2016 年 7 月　　重庆师范大学学报(自然科学版)　　Jul. 2016
第 33 卷 第 4 期　　Journal of Chongqing Normal University (Natural Science)　　Vol. 33 No. 4

DOI:10.11721/cqnuj20160439

关于不定方程组 $x^2-5y^2=1$ 与 $y^2-Dz^2=16$ 的公解*

万　飞,杜先存

(红河学院 教师教育学院,云南 蒙自 661199)

摘要:运用 Pell 方程的解的性质、递归序列和同余等初等方法讨论了当 $p_s(1\leqslant s\leqslant 4)$ 是互异的奇素数,$D=2^t p_1^{a_1} p_2^{a_2}\cdot p_3^{a_3} p_4^{a_4}(a_i=0$ 或 $1,1\leqslant i\leqslant 4,t\in\mathbf{Z}^+$,且 $t\neq 2,4)$ 时,不定方程组 $x^2-5y^2=1$ 与 $y^2-Dz^2=16$ 仅当 $D=2^t\times 7\times 23(t=1,3,5,7)$ 时有正整数解。

关键词:不定方程组;整数解;奇素数;递归序列

中图分类号:O156　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2016)04-0105-05

近年来,不定方程组 $x^2-D_1y^2=k(D_1\in\mathbf{Z}^+,k\in\mathbf{Z})$ 与 $y^2-D_2z^2=m(D_2\in\mathbf{Z}^+,m\in\mathbf{Z})$ 的求解问题一直受到人们的关注。当 $k=1,m=1$ 时方程组成为:

$$x^2-D_1y^2=1 \text{ 与 } y^2-D_2z^2=1。\tag{1}$$

关于方程组(1)的解的情况,目前主要集中在解数范围和解数估计上,对于方程组(1)的具体解,目前结论还比较少,主要为:文献[1]得出了$(D_1,D_2)=(2,3)$时方程组(1)仅有正整数解$(x,y,z)=(3,2,1)$;文献[2]讨论了当 $D_1=8$ 时方程组(2)的解的情况;文献[3]给出了方程组(1)有正整数解的一个充要条件。

当 $k=1,m=4$ 时方程组成为:

$$x^2-D_1y^2=1 \text{ 与 } y^2-D_2z^2=4,\tag{2}$$

其中,D_1,D_2 均为偶数时,方程组(2)已有如下结果:1)$D_1=2$,文献[4-5]等对 D_2 的不同情况做过一些研究;2)$D_1=6$,当 $D=2^n(n\geqslant 1,n\in\mathbf{N})$时,文献[6]得到了方程组(1)仅有正整数解$(x,y,z)=(485,198,35)$;当 $D=2\prod_{i=1}^{k}p_i$(p_i 是互异的奇素数)时,文献[7]已经对 p_i 受某些条件限制的情况做过一些工作;当 D 至多含 4 个不同的奇素数时,文献[8-9]已经解决;3)$D_1=10$,文献[10]已经对 p_i 受某些条件限制的情况做过一些工作;4)$D_1=30$,当 $D=2^n(n\geqslant 1,n\in\mathbf{N})$时,文献[11]已经解决。当 $k=1,m=16$ 时方程组成为:

$$x^2-D_1y^2=1 \text{ 与 } y^2-D_2z^2=16\tag{3}$$

的解的情况,目前无相关结果。本文主要讨论 $k=1,m=16,D_1=5$ 时(3)式的解的情况。

1 关键性引理

引理 1[12]　设 p 是一个奇素数,则丢番图方程 $x^4-py^2=1$ 除开 $p=5,x=3,y=4$ 和 $p=29,x=99,y=1\,820$ 外,无其他的正整数解。

引理 2[13]　当 $a>1$ 且 a 是平方数时,方程 $ax^4-by^2=1$ 至多有一组正整数解。

引理 3[14]　若 D 是一个非平方的正整数,则方程 $x^2-Dy^4=1$ 至多有两组正整数解(x,y),而且方程恰有两组正整数解的充要条件是 $D=1\,785$ 或 $D=28\,560$ 或 $2x_0$ 和 y_0 都是平方数,这里(x_0,y_0)是方程 $x^2-Dy^2=1$ 的

* **收稿日期**:2015-07-25　**修回日期**:2015-12-17　**网络出版时间**:2016-07-07 16:31

资助项目:云南省教育厅科研基金(No. 2014Y462);红河学院校级课题(No. XJ15Y22);红河学院中青年学术骨干培养资助项目(No. 2015GG0207)

作者简介:万飞,女,副教授,研究方向为初等数论及数学教育,E-mail:mzwanfei@163.com;**通信作者**:杜先存,副教授,E-mail:liye686868@163.com

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20160707.1631.002.html

基本解。

引理4　设(x_n,y_n),$n\in\mathbf{Z}$为Pell方程$x^2-5y^2=1$的所有解,则对任意的x_n,y_n具有如下性质:

1) x_n为平方数当且仅当$n=1$或$n=0$,$\frac{x_n}{9}$为平方数当且仅当$n=1$;

2) $\frac{y_n}{4}$为平方数当且仅当$n=1$或$n=0$。

证明　设(x_n,y_n)($n\in\mathbf{Z}$)是Pell方程$x^2-5y^2=1$的整数解。

1) 若$x_n=a^2$,代入原方程得$a^4-5y^2=1$。由引理1知,$a^4-5y^2=1$仅有非平凡解$(a,y)=(\pm 3,\pm 4)$及平凡解$(a,y)=(\pm 1,0)$,此时$x_n=9$或1,从而$n=1$或$n=0$。反之,显然。

若$\frac{x_n}{9}=a^2$,则$x_n=9a^2$,代入原方程得$81a^4-5y^2=1$。由引理2知,$81a^4-5y^2=1$至多只有一组正整数解,而(1,4)为方程$81a^4-5y^2=1$的正整数解,故方程$81a^4-5y^2=1$仅有整数解$(a,y)=(\pm 1,\pm 4)$,此时$x_n=9$,从而$n=1$。反之,显然。

2) 若$\frac{y_n}{4}=b^2$,则$y_n=4b^2$,代入原方程得$x_n^2-80b^4=1$。因为$x_n^2-80b^4=1$的基本解为$(x_1,b_1)=(9,1)$,故$2x_1=18$不为平方数,由引理3得,$x_n^2-80b^4=1$至多只有一组正整数解。又(9,1)是$x_n^2-80b^4=1$的一组正整数解,故$x_n^2-80b^4=1$仅有整数解$(x_n,b)=(\pm 9,\pm 1)$,$(\pm 1,0)$,此时$y_n=4$或$y_n=0$,从而$n=1$或$n=0$。反之,显然。　证毕

2 定理及证明

定理　若p_s($1\leqslant s\leqslant 4$)是互异的奇素数,则当$D=2^t p_1^{a_1}p_2^{a_2}p_3^{a_3}p_4^{a_4}$($a_i=0$或1,$1\leqslant i\leqslant 4$,$t\in\mathbf{Z}^+$,且$t\neq 2,4$)时,不定方程组

$$x^2-5y^2=1\text{ 与 }y^2-Dz^2=16。\tag{4}$$

1) 当$D=2\times 7\times 23$时,方程组(4)有非平凡解$(x,y,z)=(\pm 2\ 889,\pm 1\ 292,\pm 72)$和平凡解$(x,y,z)=(\pm 9,\pm 4,0)$;

2) 当$D=2^3\times 7\times 23$时,方程组(4)有非平凡解$(x,y,z)=(\pm 2\ 889,\pm 1\ 292,\pm 36)$和平凡解$(x,y,z)=(\pm 9,\pm 4,0)$;

3) 当$D=2^5\times 7\times 23$时,方程组(4)有非平凡解$(x,y,z)=(\pm 2\ 889,\pm 1\ 292,\pm 18)$和平凡解$(x,y,z)=(\pm 9,\pm 4,0)$;

4) 当$D=2^7\times 7\times 23$时,方程组(4)有非平凡解为$(x,y,z)=(\pm 2\ 889,\pm 1\ 292,\pm 9)$和平凡解$(x,y,z)=(\pm 9,\pm 4,0)$;

5) 当$D\neq 2^\alpha\times 7\times 23$($\alpha=1,3,5,7$)时,方程组(4)只有平凡解$(x,y,z)=(\pm 9,\pm 4,0)$。

证明　设(x_1,y_1)为Pell方程$x^2-5y^2=1$的基本解,则有$(x_1,y_1)=(9,4)$,故Pell方程$x^2-5y^2=1$的全部正整数解为:

$$x_n+\sqrt{5}\,y_n=(x_1+\sqrt{5}\,y_1)^n=(9+4\sqrt{5})^n,n\in\mathbf{Z}^+。$$

容易验证以下性质成立:

$$x_{n+2}=18x_{n+1}-x_n,x_0=1,x_1=9,\tag{5}$$

$$y_{n+2}=18y_{n+1}-y_n,y_0=0,y_1=4,\tag{6}$$

$$x_n\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2),x_n\equiv\pm 1(\mathrm{mod}\ 5);x_{2n+1}\equiv 0(\mathrm{mod}\ 9),x_{2n}\equiv\pm 1(\mathrm{mod}\ 9),\tag{7}$$

$$y_{2n}\equiv 0(\mathrm{mod}\ 8),y_{2n+1}\equiv 4(\mathrm{mod}\ 8),y_{2n+1}\equiv\pm 4(\mathrm{mod}\ 9),y_{2n}\equiv 0(\mathrm{mod}\ 9)。\tag{8}$$

设$(x,y,z)=(x_n,y_n,z)$,$n\in\mathbf{Z}$为(4)式的整数解,则对任意的$n\in\mathbf{Z}$,有$y_n^2-16=y_n^2-16(x_n^2-5y_n^2)=81y_n^2-16x_n^2=(9y_n+4x_n)(9y_n-4x_n)=y_{n+1}y_{n-1}$,即

$$y_n^2-16=y_{n+1}y_{n-1}。\tag{9}$$

情形1　n为正偶数,由(8)式中的$y_{2n+1}\equiv 4(\mathrm{mod}\ 8)$知$y_{n-1}\equiv y_{n+1}\equiv 4(\mathrm{mod}\ 8)$,则$4\parallel y_{n-1}$,$4\parallel y_{n+1}$,于是

(4)式为 $Dz^2=y_{n-1}y_{n+1}=2^4\cdot\frac{y_{n-1}}{4}\cdot\frac{y_{n+1}}{4}$,故 $z=4,D=\frac{y_{n-1}}{4}\cdot\frac{y_{n+1}}{4}$(为奇数),或 $z=2,D=2^2\cdot\frac{y_{n-1}}{4}\cdot\frac{y_{n+1}}{4}$(含 2 的次数为 2 次),或 $z=1,D=2^4\cdot\frac{y_{n-1}}{4}\cdot\frac{y_{n+1}}{4}$(含 2 的次数为 4 次),这与题设"$t\in\mathbf{Z}^+$,且 $t\neq2,4$"矛盾。

情形 2　n 为奇数,令 $n=2m+1,m\in\mathbf{Z}$。此时(4)式成为 $Dz^2=y_{2m+1}^2-16=y_{2m}y_{2(m+1)}=4x_my_mx_{m+1}y_{m+1}$,即

$$Dz^2=4x_my_mx_{m+1}y_{m+1}。\tag{10}$$

当 $m=-1$ 时,(10)式为 $Dz^2=4x_{-1}y_{-1}x_0y_0=0$,则 $z=0$,此时(4)式仅有平凡解 $(x,y,z)=(\pm9,\pm4,0)$。

当 $m=0$ 时,(10)式为 $Dz^2=4x_0y_0x_1y_1=0$,则 $z=0$,此时(4)式仅有平凡解 $(x,y,z)=(\pm9,\pm4,0)$。

当 $m\neq0$ 且 $m\neq-1$ 时,对 m 进行分类讨论:

1) $m\neq-1$ 为奇数。由 $x_m^2-5y_m^2=1$ 知,$gcd(x_m,y_m)=1$,同理 $gcd(x_{m+1},y_{m+1})=1$;

由(7)式,得

$$gcd(x_m,x_{m+1})=gcd(x_m,9x_m+20y_m)=gcd(x_m,20y_m)=1;$$

由(8)式,得

$$gcd(y_m,y_{m+1})=gcd(y_m,4x_m+9y_m)=gcd(y_m,4x_m)=4,$$

故 $gcd\left(\frac{y_m}{4},\frac{y_{m+1}}{4}\right)=1$;

由(7)式,得

$$gcd(x_m,y_{m+1})=gcd(x_m,4x_m+9y_m)=gcd(x_m,9y_m)=9,$$

则 $gcd\left(\frac{x_m}{9},\frac{y_{m+1}}{9}\right)=1$;

由(8)式,得

$$gcd(x_{m+1},y_m)=gcd(9x_m+20y_m,y_m)=gcd(9x_m,y_m)=1。$$

所以有 $\frac{x_m}{9},x_{m+1},\frac{y_m}{4},\frac{y_{m+1}}{36}$ 两两互素。

令 $m=2k-1,k\in\mathbf{Z}^+$,此时(10)式成为 $Dz^2=4x_{2k-1}y_{2k-1}x_{2k}y_{2k}=8x_{2k-1}x_{2k}x_ky_ky_{2k-1}$,即

$$Dz^2=8x_{2k-1}x_{2k}x_ky_ky_{2k-1}。\tag{11}$$

又 $gcd(x_k,y_k)=1$,则有当 k 为正奇数时,$\frac{x_{2k-1}}{9},x_{2k},\frac{x_k}{9},\frac{y_k}{4},\frac{y_{2k-1}}{4}$ 两两互素;当 k 为正偶数时,$\frac{x_{2k-1}}{9},x_{2k},x_k,\frac{y_k}{36},\frac{y_{2k-1}}{4}$ 两两互素。

① k 为奇数,由(8)式知 $4\parallel y_k,4\parallel y_{2k-1}$,故 $\frac{y_k}{4},\frac{y_{2k-1}}{4}$ 为奇数;又由(7)式知 $\frac{x_{2k-1}}{9},x_{2k},\frac{x_k}{9}$ 均为奇数,故 $\frac{x_{2k-1}}{9},x_{2k},\frac{x_k}{9},\frac{y_k}{4},\frac{y_{2k-1}}{4}$ 均为奇数。

由引理 4 知,仅当 $k=1$ 时,$\frac{x_{2k-1}}{9},\frac{x_k}{9},\frac{y_k}{4},\frac{y_{2k-1}}{4}$ 为平方数,此时(11)式为 $Dz^2=8x_1^2\cdot y_1^2\cdot x_2=8\times9^2\times4^2\times161=2^7\times3^4\times7\times23$,故有 $D=2^\alpha\times7\times23(\alpha=1,3,5,7)$,$z=9\times2^{\frac{7-\alpha}{2}}$。当 $\alpha=1$ 时,得 $z=9\times2^3=72$,此时得出方程组(4)的非平凡解为 $(x,y,z)=(\pm2\ 889,\pm1\ 292,\pm72)$;当 $\alpha=3$ 时,得 $z=9\times2^2=36$,此时得出方程组(4)的非平凡解为 $(x,y,z)=(\pm2\ 889,\pm1\ 292,\pm36)$;当 $\alpha=5$ 时,得 $z=9\times2=18$,此时得出方程组(4)的非平凡解为 $(x,y,z)=(\pm2\ 889,\pm1\ 292,\pm18)$;当 $\alpha=7$ 时,得 $z=9$,此时得出方程组(4)的非平凡解为 $(x,y,z)=(\pm2\ 889,\pm1\ 292,\pm9)$。

当 $k\neq1$ 且为奇数时,$x_{2k},\frac{x_{2k-1}}{9},\frac{x_k}{9},\frac{y_k}{4},\frac{y_{2k-1}}{4}$ 均不为平方数,所以它们至少为 D 提供 5 个互异的奇素因子,故(11)式不成立,则方程(4)无整数解。

② k 为偶数,令 $k=2l,l\in\mathbf{Z}^+$,此时(11)式成为 $Dz^2=8x_{4l-1}x_{4l}x_{2l}y_{2l}y_{4l-1}=16x_{4l-1}x_{4l}x_{2l}x_ly_ly_{4l-1}$,即

$$Dz^2=16x_{4l-1}x_{4l}x_{2l}x_ly_ly_{4l-1}。\tag{12}$$

又 $gcd(x_l,y_l)=1$，则有 l 为奇数时$\frac{x_{4l-1}}{9}$，x_{4l}，x_{2l}，$\frac{x_l}{9}$，$\frac{y_l}{4}$，$\frac{y_{4l-1}}{4}$两两互素；l 为偶数时$\frac{x_{4l-1}}{9}$，x_{4l}，x_{2l}，x_l，$\frac{y_l}{36}$，$\frac{y_{4l-1}}{4}$两两互素。

由(7)式知$\frac{x_{4l-1}}{9}$，x_{4l}，x_{2l}，x_l 均为奇数，由(8)式知$\frac{y_{4l-1}}{4}$为奇数，l 为正奇数$\frac{y_l}{36}$为奇数。故 l 为奇数时$\frac{x_{4l-1}}{9}$，x_{4l}，x_{2l}，x_l，$\frac{y_l}{36}$，$\frac{y_{4l-1}}{4}$均为奇数；l 为偶数时，$\frac{x_{4l-1}}{9}$，x_{4l}，x_{2l}，x_l，$\frac{y_{4l-1}}{4}$均为奇数。

由引理 4 知，仅当 $l=1$ 时，x_l 为平方数，而 $l\in\mathbf{Z}^+$，则$\frac{x_{4l-1}}{9}$，x_{4l}，x_{2l}，$\frac{y_{4l-1}}{4}$恒不为平方数。当 $l=1$ 时(12)式为 $Dz^2=16x_4x_3x_2x_1y_1y_3=2^4\times9\times161\times2\ 889\times51\ 841\times4\times1\ 292=2^8\times3^4\times3\times7\times23\times107\times47\times1\ 103\times17\times19$，则右边含 8 个互异的素因子，因此右边为 D 提供了 8 个互异的奇素因子，矛盾。

当 $l\neq1$ 时，因为$\frac{x_{4l-1}}{9}$，x_{4l}，x_{2l}，$\frac{y_{4l-1}}{4}$，x_l 不为平方数，故当 $l\neq1$ 为正奇数时$\frac{x_{4l-1}}{9}$，x_{4l}，x_{2l}，x_l，$\frac{y_{4l-1}}{4}$至少为 D 提供 5 个互异的奇素因子，故(12)式不成立，则方程(4)无正整数解；当 l 为正偶数时$\frac{x_{4l-1}}{9}$，x_{4l}，x_{2l}，x_l，$\frac{y_{4l-1}}{4}$至少为 D 提供 5 个互异的奇素因子，故(12)式不成立，则方程(4)无整数解。

2) $m\neq0$ 为偶数，由(7)式，得 $gcd(x_m,y_{m+1})=gcd(x_m,4x_m+9y_m)=gcd(x_m,9y_m)=1$；由(8)式，得 $gcd(x_{m+1},y_m)=gcd(9x_m+20y_m,y_m)=gcd(9x_m,y_m)=9$，则 $gcd\left(\frac{x_{m+1}}{9},\frac{y_m}{9}\right)=1$；又由 1)可得 $gcd(x_{m+1},y_{m+1})=gcd(x_m,y_m)=1$，$gcd(x_m,x_{m+1})=1$；$gcd(y_m,y_{m+1})=4$，故 $gcd\left(\frac{y_m}{4},\frac{y_{m+1}}{4}\right)=1$。

所以有 x_m，$\frac{x_{m+1}}{9}$，$\frac{y_m}{36}$，$\frac{y_{m+1}}{4}$两两互素。

同情形 2 中 1)的证明可得方程(4)无整数解。

综上，定理成立。 证毕

参考文献：

[1] Ljunggren W. Littom simultane Pell skeligninger[J]. Norsk Mat Tidsskr，1941，23：132-138.

[2] Pan J Y，Zhang Y P，Zou R. The Pell equations $x^2-ay^2=1$ and $y^2-Dz^2=1$[J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics，1999，14(1)：73-77.

[3] 乐茂华. 关于联立 Pell 方程方程组 $x^2-4D_1y^2=1$ 和 $y^2-D_2z^2=1$[J]. 佛山科学技术学院学报：自然科学版，2004，22(2)：1-3+9.
Le M H. On the simultaneous Pell equations $x^2-4D_1y^2=1$ and $y^2-D_2z^2=1$[J]. Journal of Foshan University：Natural Science，2004，22(2)：1-3+9.

[4] 胡永忠，韩清. 也谈不定方程组 $x^2-2y^2=1$ 与 $y^2-Dz^2=4$[J]. 华中师范大学学报：自然科学版，2002，36(1)：17-19.
Hu Y Z，Han Q. On the integer solution of the simultaneous equations $x^2-2y^2=1$ and $y^2-Dz^2=4$[J]. Journal of Huazhong Normal University：Natural Science，2002，36(1)：17-19.

[5] 管训贵. 关于 Pell 方程 $x^2-2y^2=1$ 与 $y^2-Dz^2=4$ 的公解[J]. 华中师范大学学报：自然科学版，2012，46(3)：267-269+278.
Guan X G. On the integer solution of Pell's equation $x^2-2y^2=1$ and $y^2-Dz^2=4$[J]. Journal of Huazhong Normal University：Natural Science，2012，46(3)：267-269+278.

[6] 王冠闵，李炳荣. 关于 Pell 方程 $x^2-6y^2=1$ 与 $y^2-Dz^2=4$ 的公解[J]. 漳州师范学院学报：自然科学版，2002，15(4)：9-14.
Wang G M，Li B R. On the integer solution of Pell's equations $x^2-6y^2=1$ and $y^2-Dz^2=4$[J]. Journal of Zhangzhou Teathers College：Natural Science，2002，15(4)：9-14.

[7] 贺腊荣，张淑静，袁进. 关于不定方程组 $x^2-6y^2=1$，$y^2-Dz^2=4$[J]. 云南民族大学学报：自然科学版，2012，21(1)：57-58.
He L R，Zhang S J，Yuan J. Diopantine equation $x^2-6y^2=1$，$y^2-Dz^2=4$[J]. Journal of Yunnan Minzu University：Natural Science，2012，21(1)：57-58.

[8] 杜先存，管训贵，杨慧章. 关于不定方程组 $x^2-6y^2=1$ 与 $y^2-Dz^2=4$ 的公解[J]. 华中师范大学学报：自然科学版，2014，48(3)：5-8.

Du X C, Guan X G, Yang H Z. On the system of Diopantine equations $x^2-6y^2=1$ and $y^2-Dz^2=4$[J]. Journal of Huazhong Normal University: Natural Science, 2014, 48(3): 5-8.

[9] 杜先存,管训贵,万飞.关于丢番图方程组的整数解[J].重庆师范大学学报:自然科学版,2015,32(1):102-105.

Du X C, Guan X G, Wan F. On the system of Diophantine equations[J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science, 2015, 32(1): 102-105.

[10] 冉延平.不定方程组 $x^2-10y^2=1$, $y^2-Dz^2=4$[J].延安大学学报:自然科学版,2012,31(1):8-10.

Ran Y P. Integer solution of the simultaneous Diopantine equations $x^2-10y^2=1$ and $y^2-Dz^2=4$[J]. Journal of Yanan University: Natural Science, 2012, 31(1): 8-10.

[11] 贺腊荣.关于几类不定方程组的正整数解的研究[D].西安:西北大学,2012.

He L R. Positive integer solution of some families the simultaneous indeterminate equations[D]. Xi'an: Northwest University, 2012.

[12] 柯召,孙琦.谈谈不定方程[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2011.

Ke Z, Sun Q. On the Diopantine equation[M]. Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 2011.

[13] 孙琦,袁平之.关于不定方程 $x^4-Dy^2=1$ 的一个注记[J].四川大学学报:自然科学版,1997,34(3):265-267.

Sun Q, Yuan P Z. On the Diopantine equation $x^4-Dy^2=1$[J]. Journal of Sichuan University: Natural Science, 1997, 34(3): 265-267.

[14] 乐茂华.一类二元四次 Diophantine 方程[J].云南师范大学学报:自然科学版,2010,30(1):12-17.

Le M H. A family of binaryquartic Diophantine equations[J]. Journal of Yunnan Normal University: Natural Sciences, 2010, 30(1): 12-17.

[15] Walsh G. A note on a theorem of Ljunggren and the Diophantine equations $x^2-kxy^2+y^4=1$ or 4[J]. Arch Math, 1999, 73(2): 504-513.

On the Simultaneous Diophantine Equations $x^2-5y^2=1$ and $y^2-Dz^2=16$

WAN Fei, DU Xiancun

(College of Teachers Education, Honghe University, Mengzi Yunnan 661199, China)

Abstract: Let $D=2^t p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} p_4^{a_4}$ ($a_i=0$ or 1, $1\leqslant i\leqslant 4$, $t\in \mathbf{Z}^+$, and $t\neq 2,4$), where p_s ($1\leqslant s\leqslant 4$) are distinct odd primes, the simultaneous Diophantine equations in the title has a positive integer solution only when $D=2^t\times 7\times 23$ ($t=1,3,5,7$) are discussed with the help of some properties of the solutions to Pell equation, recursive sequence and congruence.

Key words: Diophantine equation; integer solution; odd prime; recursive sequence

(责任编辑 游中胜)