

[10] Ebadi G, Mojaver A, Triki H, et al. Topological solitons and other solutions of the Rosenau-KdV equation with power law nonlinearity[J]. Romanian Journal of Physics, 2013, 58(1/2): 1-10.

[11] Hu J S, Xu Y C, Hu B. Conservative linear difference scheme for Rosenau-KdV equation[EB/OL]. [2015-03-20]. http://dx.doi.org/ 10.1155/2013/423718.

[12] Luo Y, Xu Y C, Feng M F. Conservative difference scheme for generalized Rosenau-KdV equation[EB/OL]. [2015-03-20]. http://dx.doi.org/ 10.1155/2014/986098.

[13] Zheng M B, Zhou J. An average linear difference scheme for the generalized Rosenau-KdV equation[J]. Journal of Applied Mathematics, 2014(1): 1-9.

[14] Zhou Y L. Application of discrete functional analysis to the finite difference methods[M]. Beijing: International Academic Publishers, 1991.

A Weighted Linear Conservative Difference Approximation for Rosenau-KdV Equation

WANG Tingting, HU Jinsong

(School of Science, Xihua University, Chengdu 610039, China)

Abstract: In this paper, a finite difference method for an initial-boundary value problem of Rosenau-KdV equation is considered. Under the premise of keeping the second-order accuracy, a conservative infinite difference of three levels with weight coefficient was proposed by LAX scheme. This scheme simulates two conservation properties of the problem well . Error estimates based on discrete functional analysis method are derived. Existence and uniqueness of numerical solutions were derived; it is proved that the finite difference scheme is convergent with second-order and stable. Numerical experiment also shows that appropriate adjustments to the weighted parameter would significantly improve the computational accuracy. And numerical examples confirm the theoretical results.

Key words: Rosenau-KdV equation; difference scheme; conservative; convergence; stability

(责任编辑 游中胜)