DOI:10.3969/J.ISSN.1672-6693.2010.02.013

凸体的 L_p-径向线性组合*

章 玉 琴

(重庆师范大学 数学学院，重庆 400047)

摘要：结合径向线性组合的定义给出了凸体的 L_p-径向线性组合的定义，并探讨出了该组合下凸体的对偶混合体积之间的大小关系，重点研究了凸体的 L_p-径向线性组合的平均宽度的相关性质，同时还给出了凸体的 L_p-径向线性组合和它的极体的平均宽度的下界。在充分研究凸体的 L_p-径向线性组合性质的基础上，得到凸体的 L_p-径向线性组合和它的 Firey 线性组合之间的一些关系式。最后，在这些定理的支撑下，得到了关于凸体的 Firey 线性组合的平均宽度的下界的一般性结论，若 $K,L\in K_0^n$ 实数 $p\geqslant 1,\lambda,\mu\geqslant 0,\lambda+\mu=1$，则 $M((\lambda K^*+_p\mu L^*)+(\lambda K+_p\mu L))\geqslant 4$，等号成立当且仅当 K 与 L 都为单位球时。

关键词：凸体；L_p-径向线性组合；平均宽度

中图分类号：O184 **文献标识码**：A **文章编号**：1672-6693(2010)02-0049-03

凸体几何是以凸体或星体为主要研究对象的现代几何学的一个重要分支，它是以微分几何、泛函分析、偏微分方程、点集拓扑为基础的现代几何学。关于几何体的构形、体积、表面积、宽度、角度、投影等都已有了较为完善的研究，而关于几何体的线性组合便成了进一步研究凸体的热点。已有文献定义了凸体的 Minkowski 线性组合，Firey 线性组合，Blaschke 加法，调和线性组合等，并有了重大突破[1-4]。

早期，Lutwak 在文献[5]中定义了径向的 Minkowski 线性组合，此后，研究者们做了大量的关于该组合的文章[6-8]。后来随着诸多概念向 L_p 空间的推广，径向的 Minkowski 线性组合也被推广成了 L_p-径向线性组合，研究者们也做了相关的研究[9]。本文的主要目的就是进一步研究 L_p-径向线性组合，特别是关于凸体的 L_p-径向线性组合的平均宽度和它们的混合体积。

1 预备知识

设 K^n 表示 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中所有凸体(有非空内点的紧凸集)的集合，K_0^n 表示 K^n 中包含原点的子集。设 φ^n 表示 $\mathbf{R}^n$ 中所有星体的集合，用 φ_0^n 表示 φ^n 中所有包含原点的子集。用 u 和 S^{n-1} 分别表示 $\mathbf{R}^n$ 中的单位向量和单位球面，$V(K)$ 表示凸体 K 的体积。

定义 1[9] 令 $u\in S^{n-1}$，如果 $K\in K^n$，则 K 的支撑函数 $h(K,u)$：$S^{n-1}\to\mathbf{R}$ 被定义 $h(K,u)=\max\{u\cdot x:x\in K\}$。

定义 2[9] 如果 $L\in\varphi_0^n$，星体 L 关于原点的径向函数 $\rho(L,u)$：$S^{n-1}\to\mathbf{R}$ 被定义为

$$\rho(L,u)=\max\{c\geqslant 0:cu\in L\}。$$

定义 3[10] 如果 $K,L\in\varphi_0^n$ 和 $\lambda,\mu\geqslant 0,\lambda+\mu=1$，则 K 和 L 的 L_p-径向线性组合 $\lambda K\tilde{+}_p\mu L$ 被定义为

$$\rho(\lambda K\tilde{+}_p\mu L,u)^p=\lambda\rho(K,u)^p+\mu\rho(L,u)^p$$

定义 4[5] 如果 $K_i\in\varphi_0^n,1\leqslant i\leqslant n$，则凸体 $K_1,\cdots,K_n$ 的对偶混合体积 $\tilde{V}(K_1,\cdots,K_n)$ 被定义为

$$\tilde{V}(K_1,\cdots,K_n)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\rho(K_1,u)\cdots\rho(K_n,u)\,\mathrm{d}S(u)$$

定义 5[11] 对于 $\mathbf{R}^n$ 中的任意一个凸体 K，其平均宽度 $M(K)=\dfrac{2}{n\omega_n}\displaystyle\int_{S^{n-1}}h(K,u)\,\mathrm{d}S(u)$。

定义 6[12] 如果 $K,L\in K_0^n,\lambda,\mu\geqslant 0,\lambda+\mu=1$，则 K 和 L 的 Firey 线性组合 $\lambda K+_p\mu L\in K_0^n$ 被定义为 $h(\lambda K+_p\mu L,u)^p=\lambda h(K,u)^p+\mu h(L,u)^p$。

定义 7[12] 如果 $K,L\in\varphi_0^n,\lambda,\mu\geqslant 0,\lambda+\mu=1$，则 K 和 L 的调和 p-组合 $\lambda K\hat{+}_p\mu L\in K_0^n$ 被定义为

$$\rho(\lambda K\hat{+}_p\mu L,u)^{-p}=\lambda\rho(K,u)^{-p}+\mu\rho(L,u)^{-p}$$

2 主要结论及证明

由定义 3 和定义 4 以及函数 $x^{\frac{1}{p}}$ 的凹性可以得到下面的不等式。

* 收稿日期：2009-05-10
资助项目：国家自然科学基金(No. 10801140)
作者简介：章玉琴，女，硕士研究生，研究方向为凸体几何分析。

定理1 若 $K,L\in\varphi_0^n$,实数 $p\geqslant 1,\lambda,\mu\geqslant 0$,$\lambda+\mu=1$,则对于任意凸体 $K_2,\cdots,K_n$ 有

$$\tilde{V}(\lambda K\tilde{+}_p\mu L,K_2,\cdots,K_n)\geqslant \lambda\tilde{V}(K,K_2,\cdots,K_n)+\mu\tilde{V}(L,K_2,\cdots,K_n)$$

证明 由函数 $x^{\frac{1}{p}}$ 的凹性及定义3,有

$$\rho(\lambda K\tilde{+}_p\mu L,u)\geqslant\lambda\rho(K,u)+\mu\rho(L,u)$$

则

$$\tilde{V}(\lambda K\tilde{+}_p\mu L,K_2,\cdots,K_n)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\rho(\lambda K\tilde{+}_p\mu L,u)\rho(K_2,u)\cdots\rho(K_n,u)\,\mathrm{d}S(u)\geqslant$$
$$\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}(\lambda\rho(K,u)+\mu\rho(L,u))\rho(K_2,u)\cdots\rho(K_n,u)\,\mathrm{d}S(u)=$$
$$\frac{\lambda}{n}\int_{S^{n-1}}\rho(K,u)\rho(K_2,u)\cdots\rho(K_n,u)\,\mathrm{d}S(u)+\frac{\mu}{n}\int_{S^{n-1}}\rho(L,u)\rho(K_2,u)\cdots\rho(K_n,u)\,\mathrm{d}S(u)=$$
$$\lambda\tilde{V}(K,K_2,\cdots,K_n)+\mu\tilde{V}(L,K_2,\cdots,K_n)$$

证毕

根据平均宽度的积分式和支撑函数与径向函数的关系式,可以得出下列不等式。

定理2 若 $K\in K_0^n$,实数 $p\geqslant 1,\lambda,\mu\geqslant 0,\lambda+\mu=1$,则 $M((\lambda K\tilde{+}_p\mu L)^*)\leqslant\lambda M(K^*)+\mu M(L^*)$。

证明 由函数 $x^{-\frac{1}{p}}$ 的凸性及定义3,有

$$\rho(\lambda K\tilde{+}_p\mu L,u)^{-1}\leqslant\lambda\rho(K,u)^{-1}+\mu\rho(L,u)^{-1}$$

即 $h((\lambda K\tilde{+}_p\mu L)^*,u)\leqslant\lambda h(K^*,u)+\mu h(L^*,u)$

故根据定义5可得

$$M((\lambda K\tilde{+}_p\mu L)^*,u)=\frac{2}{n\omega_n}\int_{S^{n-1}}h((\lambda K\tilde{+}_p\mu L)^*,u)\,\mathrm{d}S(u)\leqslant$$
$$\frac{2\lambda}{n\omega_n}\int_{S^{n-1}}h(K^*,u)\,\mathrm{d}S(u)+\frac{2\mu}{n\omega_n}\int_{S^{n-1}}h(L^*,u)\,\mathrm{d}S(u)\leqslant\lambda M(K^*)+\mu M(L^*)$$

证毕

进一步,可由 $h(K^*,u)=\dfrac{1}{\rho(K,u)}$ 和 Hölder 不等式可以得到比定理2更强的不等式。

定理3 若 $K,L\in K_0^n$,实数 $p\geqslant 1,\lambda,\mu\geqslant 0$,$\lambda+\mu=1$,则 $M((\lambda K\tilde{+}_p\mu L)^*)\leqslant M(K^*)^\lambda M(L^*)^\mu$,当且仅当 $K=L$ 时等号成立。

证明 根据定义3以及关系式 $h(K^*,u)=\dfrac{1}{\rho(K,u)}$,有

$$h((\lambda K\tilde{+}_p\mu L)^*,u)^{-p}=\lambda h(K^*,u)^{-p}+\mu h(L^*,u)^{-p}$$

再根据函数 $x^{\frac{1}{p}}$ 的凹性和代数-几何均值不等式可得

$$h((\lambda K\tilde{+}_p\mu L)^*,u)^{-1}\geqslant\lambda h(K^*,u)^{-1}+\mu h(L^*,u)^{-1}\geqslant h(K^*,u)^{-\lambda}h(L^*,u)^{-\mu}$$

即

$$h((\lambda K\tilde{+}_p\mu L)^*,u)\leqslant h(K^*,u)^\lambda h(L^*,u)^\mu$$

等号成立当且仅当 $h(K^*,u)=h(L^*,u)$。

再由平均宽度的定义和 Hölder 不等式有

$$M((\lambda K\tilde{+}_p\mu L)^*,u)=\frac{2}{n\omega_n}\int_{S^{n-1}}h((\lambda K\tilde{+}_p\mu L)^*,u)\,\mathrm{d}S(u)\leqslant$$
$$\frac{2}{n\omega_n}\int_{S^{n-1}}\leqslant h(K^*,u)^\lambda h(L^*,u)^\mu\mathrm{d}S(u)\leqslant$$
$$\left(\frac{2}{n\omega_n}\int_{S^{n-1}}h(K^*,u)\mathrm{d}S(u)\right)^\lambda\left(\frac{2}{n\omega_n}\int_{S^{n-1}}h(L^*,u)\mathrm{d}S(u)\right)^\mu=M(K^*)^\lambda M(L^*)^\mu$$

从代数-几何均值不等式成立的条件可以得到当且仅当 K=L 时定理中的等号成立。 证毕

根据代数-几何均值不等式知道

$$\lambda M(K^*)+\mu M(L^*)\geqslant M(K^*)^\lambda M(L^*)^\mu$$

所以定理3比定理2更强。

作为定理2的应用,可将其与 Firey 线性组合和 L_p-径向线性组合的定义结合起来得到两种线性组合的关系。

推论1 若 $K,L\in K_0^n$,实数 $p\geqslant 1,\lambda,\mu\geqslant 0$,$\lambda+\mu=1$,则 $M((\lambda K\tilde{+}_p\mu L)^*)\leqslant M(\lambda K^*+_p\mu L^*)$,

证明 由 $x^{\frac{1}{p}}$ 的凹性和定义7有

$$\rho(\lambda K\hat{+}_p\mu L,u)^{-1}\geqslant\lambda\rho(K,u)^{-1}+\mu\rho(L,u)^{-1}$$

即 $h((\lambda K\hat{+}_p\mu L)^*,u)\geqslant\lambda h(K^*,u)+\mu h(L^*,u)$

则由平均宽度的积分式和关系式

$$(\lambda K\hat{+}_p\mu L)^*=\lambda K^*+_p\mu L^*$$

有

$$M((\lambda K\hat{+}_p\mu L)^*)=M(\lambda K^*+_p\mu L^*)\geqslant\lambda M(k^*)+\mu M(L^*)$$

再利用定理2的结论有

$$M((\lambda K\tilde{+}_p\mu L)^*)\leqslant M(\lambda K^*+_p\mu L^*)$$

证毕

定理4 若 $K,L\in K_0^n$,实数 $p\geqslant 1,\lambda,\mu\geqslant 0$,$\lambda+\mu=1$,则 $M((\lambda K\tilde{+}_p\mu L)^*+(\lambda K+_p\mu L))\geqslant 4$。当且仅当 K 与 L 都为单位球时等号成立。

证明 由 $h(K,u)\geqslant\rho(K,u)$ 和定义6得

$$\rho(\lambda K\tilde{+}_p\mu L,u)^p=\lambda\rho(K,u)^p+\mu\rho(L,u)^p\leqslant\lambda h(K,u)^p+\mu h(L,u)^p=h(\lambda K+_p\mu L,u)^p$$

又因为 $h(K^*,u)=\dfrac{1}{\rho(K,u)}$,故

$$h((\lambda K\tilde{+}_p\mu L)^*,u)h(\lambda K+_p\mu L,u)\geqslant 1$$

根据均值不等式有

$$h((\lambda K\tilde{+}_p\mu L)^*,u)+h(\lambda K+_p\mu L,u)\geqslant 2\sqrt{h((\lambda K\tilde{+}_p\mu L)^*,u)h(\lambda K+_p\mu L,u)}\geqslant 2$$

则由平均宽度的积分式有

$$M((\lambda K \,\tilde{+}_p\, \mu L)^* + (\lambda K +_p \mu L)) = \frac{2}{n\omega_n}\int_{S^{n-1}} h((\lambda K \,\tilde{+}_p\, \mu L)^* + (\lambda K +_p \mu L))\, \mathrm{d}S(u) = \frac{2}{n\omega_n}\int_{S^{n-1}} (h((\lambda K \,\tilde{+}_p\, \mu L)^*, u) + h(\lambda K +_p \mu L, u))\mathrm{d}S(u) \geqslant 4$$

由 $h(K,u) \geqslant \rho(K,u)$ 可知当且仅当 $h(K,u) = \rho(K,u)$，$h(L,u) = \rho(L,u)$ 即 K 与 L 都为单位球时等号成立。 证毕

作为定理4的应用，将其与推论1结合起来便可得到推论2。

推论2 若 $K,L \in K_0^n$，实数 $p \geqslant 1$，$\lambda,\mu \geqslant 0$，$\lambda + \mu = 1$，则 $M((\lambda K^* +_p \mu L^*) + (\lambda K +_p \mu L)) \geqslant 4$。当且仅当 K 与 L 都为单位球时等号成立。

这个结论比文献[13]中的定理2.3更具有一般性。

参考文献：

[1] Firey W J. p-means of convex bodies[J]. Math Scand, 1962, 10: 17-24.

[2] Firey W J. Some applications of means of convex bodies [J]. Pacific J Math, 1964, 14: 53-60.

[3] Lutwak E. The Brunn-Minkowski-Firey theory Ⅰ: mixed volumes and the Minkowski problem [J]. J Differential Geom, 1993, 38: 131-150.

[4] Lutwak E. The Brunn-Minkowski-Firey theory Ⅱ: affine and geominimal surface areas[J]. Advances in Mathematics, 1996, 118: 244-294.

[5] Lutwak E. Dual Mixed Volumes[J]. Pacific J Math, 1975, 58: 131-150.

[6] Grinberg E, Zhang G Y. Convolutions, transforms, and convex bodies [J]. Proceedings of the London Mathematical Society, 1999, 78: 77-115.

[7] 赵长健. 质心体与射影体的极[J]. 数学学报(中文版), 2006, 49(3): 679-686.

[8] Cheung W S, Zhao C J. Width-integrals and affine surface area of convex bodies[J]. Banach J Math Anal, 2008(1): 70-77.

[9] Wang W, He B W. L_p-dual affine surface area[J]. JMAA, 2008(8): 1-6.

[10] 李小燕, 何斌吾. 对偶 Brunn-Minkowski-Firey 定理[J]. 数学杂志, 2005, 25(5): 545-548.

[11] Schneider R. Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory [M]. Cambridge: Encyclopedia of Mathematics, Cambridge Univ Press, 1993.

[12] Firey W J. p-means of convex bodies[J]. Math Scand, 1962, 10: 17-24.

[13] Xiong G, Xiao Q M, Cheung W S. Firey linear combinatons of convex bodies[J]. J Shanghai Univ(Engl Ed), 2009, 13(2): 102-104.

L_p-radial Linear Combinations of Convex Bodies

ZHANG Yu-qin

(College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: There are so many researches and papers for radial linear combinations of convex bodies, and many beautiful results of its properties are gotten. Based on these theories, the L_p-radial linear combinations of convex bodies are introduced. In this paper we deduce the size of these dual mixed volumes, and some properties for their mean width are studied. Meanwhile, the lower bound of the mean width of L_p-radial linear combinations of convex bodies and their polar bodies are found. After many properties for L_p-radial linear combinations of convex bodies are studied enough, we have found the connection between the L_p-radial linear combinations and Firey linear combinations of convex bodies. Finally, supported by these theories, we got the lower bound of the mean width of Firey linear combinations of convex bodies which are a more general form: For $K,L \in K_0^n$, real number $p \geqslant 1$, $\lambda,\mu \geqslant 0$, $\lambda + \mu = 1$, then $M((\lambda K^* +_p \mu L^*) + (\lambda K +_p \mu L)) \geqslant 4$, with equality if and only if both K and L are unit balls.

Key words: convex body; L_p- radial linear combination; mean width

(责任编辑 黄 颖)