DOI:10.11721/cqnuj20230206

一类平面上拟线性双调和方程正径向解的存在唯一性*

卜　莹，柏仕坤
(重庆师范大学 数学科学学院，重庆 401331)

摘要:【目的】研究一类平面上拟线性双调和方程。【方法】首先利用径向对称的方法将该方程转化为常微分方程边值问题,进而得到等价的 Hammerstein 型积分方程,在合适的工作空间中构建算子方程,借助 Green 函数的一个不等式和增算子不动点定理获得本文的主要结论。【结果】获得所研究方程正径向解的存在唯一性,且给出了正解的迭代序列。【结论】举例说明所得结论具有较广泛的适应性,所得结果推广和改进了近期已发表的相应结论。

关键词:拟线性双调和方程;正径向解;增算子不动点定理;迭代

中图分类号:O175.25　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1672-6693(2023)02-0108-05

运用增算子不动点定理研究如下平面上拟线性双调和方程正径向解的存在唯一性:

$$\begin{cases}\Delta(|\Delta y|^{p-2}\Delta y)=f(|x|,y),x\in B_1,\\ y=\Delta y=0,x\in\partial B_1。\end{cases}\tag{1}$$

其中:$B_1=\{x\in\mathbf{R}^2:|x|<1\}$,$x=(x_1,x_2)$,$|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$,$\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$,$p>1$ 为正常数,f 为正值连续函数。

1　预备知识

近些年来关于椭圆型方程径向解的研究层出不穷[1-13]。例如,吴炯炘[1]运用上下解方法研究 N 维奇异半线性椭圆方程 $\Delta u+f(x,u)=0$,$x\in\mathbf{R}^N(N\geqslant3)$有界正整体解的存在性;程锡友[2]运用乘积锥上不动点指数理论研究了如下二阶椭圆型方程组正径向解的存在性:

$$\begin{cases}\Delta u+k_1(|x|)f_1(u,v)=0,x\in\Omega,\\ \Delta v+k_2(|x|)f_2(u,v)=0,x\in\Omega,\\ u=v=0,x\in\partial\Omega。\end{cases}$$

式中:$\Omega=\{x\in\mathbf{R}^n:R_1<|x|<R_2\}$是环形区域;Guo 等人[3]借助不动点指数理论研究了如下方程:

$$\begin{cases}\Delta(|\Delta u|^{p-2}\Delta u)=\lambda\omega(x)f(u),x\in B_1,\\ u=\Delta u=0,x\in\partial B_1。\end{cases}\tag{2}$$

这里不仅获得了正径向解的存在性,而且还给出了解存在的参数 λ 的范围;紧接着,Barrow 等人[4]运用单调算子理论研究了式(2)对应的方程组解的存在唯一性,并给出迭代序列。

另外,应该注意到增算子不动点定理是研究微分方程解的存在唯一性的有力工具[14-15]。例如,Liang 等人[14]运用该定理研究了如下分数阶方程边值问题:

$$\begin{cases}D_{0+}^{\alpha}u(t)=\lambda f(u(t)),0<t<1,\\ u(0)+u'(0)=0,u(1)+u'(1)=0。\end{cases}$$

式中:D_{0+}^{α} 是 Caputo 型分数阶导数,这里的 f 是严格正的连续函数。

受上述文献的启发,本文运用增算子不动点定理研究问题(1)正径向解的存在唯一性,并给出正解的迭代序列。

* **收稿日期:**2022-05-06　**修回日期:**2023-02-14　**网络出版时间:**2023-04-20T16:23
资助项目:国家自然科学基金面上项目(No. 11601048);重庆市自然科学基金项目(No. cstc2020jcyj-msxmX0123)
第一作者简介:卜莹,女,研究方向为微分方程,E-mail: 2211857497@qq.com;**通信作者:**柏仕坤,男,副教授,E-mail:874960283@qq.com
网络出版地址:https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20230420.1340.016.html

令 $L=\frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)$ 为二阶拉普拉斯算子 Δ 的极坐标形式，$y(t)=y(|x|)$，$t=|x|$，则式(1)可转化成如下的常微分方程边值问题：

$$\begin{cases}L(|Ly|^{p-2}Ly)=f(t,y),0<t<1,\\ y'(0)=y(1)=(|Ly|^{p-2}Ly)'|_{t=0}=(|Ly|^{p-2}Ly)|_{t=1}=0。\end{cases}\tag{3}$$

根据文献[3]，边值问题(3)等价于如下的 Hammerstein 型积分方程：

$$y(t)=\int_0^1 k(t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 k(s,\tau)f(\tau,y(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s。$$

其中：$\varphi_q(\omega)=|\omega|^{q-2}\omega$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$k(t,s)=\begin{cases}-s\ln t,0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,\\ -t\ln s,0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1。\end{cases}$

引理 1[3-4]　函数 $k(t,s)$ 有以下性质：1) 当 $t,s\in(0,1)$ 时，$k(t,s)>0$；2) 当 $t,s\in[0,1]$ 时，$0\leqslant k(t,s)\leqslant\frac{1}{e}$；3) 当 $t,s\in[0,1]$ 时，$k(t,s)\leqslant k(s,s)$。

令 $E=C[0,1]$，$\|y\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|y(t)|$，$P=\{y\in E:y(t)\geqslant 0,t\in[0,1]\}$，则 $(E,\|\cdot\|)$ 是实 Banach 空间，P 是 E 中的一个锥。定义算子 $A:E\to E$：$(Ay)(t)=\int_0^1 k(t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 k(s,\tau)f(\tau,y(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s$。

若 y 是问题(3)的解当且仅当 y 是算子 A 的不动点。显然，借助 f 和 k 的连续性可知 A 是全连续算子。先给出本文关于非线性项的基本条件：(H1) f 是 $[0,1]\times[0,+\infty)$ 上的正值连续函数。

引理 2　若 $\overline{y}\in P\backslash\{0\}$ 和条件(H1)成立，则存在常数 $0<a_{\overline{y}}\leqslant b_{\overline{y}}$ 使得：

$$a_{\overline{y}}\rho(t)\leqslant(A\overline{y})(t)\leqslant b_{\overline{y}}\rho(t),t\in[0,1]。\tag{4}$$

式中：$\rho(t)=\int_0^1 k(t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 k(s,\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s$。

证明　注意到 f 在 $[0,1]\times[0,+\infty)$ 上连续且恒大于 0，从而若 $\overline{y}\in P\backslash\{0\}$，则存在 $m_{\overline{y}},M_{\overline{y}},\overline{M}>0$ 使得：

$$m_{\overline{y}}=\min_{(t,\overline{y})\in[0,1]\times[0,\overline{M}]}f(t,\overline{y})>0,M_{\overline{y}}=\max_{(t,\overline{y})\in[0,1]\times[0,\overline{M}]}f(t,\overline{y})>0。$$

则有：

$$\int_0^1 k(t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 k(s,\tau)m_{\overline{y}}\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\leqslant$$

$$(A\overline{y})(t)=\int_0^1 k(t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 k(s,\tau)f(\tau,\overline{y}(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\leqslant\int_0^1 k(t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 k(s,\tau)M_{\overline{y}}\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s。$$

从而可得 $m_{\overline{y}}^{q-1}\rho(t)\leqslant\overline{y}(t)\leqslant M_{\overline{y}}^{q-1}\rho(t)$，$t\in[0,1]$。令 $a_{\overline{y}}=m_{\overline{y}}^{q-1}$，$b_{\overline{y}}=M_{\overline{y}}^{q-1}$，则可得式(4)成立。　证毕

引理 3[16]　(增算子不动点定理)令 X 是一半序 Banach 空间，$x_0,y_0\in X$ 且 $x_0\leqslant y_0$，$D=[x_0,y_0]$。假设 $A:D\to X$ 满足以下条件：1) A 是增算子；2) $x_0\leqslant Ax_0$，$Ay_0\leqslant y_0$，即 x_0,y_0 分别为 A 的一个下解和上解；3) A 是全连续算子。则 A 在 $[x_0,y_0]$ 中分别有最小不动点 x^* 和最大不动点 y^*，且 $x^*=\lim\limits_{n\to\infty}A^n x_0$，$y^*=\lim\limits_{n\to\infty}A^n y_0$。

2　解的存在唯一性

定理 1　若条件(H1)和以下条件成立：(H2) $f(t,y)$ 关于 y 在 $t\in[0,1]$ 上一致不减，即对任意的 $t\in[0,1]$，$y_1\leqslant y_2$，则有 $f(t,y_1)\leqslant f(t,y_2)$；(H3) 存在 $c\in(0,1)$ 使得：

$$f(t,\mu y)\geqslant\mu^{c(p-1)}f(t,y),\forall\mu\in(0,1),t\in[0,1],y\in[0,+\infty)。$$

则问题(1)在 $P\backslash\{0\}$ 中存在唯一的正解。

证明　分两步进行。

第一步，证明解的存在性。令：

$$\xi(t)=\int_0^1 k(t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 k(s,\tau)f(\tau,\rho(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s,t\in[0,1],\tag{5}$$

式中：ρ 为引理 2 中所定义，则存在 $a_\rho>0$，$b_\rho>0$ 使得：

$$a_\rho\rho(t)\leqslant\xi(t)=(A\rho)(t)\leqslant b_\rho\rho(t),t\in[0,1]。\tag{6}$$

定义 $\xi_1(t)=\delta_1\xi(t)$，$\xi_2(t)=\delta_2\xi(t)$，其中：

$$0<\delta_1<\min\left\{\frac{1}{b_\rho},a_\rho^{\frac{c}{1-c}}\right\},\delta_2>\max\left\{\frac{1}{a_\rho},b_\rho^{\frac{c}{1-c}}\right\}。\tag{7}$$

根据式(5)、(6)和(7)可得：

$$(A\xi_1)(t)=\int_0^1 k(t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 k(s,\tau)f(\tau,\delta_1\xi(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s=$$

$$\int_0^1 k(t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 k(s,\tau)f\left(\tau,\delta_1\frac{\xi(\tau)}{\rho(\tau)}\rho(\tau)\right)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\geqslant$$

$$\int_0^1 k(t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 k(s,\tau)\left[\delta_1\frac{\xi(\tau)}{\rho(\tau)}\right]^{c(p-1)}f(\tau,\rho(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\geqslant$$

$$\int_0^1 k(t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 k(s,\tau)(\delta_1 a_\rho)^{c(p-1)}f(\tau,\rho(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s=$$

$$(\delta_1 a_\rho)^c\int_0^1 k(t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 k(s,\tau)f(\tau,\rho(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\geqslant$$

$$\delta_1\int_0^1 k(t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 k(s,\tau)f(\tau,\rho(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s=\xi_1(t)。$$

这表明 ξ_1 是 A 的一个下解，即：

$$A\xi_1\geqslant\xi_1。\tag{8}$$

另一方面，再由式(5)、(6)和(7)可得：

$$\xi_2(t)=\delta_2(A\rho)(t)=\delta_2\int_0^1 k(t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 k(s,\tau)f\left(\tau,\frac{\rho(\tau)}{\delta_2\xi(\tau)}\xi_2(\tau)\right)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\geqslant$$

$$\delta_2\int_0^1 k(t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 k(s,\tau)\left[\frac{\rho(\tau)}{\delta_2\xi(\tau)}\right]^{c(p-1)}f(\tau,\xi_2(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\geqslant$$

$$\delta_2\int_0^1 k(t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 k(s,\tau)\left(\frac{1}{\delta_2 b_\rho}\right)^{c(p-1)}f(\tau,\xi_2(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s=\delta_2\left(\frac{1}{\delta_2 b_\rho}\right)^c(A\xi_2)(t)\geqslant(A\xi_2)(t)。$$

这表明 ξ_2 是 A 的一个上解，即：

$$A\xi_2\leqslant\xi_2。\tag{9}$$

注意到(H2)表明 A 为增算子，结合式(8)、(9)，由引理3知 A 在$[\xi_1,\xi_2]$上分别有最小不动点 y^* 和最大不动点 y^{**}。这就证明了解的存在性。

第二步，再证解的唯一性。以下只需证明 A 在$[\xi_1,\xi_2]$上仅有一个不动点。用反证法证明。若 A 在$[\xi_1,\xi_2]$上有两个不动点 y_1,y_2，则由引理2知存在 $0<a_{y_1}\leqslant b_{y_1}$，$0<a_{y_2}\leqslant b_{y_2}$ 使得：

$$a_{y_1}\rho(t)\leqslant y_1(t)=(Ay_1)(t)\leqslant b_{y_1}\rho(t),a_{y_2}\rho(t)\leqslant y_2(t)=(Ay_2)(t)\leqslant b_{y_2}\rho(t),t\in[0,1]。$$

因而有 $y_2(t)\geqslant\frac{a_{y_2}}{b_{y_1}}y_1(t),t\in[0,1]$。定义 $\mu_0=\sup\{\mu>0:y_2\geqslant\mu y_1\}$，则 $\mu_0>0$，$y_2\geqslant\mu_0 y_1$。下证 $\mu_0\geqslant1$，反证，则 $\mu_0<1$，从而有：

$$y_2(t)=\int_0^1 k(t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 k(s,\tau)f(\tau,y_2(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\geqslant\int_0^1 k(t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 k(s,\tau)f(\tau,\mu_0 y_1(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\geqslant$$

$$\mu_0^c\int_0^1 k(t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 k(s,\tau)f(\tau,y_1(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\geqslant\mu_0^c y_1(t)。\tag{10}$$

式(10)表明 $y_2\geqslant\mu_0^c y_1$。注意到 $\mu_0,c\in(0,1)$，则 $\mu_0^c>\mu_0$，这与 μ_0 是上确界的定义是矛盾的。矛盾表明 $\mu_0\geqslant1$，从而 $y_2\geqslant y_1$。同理可证 $y_1\geqslant y_2$。这就得到了问题(1)在区间$[\xi_1,\xi_2]$上仅有一个正解。 证毕

定理2 在定理1的条件下，对任意的 $y_0\in[\xi_1,\xi_2]$，序列 $y_n(t)=(A^n y_0)(t)$ 对 $t\in[0,1]$ 一致收敛到问题(1)的唯一正解。

证明 由定理1知 A 在$[\xi_1,\xi_2]$上的最小不动点 y^* 和最大不动点 y^{**} 应相等，即：$y^*(t)\equiv y^{**}(t),\forall t\in[0,1]$。再根据引理2可得：

$$A^n\xi_1\to y^*,A^n\xi_2\to y^*,n\to\infty。\tag{11}$$

由于 A 是增算子，从而当 $y_0\in[\xi_1,\xi_2]$ 时，有 $A\xi_1\leqslant Ay_0\leqslant A\xi_2$，$A(A\xi_1)\leqslant A(Ay_0)\leqslant A(A\xi_2)$，即：

$$A\xi_1\leqslant y_1\leqslant A\xi_2,A(A\xi_1)=A^2\xi_1\leqslant Ay_1=y_2\leqslant A(A\xi_2)=A^2\xi_2。$$

如此继续下去，可得：

$$A^n\xi_1 \leqslant y_n \leqslant A^n\xi_2。\tag{12}$$

注意到 A 是全连续算子，在式(12)两边取极限，并由式(11)可得 $y_n(t)\to y^*(t)$，$n\to\infty$，对 $t\in[0,1]$一致成立。

证毕

定理 3　若条件(H1)和以下条件成立：(H4) 存在 $M>0$，使得：

$$f(t,x)\leqslant f(t,y)\leqslant 4^pM^{p-1},\ \forall\, 0\leqslant x\leqslant y\leqslant M,t\in[0,1]。$$

则问题(1)至少有一个正解 y^*，且存在一单调非增序列 $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=y^*$，其中 $y_0(t)=M(1-t^2)$，$y_{n+1}=Ay_n$，$n=0,1,2,\cdots,t\in[0,1]$。

证明　令 $K_M=\{y\in P:\|y\|\leqslant M\}$。当 $y\in K_M$ 时，$0\leqslant y(t)\leqslant M$，$\forall\, t\in[0,1]$。从而根据引理 1 中的性质 3)和条件(H4)，有：

$$(Ay)(t)\leqslant\int_0^1 k(t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 k(s,\tau)4^pM^{p-1}\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\int_0^1 k(s,s)\varphi_q\left(\int_0^1 k(\tau,\tau)4^pM^{p-1}\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s=\frac{1}{4}\varphi_q\left(\frac{4^pM^{p-1}}{4}\right)=M。$$

这就证明了 $A(K_M)\subseteq K_M$。注意到若 $y_0\in K_M$，则 $y_1=Ay_0\in K_M$，$y_2=Ay_1\in K_M$，$\cdots$，$y_n=Ay_{n-1}\in K_M$。由于算子 A 是全连续的，从而存在$\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的子列 y_{nk} 使得$\lim\limits_{k\to\infty} y_{nk}=y^*$。

下证$\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是一单调序列。事实上，

$$y_1(t)=(Ay_0)(t)=\int_0^1 k(t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 k(s,\tau)f(\tau,y_0(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\int_0^1 k(t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 k(\tau,\tau)4^pM^{p-1}\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s=\varphi_q(4^{p-1}M^{p-1})\,\frac{1}{4}(1-t^2)=M(1-t^2):=y_0(t),\ \forall\, t\in[0,1]。$$

根据条件(H4)可得：

$$y_2(t)=(Ay_1)(t)=\int_0^1 k(t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 k(s,\tau)f(\tau,y_1(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\int_0^1 k(t,s)\varphi_q\left(\int_0^1 k(s,\tau)f(\tau,y_0(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s=y_1(t),\ \forall\, t\in[0,1]。$$

以此类推，有 $y_{n+1}\leqslant y_n$，$n=1,2,\cdots$从而根据单调有界原理知$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=y^*$，在等式 $y_{n+1}=Ay_n$ 两边取极限可得 $Ay^*=y^*$，注意到 0 不是 A 的不动点，从而 y^* 是问题(1)的正解。

证毕

例 1　注意到 $0\notin[\xi_1,\xi_2]$，故 0 是 A 的不动点不影响定理的结论。取 $\alpha=c(p-1)/2$，令 $f(t,y)=y^\alpha$，$\forall\, y\geqslant 0$，$t\in[0,1]$。则易知条件(H1)～(H3)成立，定理 1、定理 2 的条件满足。

例 2　令 $M=1$，$f(t,y)=4^{p-1}(y^{p-1}+3t)$，$\forall\, y\geqslant 0$，$t\in[0,1]$，则易知条件(H1)、(H4)成立，定理 3 的条件满足。

3　结论

本文使用增算子不动点定理研究一类平面上拟线性双调和方程。首先借助径向对称的方法将之转换成常微分方程边值问题，并找寻与之等价的积分方程。然后在合适的工作空间中构造合适的锥和算子方程，通过研究算子方程进而获得原问题解的存在唯一性，再给出唯一解的迭代序列。本文虽然针对的是一类特殊的方程，但提出的方法可适用于更多种类的微分方程、差分方程，因此具有更加广泛的实用性。

参考文献：

[1] 吴炯圻. 奇异半线性椭圆方程的非径向正整体解[J]. 系统科学与数学，2009，29(4)：433-439.
WU J Q. Positive nonradial entier solutions of singular semilinear elliptic equations[J]. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences，2009，29(4)：433-439.

[2] 程锡友. 环域上的二阶椭圆型方程组的正径向解[J]. 南京审计学院学报，2007，4(3)：95-98.
CHENG X Y. Positive radial solutions for a system of second-order elliptic equations on annular domain[J]. Journal of Nanjing Audit University，2007，4(3)：95-98.

[3] GUO Z C,YIN J X,KE Y Y. Multiplicity of positive radially symmetric solutions for a quasilinear biharmonic equation in the plane[J]. Nonlinear Analysis,2011,74(4):1320-1330.
[4] BARROW J,DEYESO R,KONG L,et al. Positive radially symmetric solution for a system of quasilinear biharmonic equations in the plane[J]. Electronic Journal of Differential Equations,2015(30):1-11.
[5] KONG L. Positive radial solutions for quasilinear biharmonic equations[J]. Computers & Mathematics with Applications,2016,72(12):2878-2886.
[6] LI S S,HUI X F. Multiplicity of radially symmetric solutions for a p-harmonic equation in $\mathbf{R}^N$ [J]. Journal of Inequalities and Applications,2013(588):1-15.
[7] 李涛涛. 二阶半正椭圆微分方程径向正解的存在性[J]. 山东大学学报(理学版),2017,52(4):48-55.
Li T T. Existence of radial positive solutions of second-order semi-positone elliptic differential equations[J]. Journal of Shandong University (Natural Science),2017,52(4):48-55.
[8] MA R Y,CHEN T L,WANG H Y. Nonconstant radial positive solutions of elliptic systems with Neumann boundary conditions [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2016,443(1):542-565.
[9] MA R Y. Existence of positive radial solutions for Elliptic systems[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,1996,201(2):375-386.
[10] WANG H Y. Positive radial solutions for quasilinear systems in an annulus[J]. Nonlinear Analysis,2005,63:2495-2501.
[11] MOHAMED B C,KODS H. Uniqueness of positive radial solutions for elliptic equations in an annulus[J]. Proceedings of the American Mathematical Society,2021,149(2):649-660.
[12] LAZHAR B,AMMAR K. Radial solutions of the elliptic Liouville equation[J]. Results in Physics,2021,25:104276.
[13] NOUREDDINE B,SLIMANE B. Existence and multiplicity of positive radial solutions to the Dirichlet problem for nonlinear elliptic equations on annular domains[J]. Studia Universitatis Babes-Bolyai Mathematica,2020,65(1):109-125.
[14] LIANG S H,ZHANG J H. Positive solutions for boundary value problems of nonlinear fractional differential equation[J]. Nonlinear analysis,2009,71(11):5545-5550.
[15] JIANG J Q,O'REGAN D,XU J F,et al. Positive solutions for a Hadamard fractional p-Laplacian three-point boundary value problem[J]. Mathematics,2019,7(439):1-20.
[16] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 济南:山东科学技术出版社,2001:244-245.
GUO D J. Nonlinear functional analysis[M]. Jinan:Shandong Science & Technology Press,2001:244-245.

Uniqueness and Existence of Positive Radial Solutions for a Class of Quasilinear Biharmonic Equations in the Plane

BU Ying, BAI Shikun

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [**Purposes**]Consider a class of quasilinear biharmonic equations in the plane. [**Methods**]This problem can be transformed into an ordinary differential equation boundary value problem via the method of radial symmetry, and obtained its equivalent Hammerstein-type integral equation. Then, an operator equation is established in an appropriate work space, and using an inequality from the Green and the fixed point theorem of increasing operators, the main results are obtained. [**Findings**]The uniqueness and existence of positive radial solutions are obtained, and an iterative sequence for the positive solution is also offered. [**Conclusions**] Two examples are given to illustrate that the conclusion has a wide application, and the result extends and generalizes the existing study in the literature.

Keywords: quasilinear biharmonic equations; positive radial solutions; fixed point theorem of increasing operators; iterations

(责任编辑 黄 颖)