

横截面为凸透镜形的柱状分布电荷的电场分析*

潘运霞,胡先权

(重庆师范大学 物理学院,重庆 400047)

摘要:对于凸透镜形横截面带电柱体产生的电磁场,由于横截面的几何图形为非完整的球面或者圆柱面,用泊松方程或拉普拉斯方程求解很困难。本文采用复变函数理论中分式线性变换的重要特性—两条相交曲线的保角性与空间电势差的不变性,根据柱体横截面为凸透镜形的情况,选取适当的变换函数,非常简便地求得了横截面为凸透镜形柱状分布电荷的场强和电势,其大小分布关于凸透镜中心对称,并描绘出带电柱体内外等势线分布,其分布也关于凸透镜中心对称,为探讨电磁场是否对凸透镜的光学性质有影响进行尝试。

关键词:保角变换;凸透镜形横截面带电柱体;场强分布;电势分布

中图分类号:O441.1

文献标识码:A

文章编号:1672-6693(2010)02-0061-04

凸透镜形横截面带电柱体会产生电磁场,这种电磁场是否对凸透镜的光学性质有影响,尚未有文献报导,本文将通过求解横截面为凸透镜形带电柱体的电场和电势分布为解决这类问题进行尝试,同时,对于研究电磁波在经过凸透镜时的电磁场分布也有一定的意义。目前,对于横截面规则的柱形分布电荷,其势场和电场分布的函数解析式,可利用直线电荷的电势叠加原理导出,也可用泊松方程或拉普拉斯方程求解^[1-3]。利用直线电荷的电势叠加原理导出,对带电柱体横截面为凸透镜形的情形,积分过程复杂,且场强的分布不易求得;由于凸透镜形并非完整的球面或圆柱面,用泊松方程或拉普拉斯方程求解也很困难。本文利用保角变换简便求出横截面为凸透镜形柱状分布电荷的场强和电势,并描绘出等势线分布。

1 凸透镜形横截面变换为单位圆面

在真空中有电荷均匀分布,电荷线密度为 λ ,横截面为凸透镜形的带电柱体,柱体中电介质为非均匀或有杂质。设带电柱体的横截面为圆 $|z-1| = \sqrt{2}$ 和圆 $|z+1| = \sqrt{2}$ 的公共部分 D ,并且为无限长,因此垂直于柱体轴线的横截面上的电场分布均

相同,为平行平面场。取其中一个横截面(图1),并以凸透镜中心为

坐标原点建立直角坐标系。为了使用高斯定理计算该带电柱体内外的电场,需要通过保角变换将带电柱体的凸透镜形横截面变换为单位圆。

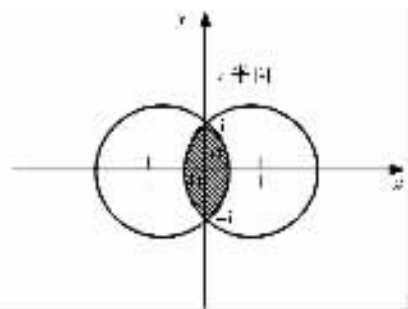


图1 柱形带电柱体的凸透镜形横截面

1.1 分式线性变换

因为圆 $|z-1| = \sqrt{2}$ 和圆 $|z+1| = \sqrt{2}$ 的交点为 $z = \pm 1$,故可先通过分式线性变换

$$W_1 = \frac{z-i}{z+i} \quad (1)$$

可将圆 $|z-1| = \sqrt{2}$ 变换为直线 Γ_1 ,圆 $|z+1| = \sqrt{2}$ 变换为直线 Γ_2 ,即将闭区域 D 保角地变换为直角闭区域 D_1 ,如图2。

1.2 旋转变换

$$W_2 = e^{\frac{5\pi}{4}} W_1 \quad (2)$$

可将闭区域变换 D_1 为闭区域 $D_2 = \{W_2 \mid 0 \leq$

* 收稿日期 2009-09-10 修回日期 2009-10-20

资助项目:重庆市教委基础理论研究基金(No. KJ080825)

作者简介:潘运霞,女,硕士研究生,研究方向为电磁场理论;通讯作者:胡先权, E-mail: huxuan2003@yahoo.com.cn

$\arg W_2 \leq \frac{\pi}{2}$ 见图3。

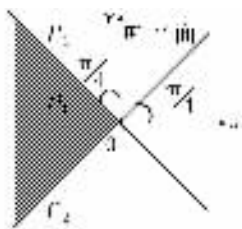


图2 分式线性变换后截面

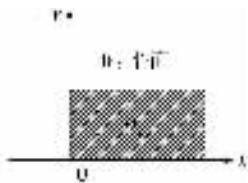


图3 幂函数变换后截面

1.3 幂函数变换

$$W_3 = W_2^2 \quad (3)$$

可将闭区域 D_2 变换为上半闭平面 D_3 , 见图4。

1.4 分式线性变换

$$W_4 = \frac{W_3 - i}{W_3 + i} \quad (4)$$

可将上半闭平面 D_3 变换为单位闭圆 $D_4 = \{W : |W| \leq 1\}$, 见图5。

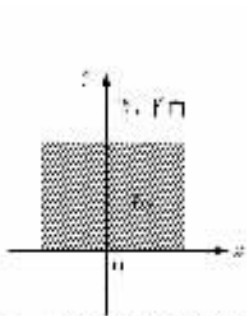


图4 幂函数变换后截面

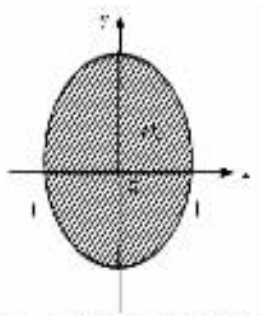


图5 分式线性变换后截面

1.5 复合变换

综合(1)~(4)式进行复合变换

$$W = \frac{-2iz}{z^2 - 1} \quad (5)$$

可将 Z 平面区域 D 保角变换为 W 平面单位闭圆域(如图5阴影所示)。单位闭圆域对应凸透镜截面的映射, 而单位圆外部则与带电柱体外无限大区域的截面相对应^[4]。因此, 横截面为凸透镜形的柱状分布电荷, 映射为圆柱状分布电荷。

2 带电柱体内部的电势和场强

由高斯定理^[5]求得电场强度在 $|W| < 1$ 单位圆内的分布为

$$E_1 = \frac{\lambda r}{2\pi\epsilon} \quad (r < 1) \quad (6)$$

其中 r 为 W 平面上单位圆内场点到圆心的距离, 即 $r = |W|$ 。

由(5)式得

$$r = \left| \frac{-2iz}{z^2 - 1} \right| = 2 \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2 - 1)^2 + 4x^2y^2}} \quad (7)$$

将(7)式代入(6)式, 即得凸透镜形内部电场强度数值上大小的分布

$$E = \frac{\lambda}{\pi\epsilon} \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2 - 1)^2 + 4x^2y^2}}$$

由于(6)式的电场具有球对称性, 选择圆心为电势参考点, 单位圆内任意点 P 的电势为

$$U_1 = \int_P^0 E_1 dr = \int_r^0 \frac{\lambda r}{2\pi\epsilon} dr = -\frac{\lambda r^2}{\pi\epsilon} \quad (8)$$

将(7)式代入(8)式, 即得凸透镜形内部电势的分布

$$U = -\frac{\lambda}{\pi\epsilon} \frac{4(x^2 + y^2)}{(x^2 - y^2 - 1)^2 + 4x^2y^2} \quad (9)$$

由(5)式可知, W 平面圆域的圆心对应 Z 平面的坐标原点, 即凸透镜截面中心, 而且两者是等电势映射。经过下面的分析可知, 与 W 平面上的圆域边界线(等势线) $|W| = 1$ 对应的凸透镜的边界线也是等势线, 也可以将凸透镜边界的坐标值代入(9)式进行验证。

由电势与场强的微分关系 $E = -\nabla U$ 得

$$E = E_x e_x + E_y e_y = -\nabla U = -\frac{\partial U}{\partial x} e_x - \frac{\partial U}{\partial y} e_y$$

$$\text{即 } E = -\frac{\lambda}{\pi\epsilon} \frac{(x^2 + y^2)(8xy^2 + 4x(-1 + x^2 - y^2))}{(4x^2y^2 + (-1 + x^2 - y^2)^2)^2} e_x -$$

$$\frac{\lambda}{\pi\epsilon} \frac{2x}{4x^2y^2 + (-1 + x^2 - y^2)^2} e_x -$$

$$\frac{\lambda}{\pi\epsilon} \frac{(x^2 + y^2)(8x^2y - 4y(-1 + x^2 - y^2))}{(4x^2y^2 + (-1 + x^2 - y^2)^2)^2} e_y -$$

$$\frac{\lambda}{\pi\epsilon} \frac{2y}{4x^2y^2 + (-1 + x^2 - y^2)^2} e_y$$

上式即为无限长的凸透镜形横截面带电柱体内部场强的矢量表达式。根据带电柱体内部的电势分布和场强分布表达式, 可知带电柱体内部的电势分布和场强大小分布关于凸透镜中心对称。

3 带电柱体外部的电势和场强

由高斯定理可知电场强度在 $|W| > 1$ 的单位圆外的分布为

$$E_2 = \frac{1}{2\pi\epsilon} \frac{\lambda}{r} \quad (r > 1) \quad (10)$$

将(7)式代入(10)式, 即得凸透镜形外部电

场强度数值上大小的分布。通过对场强线积分^[6], 可求得 W 平面单位圆外任意点 P 的电势

$$U_2 = \int_p^0 E \cdot dl = \int_1^0 E_1 dr + \int_r^1 E_2 dr = -\frac{\lambda}{\pi\epsilon} \left(1 + \frac{1}{2} \ln r \right) \quad (11)$$

将(7)式代入(11)式,即得凸透镜形外部的电势分布

$$U = -\frac{\lambda}{\pi\epsilon} - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln 2 \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2 - 1)^2 + 4x^2y^2}}$$

通过对 U 进行负梯度运算可得凸透镜形外部电场强度即矢量函数

$$\mathbf{E} = \frac{4x^2y^2 + (-1 + x^2 - y^2)^2}{4\pi\epsilon(x^2 + y^2)\lambda} \cdot \left[\frac{(x^2 + y^2)(8xy^2 + 4x(-1 + x^2 - y^2))}{(4x^2y^2 + (-1 + x^2 - y^2)^2)^2} - \frac{2x}{4x^2y^2 + (-1 + x^2 - y^2)^2} \right] \mathbf{e}_x + \frac{4x^2y^2 + (-1 + x^2 - y^2)^2}{4\pi\epsilon(x^2 + y^2)\lambda} \cdot \left[\frac{(x^2 + y^2)(8yx^2 - 4y(-1 + x^2 - y^2))}{(4x^2y^2 + (-1 + x^2 - y^2)^2)^2} - \frac{2y}{4x^2y^2 + (-1 + x^2 - y^2)^2} \right] \mathbf{e}_y$$

上式即为无限长的凸透镜形截面带电体柱外部场强的矢量表达式。根据带电柱体外部的电势分布和场强分布表达式,可知带电柱体外部的电势分布和场强大小分布关于凸透镜中心对称。

4 带电柱体内外的等势分布

本文中柱体里电介质为非均匀或含有杂质,将有极化体电荷密度 ρ 出现,但对于制作工艺稳定的凸透镜介质而言,可视为在宏观小微观大的区域内的电荷均匀分布,用本文提供的上述方法来求解这样的电磁场,极为方便。利用 Mathematic 绘图软件与引函数作图法^[7-12]绘图,柱体内外等势线分布如图 6 所示。从图中也能看出,带电柱体横截面内外电势线分布关于凸透镜中心对称。整个带电柱体内外等势线分布关于柱体轴线对称。

对于不含杂质的均匀电介质,电荷只分布于带电体表面,带电体内没有电荷,等势线分布,是一个等势体,带电体外等势线分布与图 6 中带电柱体外部等势线分布相同,且在表面连续。

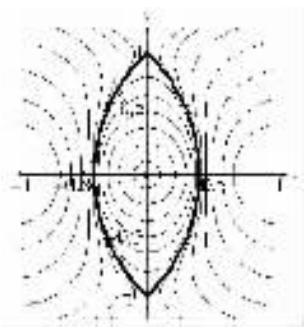


图 6 均匀带电柱体内外等势线

5 结语

本文利用保角变换简便求出了横截面为凸透镜形柱状分布电荷的场强和电势,为计算较为复杂的横截面柱状分布电荷的电场和电势提供了一种较为简便的方法,利用 Mathematic 描绘出等势线分布,带电柱体横截面内外电势线分布关于凸透镜中心对称,同时也为解决电磁场是否对凸透镜的光学性质有影响这类问题进行了尝试。

参考文献:

- [1] 郭硕鸿. 电动力学[M]. 第2版. 北京: 高等教育出版社, 1997: 57-65.
- [2] Bleaney B I, Bleaney B. Electricity and magnetism[M]. 3rd ed. Great Britain: Oxford University Press, 1975: 49-55.
- [3] 杰克逊 J D. 经典电动力学[M]. 朱培豫译. 北京: 人民教育出版社, 1984: 42-43.
- [4] 梁昆森. 数学物理方法[M]. 第3版. 北京: 高等教育出版社, 1998: 428-433.
- [5] 赵凯华, 陈熙谋. 电磁学(上册)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003: 45-61.
- [6] 盖云英. 复变函数与积分变换[M]. 北京: 科学出版社, 2001: 164-165.
- [7] 胡先权, 胡文江, 马勇. 偏心圆柱面与分离圆柱面带电导体等势面的统一描述[J]. 大学物理, 2004, 23(8): 20-23.
- [8] 蒋明宇, 胡先权. 直线电荷与带电导体圆柱电场和电力线簇研究[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2005, 22(2): 44-46.
- [9] 李旭, 胡先权, 胡文江. 电介质椭球内极化场强方向的研究[J]. 大学物理, 2004, 23(10): 28-31.
- [10] 卢林芳, 胡先权, 周林, 等. 有限长直线电荷的等势线和电力线的求解与描绘[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2008, 25(3): 38-41.
- [11] 洪维恩. 数学. 运算大师-Mathematica 5[M]. 魏宝琛改编. 北京: 人民邮电出版社, 2002: 229-249.

- [12] 胡先权, 欧红叶, 田立新, 等. 量子散射中格林函数多种围道积分的等价性 [J]. 重庆师范大学学报(自然科学版) 2007, 24(2) : 1-5.

The Electric Field of a Column Charged of the Cross Section of the Convex Lens Shape

PAN Yun-xia , HU Xian-quan

(College of Physics , Chongqing Normal University , Chongqing 400047 , China)

Abstract : It is very difficult to use Poisson's equation or Laplace's equation to calculate the electric field of an infinitely long column charged of the cross section of the convex lens shape because the lens-shaped cross-section is the more complex geometry , not a complete spherical or cylindrical surface. The important features of fractional linear transformation of the theory of complex variable function—two intersecting curves conformal nature and spatial invariance of electric potential difference are adopted in this paper. The electric field intensity distribution and the electric potential distribution are very easily obtained by selecting the appropriate transfer function on the coordinate system of the complex number according to cylinder-shaped cross-section of the lens. And the distribution of equipotential line inside and outside the column is described. What is more , convex lens-shaped cross-section of charged columns can generate electromagnetic field , It is a problem whether or not electromagnetic fields can affect the optical properties of lens. The report about this is not yet a available literature. This paper tries to investigate this problem by solving the electric field intensity distribution and the electric potential distribution of an infinitely long column charged of the cross section of the convex lens shape.

Key words : conformal mapping ; a column charged of the cross section of the convex lens shape ; electric potential distribution ; electric intensity distribution

(责任编辑 欧红叶)