

单位区间图的配对 k -DPC 容错性问题^{*}

李 鹏¹, 朱 莉¹, 王爱法¹, 尚建辉²

(1. 重庆理工大学 理学院, 重庆 400054; 2. 上海交通大学 数学科学学院, 上海 200240)

摘要:【目的】为研究不相交路径覆盖问题,在单位区间图上探讨1-不相交路径可覆盖、2-不相交路径可覆盖、 k -不相交路径可覆盖在删除顶点和经过指定边后仍保持DPC性质的结构。【方法】利用单位区间图的结构特点以及路覆盖的结构性质,结合数学归纳法和反证法来研究单位区间图的配对多对多 k -DPC 容错性问题。【结果】单位区间图 G 任意删去 p 个点且经过 q 条边,仍是配对 k -DPC,当且仅当 G 是 $(2k+r-1)$ -连通,其中 $(p+q) \leqslant r$ 。【结论】单位区间图的容错性路覆盖问题与哈密顿性质以及连通度有紧密联系。研究方法和研究结果为区间图配对 k -DPC 容错性问题的研究提供了理论依据,同时有助于设计在单位区间图上寻找配对 k -DPC 容错性的有效算法。

关键词:路覆盖;配对 k -不相交路径可覆盖;单位区间图;容错性

中图分类号:O157.5

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2023)02-0008-10

1 研究背景

设 G 是有限简单无向图,顶点集和边集分别用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 表示。对任意图 G ,若存在映射 I ,把每个 $v \in V(G)$ 对应到实数轴的闭区间 $[l_I(v), r_I(v)]$ 上,使 $vu \in E(G)$ 当且仅当 $I(v) \cap I(u) \neq \emptyset$,则称 G 是区间图, I 是 G 的区间表示。若对任意 $v \in V(G)$,有 $r_I(v) - l_I(v) = 1$,则称 G 为单位区间图,称 I 为 G 的单位区间表示,如图 1^[1]。

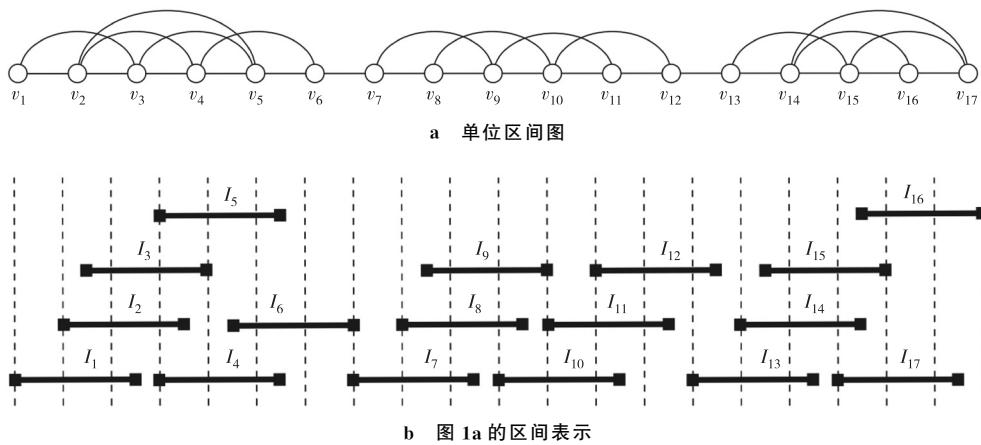


图 1 单位区间图及区间表示

Fig. 1 A unit interval graph and its interval representation

由于区间图简单的几何表示以及优美的性质,许多经典的图问题在区间图中更容易得到解决。文献[2-4]针对区间图和单位区间图提出了几种线性时间识别算法。除了具有丰富的数学理论,这两类图在遗传学、生物学、

* 收稿日期:2021-12-14 修回日期:2023-03-08 网络出版时间:2023-04-23T17:30

资助项目:国家自然科学基金项目(No. 11701059);重庆市自然科学基金项目(No. cstc2020jcyj-msxmX0272);重庆市教育委员会科学技术研究计划项目(No. KJQN202001130; No. KJQN202101130; No. KJQN202001107);上海自然科学基金项目(No. 20ZR1427200);重庆理工大学研究生教育高质量发展行动计划(No. gzlcx20222080)

第一作者简介:李鹏,男,副教授,博士,研究方向为图与图算法,E-mail:lipengcqut@cqu.edu.cn;通信作者:朱莉,女,E-mail:zl128math@163.com

网络出版地址:<https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20230423.1403.002.html>

心理学、社会学、调度、VLSI电路设计等领域有着广泛的应用。同时,区间图和单位区间图为一般图的许多非确定性多项式-完全(non-deterministic polynomial-complete,NPC)问题提供多项式解,如独立集、团、顶点着色、哈密顿圈(Hamiltonian cycle,HC)和哈密顿路径(Hamiltonian path,HP)等^[5-6]。

HP的推广问题是路径覆盖(path cover,PC)问题,即找到覆盖图G所有顶点的不相交路径的最小数目。除了图论外,PC问题还有许多重要的实际应用,如代码优化、软件测试、数据库设计、网络以及将并行程序映射到并行结构等。PC问题在一般图中是NPC,但对余图、距离遗传图、块图以及区间图等特殊图类是多项式时间可解^[7]。

2017年,笔者研究了区间图上1-不动点PC问题,提出一种线性时间算法解决区间图上的1-HP问题,同时指出区间图的1-HP问题能简化为特殊2-HP问题^[4]。本文工作是基于该研究的进一步延伸。

图G的配对多对多k-DPC是连接k个不同源集和汇集的k条不相交路径的集合,其中G的每个顶点都只被一条路径覆盖。本文讨论具有指定源集和汇集的k-DPC,设 $S=\{s_1, \dots, s_k\}$ 和 $T=\{t_1, \dots, t_k\}$ 是 $V(G)$ 的两个不相交子集, $P=\{P^1, \dots, P^k\}$ 是G的一组DPC。若每条路径 P^i 从 s_i 开始,到 t_i 结束,则称P是配对多对多k-DPC,称G为配对多对多k-不相交路径可覆盖。否则,称G为未配对多对多k-不相交路径可覆盖。若 $S=\{s\}$, P^i 从s开始,到 t_i 结束,则称P是1对多k-DPC。若 $T=\{t\}$,则称P是1对1k-DPC。DPC的示例如图2^[8]。

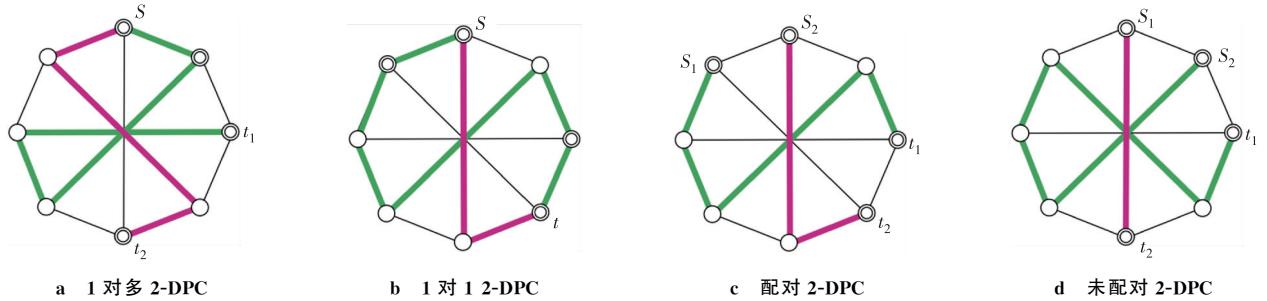


图2 DPC示例

Fig. 2 DPC example

k -DPC问题源于互连网络社区,可比图和弦图的某些图子类在当前 k -DPC问题上的复杂性状态(NPC、未知、多项式)如图3^[9], $A \rightarrow B$ 表示A包含B。

虽然DPC问题已经针对许多图类展开探讨,如超立方体^[10-11]、递归循环^[12]、 n 维环面^[13]、 k -元 n -立方体^[14]、连通图立方体^[15]、网格图^[16]、区间图^[8,17-18]和单位区间图^[1]等。但是关于容错性问题的研究相对较少,因此本文基于单位区间图研究路覆盖的容错性,探讨删点以及过指定边的配对 k -DPC问题。

2 预备知识

本文涉及的符号及说明见表1。

定义1 设 G 是任意 n -顶点图, π 是 $V(G)$ 的任意序列,其中 $k \in [n-1]$ 。若 π 是 G 的HP,对任意 $i \in [n-1]$ 有 $d_{G,\pi}(\pi_i) \geq k$,则称 π 是 k -厚的。

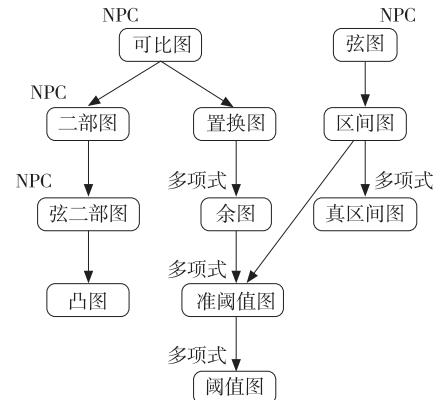
定义2 设 G 是任意 n -顶点图, π 是 G 的任意 k -厚的序列,其中 $k \in [n-1]$ 。若对任意 $i \in [n-2]$ 有 $d_{G,\pi}(\pi_i) + d_{G,\pi}(\pi_{i+1}) > 2k$,则称 π 是近乎 $(k+1)$ -厚的。

定义3 若一个森林 F 每个连通分支都是路,则称 F 为线性森林,| F |表示 F 边的数目。

定理1^[19] 对任意正整数 k 和单位区间图 G ,顶点 $n \geq k+1$,有连续排序 v_1, \dots, v_n , G 是 k -连通当且仅当 $v_i v_j \in E(G)$,其中 $1 \leq |i-j| \leq k$ 。

2.1 UIO的性质

定义4 设 G 是 n -顶点单位区间图, $\pi = \pi_1, \dots, \pi_n$ 是 $V(G)$ 的序列。若对任意 $p < q < r$, $v_p v_r \in E(G)$ 有

图3 k -DPC的复杂性状态Fig. 3 Complexity state of k -DPC

$v_p v_q, v_q v_r \in E(G)$, 则称 π 是 G 的单位区间序(UIO)。

表 1 符号说明
Tab. 1 Symbol description

符号	含义	备注
$[i]$	$\{1, \dots, i\}$	
$[i, j]$	$\{i, \dots, j\}$	i, j 是正整数, $i < j$
$\pi[i]$	π_1, \dots, π_i	π_1, \dots, π_n 是任意排序
$\pi[i, j]$	π_i, \dots, π_j	
$N_G(v)$	$N_G(v) = \{u : u \in V(G), uv \in E(G)\}$	v_i 的开领域
$N_G[v]$	$N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$	v_i 的闭领域
$G[S]$	由 S 诱导的 G 的子图	
$d_{G, \pi}(\pi_i)$	$N_G(\pi_i) \cap \pi[i+1, n]$ 的顶点数	$i \in [n-1]$
$d_{G, \pi}(\pi)$	$d_{G, \pi}(\pi_1), \dots, d_{G, \pi}(\pi_{n-1})$	若 $\pi[i+1, n] \subseteq N_G(\pi_i)$, 则 $d_{G, \pi}(\pi_i) = +\infty$

定理 2^[20] 阶数为 n 的简单图 G 是单位区间图当且仅当 G 有 UIO。

引理 1^[7] 设 π 是 n -顶点单位区间图 G 的 UIO, $k \in [n]$, 则下列命题等价: 1) G 是 k -连通; 2) 对任意 $i, j \in [n]$ 有 $|i - j| \leq k$, 则 $\pi_i \in N_G[\pi_j]$; 3) π 是 G 的 k -厚的 UIO。

算法 1 寻找 G 的特殊哈密顿路径。输入: n -顶点单位区间图 G , G 的 2-厚的 UIO π 。输出: G 的一条从 π_n 开始, 到 π_{n-1} 结束的哈密顿路径 θ 。具体算法过程如表 2^[7]。

表 2 算法 1
Tab. 2 Algorithm 1

序号	过程
1	if n is even then
2	$\theta_1 = \pi_n, \theta_2 = \pi_{n-2}, \theta_3 = \pi_{n-4}, \dots, \theta_{n/2} = \pi_2, \theta_{1+n/2} = \pi_1, \theta_{2+n/2} = \pi_3, \theta_{3+n/2} = \pi_5, \dots, \theta_n = \pi_{n-1}$
3	else
4	$\theta_1 = \pi_n, \theta_2 = \pi_{n-2}, \theta_3 = \pi_{n-4}, \dots, \theta_{(n+1)/2} = \pi_1, \theta_{(n+3)/2} = \pi_2, \theta_{(n+5)/2} = \pi_4, \dots, \theta_n = \pi_{n-1}$
5	end if
6	return θ

引理 2^[7] 设 π 为 n -顶点单位区间图 G 的 2-厚的 UIO, 则算法 1 的输出是从 π_n 开始, 到 π_{n-1} 结束的 HP。

注 1 设 G 是 n -顶点单位区间图, π 是 G 任意 k -厚的 UIO(或近乎 k -厚的 UIO), 其中 $k \in [n-1]$ (或 $k \in [2, n-1]$), 则:

- 1) 对任意 $i \in [n-1]$ 和 $j \in [i+1, n]$, $\pi[i, j]$ 是 $G[\pi[i, j]]$ 的 k -厚的 UIO(或近乎 k -厚的 UIO);
- 2) 取 $p \in [k-1]$ 和 $V(G)$ 的任意 p -顶点子集 S , 则 $G - S$ 是 $(k-p)$ -连通(或近乎 $(k-p)$ -连通), $\pi - S$ 是 $G - S$ 的 $(k-p)$ -厚的 UIO(或近乎 $(k-p)$ -厚的 UIO)。

2.2 配对 k -DPC 的刻画

定理 3^[7] 设 G 是任意 n -顶点单位区间图, 则:

- 1) G 是配对 1-不相交路径可覆盖当且仅当 G 是 3-连通;
- 2) G 是配对 2-不相交路径可覆盖当且仅当 G 是近乎 4-连通;
- 3) G 是配对 k -不相交路径可覆盖当且仅当 G 是 $(2k-1)$ -连通, 其中 $k > 2, n \geq 2k$ 。

3 主要结论

3.1 删点

定理 4 设 G 是任意 n -顶点单位区间图, 任意删去 W 得到 G' , 其中 $W \subseteq V(G)$, $|W| \leq p$, 则:

- 1) G' 是配对 1-不相交路径可覆盖当且仅当 G 是 $(3+p)$ -连通, 其中 $n \geq 2, 0 \leq p \leq n-2$;
- 2) G' 是配对 2-不相交路径可覆盖当且仅当 G 是近乎 $(4+p)$ -连通, 其中 $n \geq 4, 0 \leq p \leq n-4$;
- 3) G' 是配对 k -不相交路径可覆盖当且仅当 G 是 $(2k+p-1)$ -连通, 其中 $k > 2, n \geq 2k, 0 \leq p \leq n-2k$ 。

证明 1) 必要性。反证法, 假设 G 不是 $(3+p)$ -连通。显然 $G \leq (2+p)$ -连通, 则由注 1 知存在点集 M , $|M| = p$ 使 $G - M \leq 2$ -连通。由定理 3 的结论 1) 知 G' 不是配对 1-不相交路径可覆盖, 矛盾。

充分性。设 G 是 $(3+p)$ -连通, 由注 1 知 G' 是 3-连通。由定理 3 结论 1) 知 G' 是配对 1-不相交路径可覆盖。

2)、3) 分别利用定理 3 的结论 2) 和 3) 可证, 过程与 1) 类似。 证毕

3.2 删点与经过指定边

3.2.1 1-DPC

引理 3 设 G 是任意 n -顶点单位区间图, G 任意删去 W 且经过 F 仍是配对 1-不相交路径可覆盖当且仅当 G 是 $(3+r)$ -连通。其中 $|W| = p, 0 \leq p \leq n-2, |F| = q, (p+q) \leq r$ 。 $n \geq 2$, 当 $n > 2$ 时, $\pi_s, \pi_t \notin F$ 。

证明 必要性。设 G 任意删去 W 且经过 F 仍是配对 1-不相交路径可覆盖。若 $p = r, q = 0$, 则由定理 4 的结论 1) 知 G 是 $(3+r)$ -连通。

充分性。设 G 是 $(3+r)$ -连通, 由注 1 知 G 任意删去 W 是 $(3+r-p)$ -连通, 即 $G - W \geq (3+q)$ -连通。故证明结论可简化为: 已知 G 是 $(3+q)$ -连通, 求证 G 任意经过 F 是配对 1-不相交路径可覆盖。注意到若 $q = 0$, 则由定理 3 的结论 1) 知此结论显然成立, 故下面讨论 $q \geq 1$ 的情况。

由引理 1 知 π 是 $(3+q)$ -厚的。设 $S = \{\pi_s\}, T = \{\pi_t\}$, 不妨假设 $s < t$ 。现对 $|V(G)|$ 进行数学归纳, 当 $|V(G)| = 4+q$ 时结论显然成立, 因为此时 G 是团。假设 $|V(G)| > 4+q$ 。

情况 1: $s=1$ 。因为 π 是 G 的 $(3+q)$ -厚的 UIO, 则 $\pi[2, 4+q] \subseteq N_G(\pi_1)$, 因此存在 $j \in [2, 4+q] \setminus \{t\}$ 。由注 1 知: $\pi[2, n]$ 是 $G - \pi_1$ 的 $(3+q)$ -厚的 UIO。

1) 任意 $\pi_1 \pi_j \notin F$ 。由归纳假设得: 存在 $G[\pi[2, n]]$ 的 π_j, π_t -HP 记为 τ 且经过 F 。则 $\pi_1 + \tau$ 是 G 的 π_s, π_t -HP 且经过 F 。

2) 存在 $\pi_1 \pi_j \in F$ 。由归纳假设得: 存在 $G[\pi[2, n]]$ 的 π_j, π_t -HP 记为 τ 且经过 $F - \pi_1 \pi_j$ 。则 $\pi_1 \pi_j + \tau$ 是 G 的 π_s, π_t -HP 且经过 F , 如图 4。

情况 2: $s > 1$, 设 F 的第一个点为 a 。

1) $s < a$, 任意 $\pi_s \pi_i \notin F, i \in [s+1, s+q+3]$ 。 π 是 G 的 $(3+q)$ -厚的 UIO, 则 $\{\pi_{s+1}, \pi_{s+2}, \dots, \pi_{s+q+2}\} \subseteq N_G(\pi_{s-1})$, 存在 $j \in [s+1, s+q+2] \setminus \{t\}$ 。由注 1 知 $\pi[s+1, n]$ 是 $G[\pi[s+1, n]]$ 的 $(3+q)$ -厚的 UIO。由归纳假设得: 存在 $G[\pi[s+1, n]]$ 的 π_j, π_t -HP 记为 τ 且经过 F 。由引理 2 知存在 $G[\pi[s]]$ 的 π_s, π_{s-1} -HP 记为 θ 。则 $\theta + \pi_{s-1} \pi_j + \tau$ 是 G 的 π_s, π_t -HP 且经过 F , 如图 5。

2) $s = a$, 存在 $\pi_s \pi_i \in F, i \in [s+1, s+q+3]$ 。由注 1 知 $\pi - \pi_s$ 是 $G - \pi_s$ 的 $(2+q)$ -厚的 UIO。由归纳假设得: 存在 $G - \pi_s$ 的 π_i, π_t -HP 记为 τ 且经过 $F - \pi_s \pi_i$ 。则 $\pi_s \pi_i + \tau$ 是 G 的 π_s, π_t -HP 且经过 F , 如图 6。

3) $s > a$ 。

(a) a 是 F 中间点 (F 各路径的非端点), 即 $\pi_a \pi_{a+1} \in F, \pi_a \pi_{a+2} \in F$, 如图 7。

设 $\pi' = \pi - \pi_a, G' = G - \pi_a, F' = F - \pi_a \pi_{a+1} - \pi_a \pi_{a+2} + \pi_{a+1} \pi_{a+2}$, 显然 $|F'| = |F| - 1 = q - 1$ 。由注 1 知 π' 是 G' 的 $(2+q)$ -厚的 UIO。由归纳假设得: 存在 G' 的 π_s, π_t -HP 记为 P_0 且经过 F' 。 π_a 插到 $\pi_{a+1} \pi_{a+2}$ 得 P , 则 $\pi_{a+1} \pi_{a+2}$ 变为 $\pi_a \pi_{a+1} + \pi_a \pi_{a+2}$, P 是 G 的 π_s, π_t -HP 且经过 F , 如图 8。

(b) a 不是 F 中间点且 $\pi_a \pi_m \in F, m \in [a+1, a+q+3]$ 。由引理 2 知: 存在 $G[\pi[a]]$ 的 π_a, π_{a-1} -HP 记为 θ , 如图 9。设 $M = \{F\}$ 的中间点, $A = \{F\}$ 中以 a 为起点的路径上的点。

(i) 任意 $\pi_s \pi_i \notin F, i \in [h, s+q+3] \setminus \{s\}$, 其中 $h = \min\{s-q-3, a\}$ 。存在 $j \in [a+1, a+q+2] \setminus (M \cup A)$, 设 $\pi' = \pi[a+1, n], G' = G[\pi[a+1, n]], S' = S, T' = T, F' = F - \pi_a \pi_m + \pi_m \pi_j$ 。 G 是 $(3+q)$ -连通, 则 $\pi_{a-1} \pi_j \in E(G)$ 。由注 1 知 π' 是 G' 的 $(3+q)$ -厚的 UIO。由归纳假设得: 存在 G' 的 π_s, π_t -HP 记为 P_0 且经过 F' 。 θ 插到 $\pi_m \pi_j$ 得 P , 则 $\pi_m \pi_j$ 变为 $\pi_m \pi_a + \theta + \pi_{a-1} \pi_j$, P 是 G 的 π_s, π_t -HP 且经过 F , 如图 10。

(ii) 存在 $\pi_s \pi_i \in F, i \in [h, s+q+3] \setminus \{s\}$, 其中 $h = \min\{s-q-3, a\}$ 。

证明过程与情况 2 的 2) 类似。 证毕

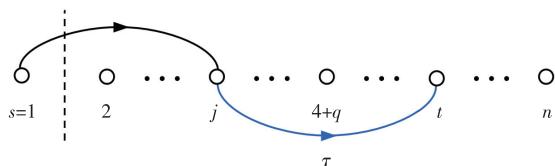
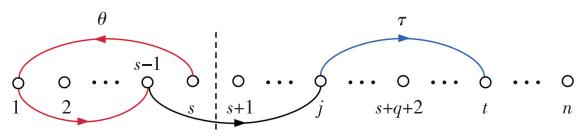
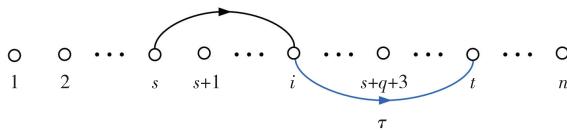
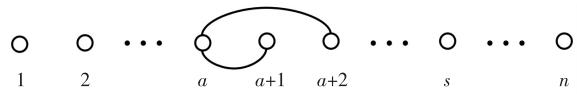
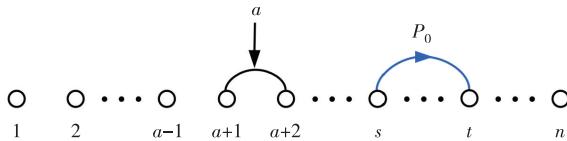
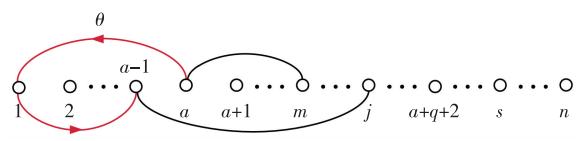
图 4 $\pi_1\pi_j + \tau$ Fig. 4 Schematic diagram of $\pi_1\pi_j + \tau$ 图 5 $\theta + \pi_{s-1}\pi_j + \tau$ Fig. 5 Schematic diagram of $\theta + \pi_{s-1}\pi_j + \tau$ 图 6 $\pi_s\pi_i + \tau$ Fig. 6 Schematic diagram of $\pi_s\pi_i + \tau$ 图 7 a 是中间点Fig. 7 a is the middle point

图 8 情况 2 的(a)的证明

Fig. 8 Proof diagram of (a) of case 2

图 9 a 不是中间点Fig. 9 a isn't the middle point

3.2.2 2-DPC

引理 4 设 G 是任意 n -顶点单位区间图, G 任意删去 W 且经过 F 仍是配对 2-不相交路径可覆盖, 则 G 是近乎 $(4+r)$ -连通。其中 $|W|=p$, $0 \leq p \leq n-4$, $|F|=q$, $(p+q) \leq r$. $n \geq 4$, 当 $n > 4$ 时, $(\pi_{s1}\pi_{t1} \cup \pi_{s2}\pi_{t2}) \not\subseteq F$ 。

证明 若 $p=r, q=0$, 则由定理 4 的结论 2) 可知, G 是近乎 $(4+r)$ -连通。 证毕

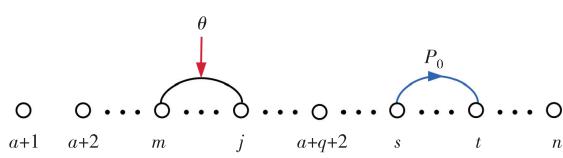
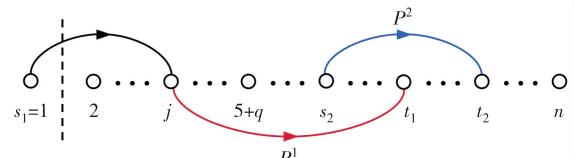
引理 5 设 G 是任意 $(4+r)$ -连通的 n -顶点单位区间图, 则 G 任意删去 W 且经过 F 仍是配对 2-不相交路径可覆盖。其中 $|W|=p$, $0 \leq p \leq n-4$, $|F|=q$, $(p+q) \leq r$. $n \geq 4$, 当 $n > 4$ 时, $(\pi_{s1}\pi_{t1} \cup \pi_{s2}\pi_{t2}) \not\subseteq F$ 。

证明 由注 1 知 G 任意删去 W 是 $(4+r-p)$ -连通, 即 $G-W \geq (4+q)$ -连通。故证明结论可简化为: 已知 G 是 $(4+q)$ -连通, 求证 G 任意经过 F 是配对 2-不相交路径可覆盖。注意到若 $q=0$, 则由定理 3 的结论 2) 知此结论显然成立, 故下面讨论 $q \geq 1$ 的情况。

由引理 1 知 π 是 $(4+q)$ -厚的。设 $S=\{\pi_{s1}, \pi_{s2}\}$, $T=\{\pi_{t1}, \pi_{t2}\}$, 对任意 $j \in [2]$ 有: $s_1 < s_2, s_j < t_j$ 。现对 $|V(G)|$ 进行数学归纳, 当 $|V(G)|=5+q$ 时结论显然成立, 因为此时 G 是团。假设 $|V(G)|>5+q$ 。

情况 1: $s_1=1$ 。因为 π 是 G 的 $(4+q)$ -厚的 UIO, 则对任意 $j \in [2, 5+q]$ 有 $\pi_1\pi_j \in E(G)$ 。设 $\pi'=\pi[2, n]$, $G'=G-\pi_1$, $T'=T$ 。由注 1 知 π' 是 G' 的 $(4+q)$ -厚的 UIO。

1) 任意 $\pi_1\pi_i \notin F, i \in [2, 5+q]$ 。存在 $j \in [2, 5+q] \setminus \{s_2, t_1, t_2\}$, 设 $S'=\{\pi_j, \pi_{s2}\}$ 。由归纳假设得: 在 G' 中对 S' 和 T' , 有配对 2-DPC 记为 $P'=\{P^1, P^2\}$ 且 P' 经过 F 。其中 P^1 是 π_j, π_{t1} -路径, 设 $Q=\pi_1\pi_j + P^1$ 。则在 G 中对 S 和 $T, \{Q, P^2\}$ 是配对 2-DPC 且经过 F , 如图 11。

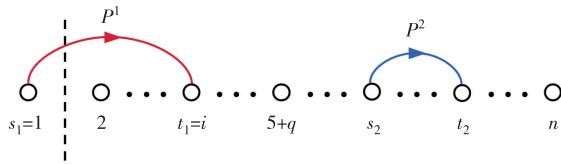
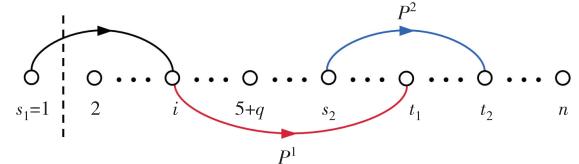
图 10 经过 F 的 π_s, π_t -HPFig. 10 π_s, π_t -HP pass through F 图 11 $\{Q, P^2\}$ Fig. 11 Schematic diagram of $\{Q, P^2\}$

2) 存在 $\pi_1\pi_i \in F, i \in [2, 5+q]$, 设 $F'=F-\pi_1\pi_i$ 。

(a) $i=t_1$, 设 $P^1=(\pi_1, \pi_i)$ 。由注 1 知 $\pi'-\pi_i$ 是 $G'-\pi_i$ 的 $(3+q)$ -厚的 UIO。由引理 3 知, 存在 $G'-\pi_i$ 的

π_{s_2}, π_{t_2} -HP 且经过 F' 记为 P^2 。则在 G 中对 S 和 T , $\{P^1, P^2\}$ 是配对 2-DPC 且经过 F , 如图 12。

(b) $i \neq t_1$, 设 $S' = \{\pi_i, \pi_{s_2}\}$ 。由归纳假设得: 在 G' 中对 S' 和 T' , 有配对 2-DPC 记为 $P' = \{P^1, P^2\}$ 且经过 F' 。其中 P^1 是 π_i, π_{t_1} -路径, 设 $Q = \pi_i \pi_i + P^1$ 。则在 G 中对 S 和 T , $\{Q, P^2\}$ 是配对 2-DPC 且经过 F , 如图 13。

图 12 $\{P^1, P^2\}$ Fig. 12 Schematic diagram of $\{P^1, P^2\}$ 图 13 $\{\pi_i \pi_i + P^1, P^2\}$ Fig. 13 Schematic diagram of $\{\pi_i \pi_i + P^1, P^2\}$

情况 2: $s_1 > 1$, 设 F 的第一个点为 a 。

1) $s_1 < a$, 任意 $\pi_{s_1} \pi_i \notin F$, $i \in [s_1+1, s_1+q+4]$ 。 π 是 G 的 $(4+q)$ -厚的 UIO, 则对任意 $j \in [s_1, s_1+q+3]$ 有: $\pi_j \pi_{s_1-1} \in E(G)$ 。由注 1 知: $\pi[s_1]$ 是 $G[\pi[s_1]]$ 的 $(4+q)$ -厚的 UIO。由引理 2 知存在 $G[\pi[s_1]]$ 的 π_{s_1}, π_{s_1-1} -HP 记为 θ 。设 $\pi' = \pi[s_1+1, n]$, $G' = G[\pi[s_1+1, n]]$, $S' = \{\pi_j, \pi_{s_2}\}$, $T' = T$ 。存在 $j \in [s_1+1, s_1+q+3] \setminus \{s_2, t_1, t_2\}$ 。由注 1 知 π' 是 G' 的 $(4+q)$ -厚的 UIO。由归纳假设得: 在 G' 中对 S' 和 T' , 有配对 2-DPC 记为 $P' = \{P^1, P^2\}$ 且经过 F 。其中 P^1 是 π_j, π_{t_1} -路径, 设 $Q = \theta + \pi_{s_1-1} \pi_j + P^1$ 。则在 G 中对 S 和 T , $\{Q, P^2\}$ 是配对 2-DPC 且经过 F , 如图 14。

2) $s_1 = a$, 存在 $\pi_{s_1} \pi_i \in F$, $i \in [s_1+1, s_1+q+4]$ 。设 $\pi' = \pi - \pi_{s_1}$, $G' = G - \pi_{s_1}$, $F' = F - \pi_{s_1} \pi_i$, 显然 $|F'| = |F| - 1 = q - 1$ 。由注 1 知: π' 是 G' 的 $(3+q)$ -厚的 UIO。

(a) $i = t_1$, 设 $P^1 = (\pi_{s_1}, \pi_i)$ 。由注 1 知 $\pi' - \pi_i$ 是 $G' - \pi_i$ 的 $(2+q)$ -厚的 UIO。由引理 3 知, 存在 $G' - \pi_i$ 的 π_{s_2}, π_{t_2} -HP 且经过 F' 记为 P^2 。则在 G 中对 S 和 T , $\{P^1, P^2\}$ 是配对 2-DPC 且经过 F , 如图 15。

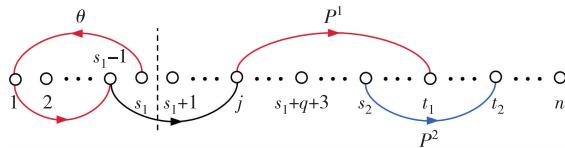


图 14 情况 2 中 1) 的证明

Fig. 14 Proof diagram of 1) in case 2

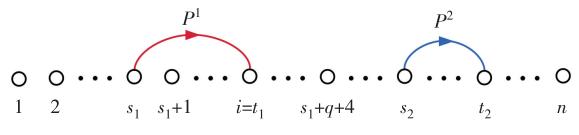


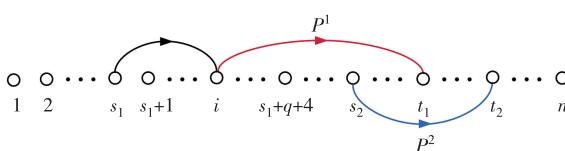
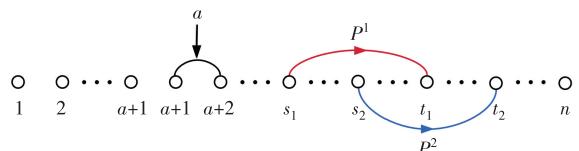
图 15 情况 2 下 2) 的(a)示意

Fig. 15 Schematic diagram of (a) of 2) in case 2

(b) $i \neq t_1$, 设 $S' = \{\pi_i, \pi_{s_2}\}$, $T' = T$ 。由归纳假设: 在 G' 中对 S' 和 T' , 有配对 2-DPC 记为 $P' = \{P^1, P^2\}$ 且经过 F' 。其中 P^1 是 π_i, π_{t_1} -路径, 设 $Q = \pi_{s_1} \pi_i + P^1$ 。则在 G 中对 S 和 T , $\{Q, P^2\}$ 是配对 2-DPC 且经过 F , 如图 16。

3) $s_1 > a$ 。

(a) a 是 F 中间点。设 $\pi' = \pi - \pi_a$, $G' = G - \pi_a$, $S' = S$, $T' = T$, $F' = F - \pi_a \pi_{a+1} - \pi_a \pi_{a+2} + \pi_{a+1} \pi_{a+2}$, 显然 $|F'| = |F| - 1 = q - 1$ 。由注 1 知 π' 是 G' 的 $(3+q)$ -厚的 UIO。由归纳假设得: 在 G' 中对 S' 和 T' , 有配对 2-DPC 记为 $P' = \{P^1, P^2\}$ 且经过 F' 。 π_a 插到 $\pi_{a+1} \pi_{a+2}$ 得 P , 则 $\pi_{a+1} \pi_{a+2}$ 变为 $\pi_a \pi_{a+1} + \pi_a \pi_{a+2}$ 。因此在 G 中对 S 和 T , P 是配对 2-DPC 且经过 F , 如图 17。

图 16 $\{Q, P^2\}$ Fig. 16 Schematic diagram of $\{Q, P^2\}$ 图 17 路径 P Fig. 17 Schematic diagram of path P

(b) a 不是 F 中间点且 $\pi_a \pi_m \in F, m \in [a+1, a+q+4]$ 。

(i) 任意 $\pi_{s_1} \pi_i \notin F, i \in [h, s_1 + q + 4] \setminus \{s_1\}$, 其中 $h = \min\{s_1 - q - 4, a\}$ 。存在 $j \in [a+1, a+q+3] \setminus (\{s_2, t_2\} \cup M \cup A)$, 设 $\pi' = \pi[s_1+1, n], G' = G[\pi[s_1+1, n]], S' = S, T' = T, F' = F - \pi_a \pi_m + \pi_m \pi_j$, 显然 $|F'| = |F| = q$ 。 G 是 $(4+q)$ -连通, 则 $\pi_{a-1} \pi_j \in E(G)$ 。由注 1 知 π' 是 G' 的 $(4+q)$ -厚的 UIO。由归纳假设得: 在 G' 中对 S' 和 T' , 有配对 k -DPC 记为 $P' = \{P^1, P^2\}$ 且经过 F' 。由引理 2 知存在 $G[\pi[a]]$ 的 π_a, π_{a-1} -HP 记为 θ 。 θ 插到 $\pi_m \pi_j$ 得 P , 则 $\pi_m \pi_j$ 变为 $\pi_m \pi_a + \theta + \pi_{a-1} \pi_j$ 。因此在 G 中对 S 和 T, P 是配对 k -DPC 且经过 F , 如图 18。

(ii) 存在 $\pi_{s_1} \pi_i \in F, i \in [h, s_1 + q + 4] \setminus \{s_1\}$, 其中 $h = \min\{s_1 - q - 4, a\}$ 。

证明过程与情况 2 中的 2) 类似。 证毕

3.2.3 k -DPC

定理 5 设 G 是任意 n -顶点单位区间图, G 任意删去 W 且经过 F 仍是配对 k -不相交路径可覆盖当且仅当 G 是 $(2k+r-1)$ -连通。其中 $|W| = p, 0 \leq p \leq n-2k, |F| = q, (p+q) \leq r, k \geq 2$ 。 $n \geq 2k$, 当 $n > 2k$ 时, $(\pi_{s_1} \pi_{t_1} \cup \pi_{s_2} \pi_{t_2} \cup \dots \cup \pi_{s_k} \pi_{t_k}) \not\subseteq F$ 。

证明 必要性。设 G 任意删去 W 且经过 F 仍是配对 k -不相交路径可覆盖。若 $p=r, q=0$, 则由定理 4 的结论 3) 可知 G 是 $(2k+r-1)$ -连通。

充分性。设 G 是 $(2k+r-1)$ -连通, 由注 1 可知 G 任意删去 W 是 $(2k+r-p-1)$ -连通, 即 $G-W \geq (2k+q-1)$ -连通。故证明结论可简化为: 已知 G 是 $(2k+q-1)$ -连通, 求证 G 任意经过 F 是配对 k -不相交路径可覆盖。注意到若 $q=0$, 则由定理 3 的结论 3) 知此结论显然成立, 故下面讨论 $q \geq 1$ 的情况。

由引理 1 知 π 是 $(2k+q-1)$ -厚的。设 $S = \{\pi_{s_1}, \pi_{s_2}, \dots, \pi_{s_k}\}, T = \{\pi_{t_1}, \pi_{t_2}, \dots, \pi_{t_k}\}$, 对任意 $j \in [k]$ 有: $s_1 < s_2 < \dots < s_k, s_j < t_j$ 。现对 $|V(G)|$ 进行数学归纳, 当 $|V(G)| = 2k+q$ 时结论显然成立, 因为此时 G 是团。假设 $|V(G)| > 2k+q$ 。

情况 1: $s_1 = 1$ 。因为 π 是 G 的 $(2k+q-1)$ -厚的 UIO, 则对任意 $j \in [2, 2k+q]$ 有: $\pi_1 \pi_j \in E(G)$ 。设 $\pi' = \pi[2, n], G' = G - \pi_1$ 。由注 1 知 π' 是 G' 的 $(2k+q-1)$ -厚的 UIO。

1) 任意 $\pi_1 \pi_i \notin F, i \in [2, 2k+q]$ 。存在 $j \in [2, 2k+q] \setminus \{s_2, s_3, \dots, s_k, t_1, t_2, \dots, t_k\}$, 设 $S' = \{\pi_j, \pi_{s_2}, \pi_{s_3}, \dots, \pi_{s_k}\}, T' = T$ 。由归纳假设可知: 在 G' 中对 S' 和 T' , 有配对 k -DPC 记为 $P' = \{P^1, P^2, \dots, P^k\}$ 且经过 F 。其中 P^1 是 π_j, π_{t_1} -路径, 设 $Q = \pi_1 \pi_j + P^1$ 。则在 G 中对 S 和 $T, \{Q, P^2, P^3, \dots, P^k\}$ 是配对 k -DPC 且经过 F , 如图 19。

2) 存在 $\pi_1 \pi_i \in F, i \in [2, 2k+q]$, 设 $S' = \{\pi_{s_2}, \pi_{s_3}, \dots, \pi_{s_k}\}, T' = \{\pi_{t_2}, \pi_{t_3}, \dots, \pi_{t_k}\}, F' = F - \pi_1 \pi_i$ 。

(a) $i = t_1$, 设 $P^1 = (\pi_1, \pi_i)$ 。由注 1 知 $\pi' - \pi_i$ 是 $G' - \pi_i$ 的 $(2k+q-2)$ -厚的 UIO。

若 $k=3$, 则 $\pi' - \pi_i$ 是 $G' - \pi_i$ 的 $(4+q)$ -厚的 UIO。由引理 5 知, 在 $G' - \pi_i$ 中对 S' 和 T' , 有配对 2 -DPC 记为 $P' = \{P^2, P^3\}$ 且经过 F' 。

若 $k > 3$, 由归纳假设: 在 $G' - \pi_i$ 中对 S' 和 T' , 有配对 $(k-1)$ -DPC 记为 $P' = \{P^2, P^3, \dots, P^k\}$ 且经过 F' 。

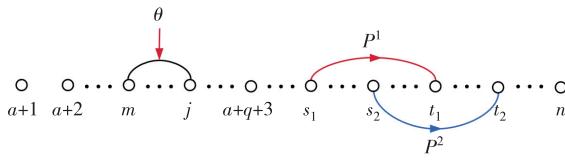
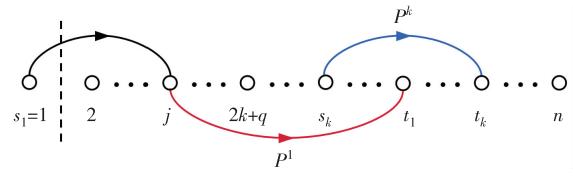
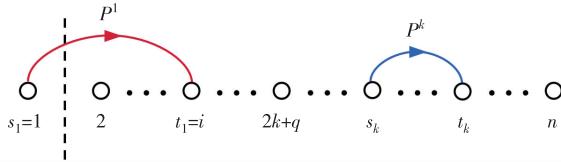
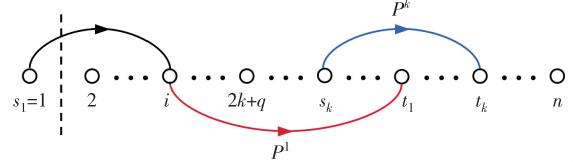
则在 G 中对 S 和 $T, \{P^1, P^2, \dots, P^k\}$ 是配对 k -DPC 且经过 F , 如图 20。

(b) $i \neq t_1$, 设 $S' = \{\pi_i, \pi_{s_2}, \pi_{s_3}, \dots, \pi_{s_k}\}$ 。由归纳假设可知, 在 G' 中对 S' 和 T' , 有配对 k -DPC 记为 $P' = \{P^1, P^2, \dots, P^k\}$ 且经过 F' 。其中 P^1 是 π_i, π_{t_1} -路径, 设 $Q = \pi_1 \pi_i + P^1$ 。则在 G 中对 S 和 $T, \{Q, P^2, P^3, \dots, P^k\}$ 是配对 k -DPC 且经过 F , 如图 21。

情况 2: $s_1 > 1$, 设 F 的第一个点为 a 。

1) $s_1 < a$, 任意 $\pi_{s_1} \pi_i \notin F, i \in [s_1+1, s_1+2k+q-1]$ 。 π 是 G 的 $(2k+q-1)$ -厚的 UIO, 则对任意 $j \in [s_1, s_1+2k+q-2]$ 有: $\pi_j, \pi_{s_1-1} \in E(G)$ 。由注 1 知 $\pi[s_1]$ 是 $G[\pi[s_1]]$ 的 $(2k+q-1)$ -厚的 UIO。由引理 2 知, 存在 $G[\pi[s_1]]$ 的 π_{s_1}, π_{s_1-1} -HP 记为 θ 。

(a) 存在 $j \in [s_1+1, s_1+2k+q-2] \setminus \{s_2, s_3, \dots, s_k, t_1, t_2, \dots, t_k\}$ 。设 $\pi' = \pi[s_1+1, n], G' = G[\pi[s_1+1, n]], S' = \{\pi_j, \pi_{s_2}, \pi_{s_3}, \dots, \pi_{s_k}\}, T' = T$ 。由注 1 知: π' 是 G' 的 $(2k+q-1)$ -厚的 UIO。由归纳假设可知: 在 G' 中对 S' 和 T' , 有配对 k -DPC 记为 $P' = \{P^1, P^2, \dots, P^k\}$ 且经过 F 。其中 P^1 是 π_j, π_{t_1} -路径, 设 $Q = \theta + \pi_{s_1-1} \pi_j + P^1$ 。则在 G 中对 S 和 $T, \{Q, P^2, P^3, \dots, P^k\}$ 是配对 k -DPC 且经过 F , 如图 22。

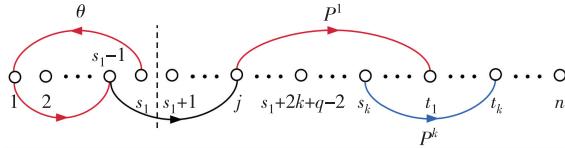
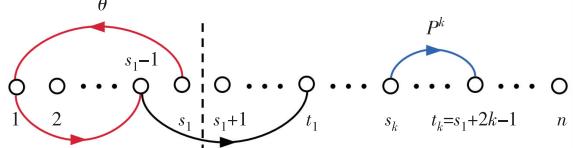
图 18 经过 F 的配对 2-DPCFig. 18 Paired 2-DPC pass through F 图 19 $\{\pi_1\pi_j + P^1, P^2, P^3, \dots, P^k\}$ Fig. 19 Schematic diagram of $\{\pi_1\pi_j + P^1, P^2, P^3, \dots, P^k\}$ 图 20 $\{P^1, P^2, \dots, P^k\}$ Fig. 20 Schematic diagram of $\{P^1, P^2, \dots, P^k\}$ 图 21 $\{\pi_1\pi_i + P^1, P^2, P^3, \dots, P^k\}$ Fig. 21 Schematic diagram of $\{\pi_1\pi_i + P^1, P^2, P^3, \dots, P^k\}$

(b) $q=1$, 且 $[s_1+1, s_1+2k-1] = \{s_2, s_3, \dots, s_k, t_1, t_2, \dots, t_k\}$ 。设 $\pi' = \pi[s_1+1, n] - \pi_{t_1}$, $G' = G[\pi[s_1+1, n]] - \pi_{t_1}$, $S' = S \setminus \{\pi_{s_1}\}$, $T' = T \setminus \{\pi_{t_1}\}$ 。由注 1 知, π' 是 G' 的 $(2k+q-2)$ -厚的 UIO。

若 $k=3$, 则 π' 是 G' 的 $(4+q)$ -厚的 UIO。由引理 5 知在 G' 中对 S' 和 T' , 有配对 2-DPC 记为 $P' = \{P^2, P^3\}$ 且经过 F 。

若 $k > 3$, 由归纳假设得, 在 G' 中对 S' 和 T' , 有配对 $(k-1)$ -DPC 记为 $P' = \{P^2, P^3, \dots, P^k\}$ 且经过 F 。

则在 G 中对 S 和 T , $\{\theta + \pi_{s_1-1}\pi_{t_1}, P^2, P^3, \dots, P^k\}$ 是配对 k -DPC 且经过 F , 如图 23。

图 22 $\{Q, P^2, P^3, \dots, P^k\}$ Fig. 22 Schematic diagram of $\{Q, P^2, P^3, \dots, P^k\}$ 图 23 $\{\theta + \pi_{s_1-1}\pi_{t_1}, P^2, P^3, \dots, P^k\}$ Fig. 23 Schematic diagram of $\{\theta + \pi_{s_1-1}\pi_{t_1}, P^2, P^3, \dots, P^k\}$

2) $s_1=a$, 存在 $\pi_{s_1}\pi_i \in F$, $i \in [s_1+1, s_1+2k+q-1]$ 。设 $F' = F - \pi_{s_1}\pi_i$, 显然 $|F'| = |F| - 1 = q-1$ 。

(a) $i=t_1$, 设 $\pi' = \pi - \{\pi_{s_1}, \pi_{t_1}\}$, $G' = G - \{\pi_{s_1}, \pi_{t_1}\}$, $S' = S \setminus \{\pi_{s_1}\}$, $T' = T \setminus \{\pi_{t_1}\}$, $P^1 = (\pi_{s_1}, \pi_i)$ 。由注 1 知: π' 是 G' 的 $(2k+q-3)$ -厚的 UIO。

若 $k=3$, 则 π' 是 G' 的 $(3+q)$ -厚的 UIO。由引理 5 知, 在 G' 中对 S' 和 T' , 有配对 2-DPC 记为 $P' = \{P^2, P^3\}$ 且经过 F' 。

若 $k > 3$, 由归纳假设知: 在 G' 中对 S' 和 T' , 有配对 $(k-1)$ -DPC 记为 $P' = \{P^2, P^3, \dots, P^k\}$ 且经过 F' 。

则在 G 中对 S 和 T , $\{P^1, P^2, P^3, \dots, P^k\}$ 是配对 k -DPC 且经过 F , 如图 24。

(b) $i \neq t_1$, 设 $\pi' = \pi - \pi_{s_1}$, $G' = G - \pi_{s_1}$, $S' = \{\pi_i, \pi_{s_2}, \pi_{s_3}, \dots, \pi_{s_k}\}$, $T' = T$ 。由注 1 知, π' 是 G' 的 $(2k+q-2)$ -厚的 UIO。由归纳假设可知: 在 G' 中对 S' 和 T' , 有配对 k -DPC 记为 $P' = \{P^1, P^2, \dots, P^k\}$ 且经过 F' 。其中 P^1 是 π_i, π_{t_1} -路径, 设 $Q = \pi_{s_1}\pi_i + P^1$ 。则在 G 中对 S 和 T , $\{Q, P^2, P^3, \dots, P^k\}$ 是配对 k -DPC 且经过 F , 如图 25。

3) $s_1 > a$ 。

(a) a 是 F 中间点。设 $\pi' = \pi - \pi_a$, $G' = G - \pi_a$, $S' = S$, $T' = T$, $F' = F - \pi_a\pi_{a+1} - \pi_a\pi_{a+2} + \pi_{a+1}\pi_{a+2}$, 显然 $|F'| = |F| - 1 = q-1$ 。由注 1 知, π' 是 G' 的 $(2k+q-2)$ -厚的 UIO。由归纳假设: 在 G' 中对 S' 和 T' , 有配对 k -DPC 记为 $P' = \{P^1, P^2, \dots, P^k\}$ 且经过 F' 。 π_a 插到 $\pi_{a+1}\pi_{a+2}$ 得 P , 则 $\pi_{a+1}\pi_{a+2}$ 变为 $\pi_a\pi_{a+1} + \pi_a\pi_{a+2}$ 。因此在 G 中对 S 和 T , P 是配对 k -DPC 且经过 F , 如图 26。

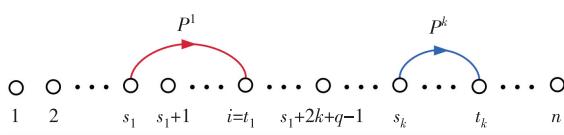


图 24 情况 2 下 2) 的(a)分析

Fig. 24 Analysis diagram of (a) of 2) in case 2

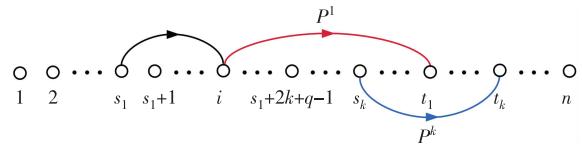


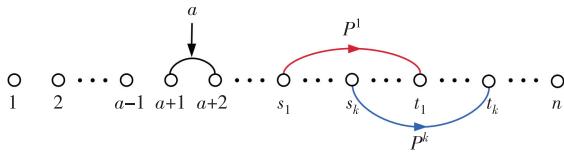
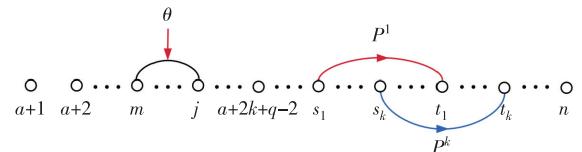
图 25 情况 2 下 2) 的(b)证明

Fig. 25 Proof diagram of (b) of 2) in case 2

(b) a 不是 F 中间点且 $\pi_a \pi_m \in F$, $m \in [a+1, a+2k+q-1]$ 。

(i) 任意 $\pi_{s_1} \pi_i \notin F$, $i \in [h, s_1+2k+q-1] \setminus \{s_1\}$, 其中 $h = \min\{s_1 - 2k - q + 1, a\}$ 。

存在 $j \in [a+1, a+2k+q-2] \setminus \{s_2, s_3, \dots, s_k, t_2, t_3, \dots, t_k\} \cup M \cup A$, 设 $\pi' = \pi[a+1, n]$, $G' = G[\pi[a+1, n]]$, $S' = S$, $T' = T$, $F' = F - \pi_a \pi_m + \pi_m \pi_j$, 显然 $|F'| = |F| = q$. G 是 $(2k+q-1)$ -连通, 则 $\pi_{a-1} \pi_j \in E(G)$. 由注 1 知: π' 是 G' 的 $(2k+q-1)$ -厚的 UIO。由归纳假设可知: 在 G' 中对 S' 和 T' , 有配对 k -DPC 记为 $P' = \{P^1, P^2, \dots, P^k\}$ 且经过 F' 。由引理 2 知, 存在 $G[\pi[a]]$ 的 π_a, π_{a-1} -HP 记为 θ . θ 插到 $\pi_m \pi_j$ 得 P , 则 $\pi_m \pi_j$ 变为 $\pi_m \pi_a + \pi_{a-1} \pi_j$ 。因此在 G 中对 S 和 T, P 是配对 k -DPC 且经过 F , 如图 27。

图 26 路径 P Fig. 26 Schematic diagram of path P 图 27 经过 F 的配对 k -DPCFig. 27 Paired k -DPC pass through F

(ii) 存在 $\pi_{s_1} \pi_i \in F$, $i \in [h, s_1+2k+q-1] \setminus \{s_1\}$, 其中 $h = \min\{s_1 - 2k - q + 1, a\}$ 。

证明过程与情况 2 中的 2) 类似。

证毕

4 结束语

本文探讨了单位区间图上具有错误顶点和错误边的配对多对多 k -DPC 问题, 证明了在单位区间图上删点和经过指定边的以下结论: G 任意删去小于等于 p 个点, 仍是 k -不相交路径可覆盖当且仅当 G 是 $(2k+p-1)$ -连通。 G 任意删去 p 个点且经过 q 条边仍是配对 k -DPC 当且仅当 G 是 $(2k+r-1)$ -连通, 其中 $(p+q) \leq r$ 。本文结论和研究方法可用来进一步研究区间图配对 k -DPC 容错性问题, 同时为设计在单位区间图上寻找配对 k -DPC 容错性的有效算法提供了理论依据。下一步将对以下开放性问题进行研究: 1) 刻画任意删去 p 个点和 q 条边, 且经过 r 条边仍是配对 k -DPC 的单位区间图; 2) 刻画任意删去 p 个点且经过 q 条边仍是配对 k -DPC 的区间图。

参考文献:

- [1] PARK J H, CHOI J, LIM H S. Algorithms for finding disjoint path covers in unit interval graphs[J]. Discrete Applied Mathematics, 2016, 205:132-149.
- [2] ĆUSTIĆ A, LENDL S. The Steiner cycle and path cover problem on interval graphs[J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2021, 43(3):226-234.
- [3] BROERSMA H, FIALA J, GOLOVACH P A, et al. Linear-time algorithms for scattering number and hamilton-connectivity of interval graphs[J]. Journal of Graph Theory, 2015, 79(4):282-299.
- [4] LI P, WU Y. A linear time algorithm for the 1-fixed-endpoint path cover problem on interval graphs[J]. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 2017, 31(1):210-239.
- [5] LI X, FENG H, JIANG H, et al. Solving the maximum internal spanning tree problem on interval graphs in polynomial time[J]. Theoretical Computer Science, 2018, 734:32-37.
- [6] KRATOCHVÍL J, MASAÍK T, NOVOTNÁ J. u -Bubble model for mixed unit interval graphs and its applications: the maxcut problem revisited[J]. Algorithmica, 2021, 83(12):3649-3680.

- [7] MAO R, LI P, SHANG J H. The characterization is paired k -disjoint path coverable on unit interval graphs[J]. Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities, 2023, 79(3): 2783-2800.
- [8] PARK J H, KIM J H, LIM H S. Disjoint path covers joining prescribed source and sink sets in interval graphs[J]. Theoretical Computer Science, 2019, 776: 125-137.
- [9] ASDRE K, NIKOLOPOULOS S D. A polynomial solution to the k -fixed-endpoint path cover problem on proper interval graphs [J]. Theoretical Computer Science, 2010, 411(7/8/9): 967-975.
- [10] LU H. Paired many-to-many two-disjoint path cover of balanced hypercubes with faulty edges[J]. Journal of Supercomputing, 2019, 75(1): 400-424.
- [11] WANG F, ZHAO W S. One-to-one disjoint path covers in hypercubes with faulty edges[J]. The Journal of Supercomputing, 2019, 75(2): 5583-5595.
- [12] KIM S Y, PARK J H. Paired many-to-many disjoint path covers in recursive circulants $(G(2^m, 4))$ [J]. IEEE Transactions on Computers, 2013, 62(12): 2468-2475.
- [13] JING L, WANG G, CHEN L. Paired 2-disjoint path covers of multi-dimensional torus networks with $2n - 3$ faulty edges[J]. Theoretical Computer Science, 2017, 677: 1-11.
- [14] LI J, MELEKIAN C, ZUO S, et al. Unpaired many-to-many disjoint path covers on bipartite k -ary n -cube networks with faulty elements[J]. International Journal of Foundations of Computer Science, 2020, 31(3): 371-383.
- [15] PARK J H, IHM I. A linear-time algorithm for finding a one-to-many 3-disjoint path cover in the cube of a connected graph[J]. Information Processing Letters, 2019, 142(2): 57-63.
- [16] PARK J H. Paired many-to-many 3-disjoint path covers in bipartite toroidal grids[J]. Journal of Computing Science and Engineering, 2018, 12(3): 115-126.
- [17] PARK J H. A sufficient condition for the unpaired k -disjoint path coverability of interval graphs [J]. The Journal of Supercomputing, 2021(3): 1-18.
- [18] JHP A, HSL B. Characterization of interval graphs that are unpaired 2-disjoint path coverable[J]. Theoretical Computer Science, 2020, 821: 71-86.
- [19] CHEN C, CHANG C C, CHANG G J. Proper interval graphs and the guard problem[J]. Discrete Mathematics, 1997, 170(1/2/3): 223-230.
- [20] LOOGES P J, OLARIU S. Optimal greedy algorithms for indifference graphs [J]. Computers & Mathematics with Applications, 1993, 25(7): 15-25.

Operations Research and Cybernetics

Research on Paired k -DPC Fault Tolerance of Unit Interval Graphs

LI Peng¹, ZHU Li¹, WANG Aifa¹, SHANG Jianhui²

(1. College of Science, Chongqing University of Technology, Chongqing 400054;

2. School of Mathematical Sciences, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: **Purposes** In order to study the disjoint path cover (DPC for short) problem, the structures of 1-disjoint path coverable, 2-disjoint path coverable and k -disjoint path coverable that still maintain the DPC property after deleting vertices and passing through specified edges are discussed on the unit interval graph. **Methods** Using the structural characteristics of unit interval graphs and the structural properties of path cover, the paired many to many k -DPC fault tolerance problem of unit interval graphs is studied by mathematical induction and counter proof method. **Findings** Arbitrarily delete p vertices and pass through q edges, the unit interval graph G is still paired k -DPC, if and only if G is $(2k + r - 1)$ -connected, where $(p + q) \leqslant r$. **Conclusions** The fault tolerance path cover problem of unit interval graphs is closely related to Hamiltonian properties and connectivity. The research results and methods provide a theoretical basis for the research of paired k -DPC fault tolerance of interval graphs, and help to design an effective algorithm to find paired k -DPC fault tolerance on unit interval graphs.

Keywords: path cover; paired k -disjoint path coverable; unit interval graph; fault tolerance

(责任编辑 黄 颖)