2023 年 5 月 重庆师范大学学报(自然科学版) May 2023
第 40 卷 第 3 期 Journal of Chongqing Normal University (Natural Science) Vol. 40 No. 3

DOI:10.11721/cqnuj20230315

具有 Markov 切换的随机多群体 SIRI 动力学行为*

邓 涵，张志成，杨志春
(重庆师范大学 数学科学学院，重庆 401331)

摘要:【目的】研究一类具有 Markov 切换的随机多群体 SIRI 模型。【方法】首先利用随机微分方程的基本理论给出模型解是正的、存在的、唯一的。再通过构造一些适当的新的 Lyapunov 函数，利用图论知识和不等式放缩技巧，获得了该传染病模型灭绝和持久的充分条件。【结果】得到该随机系统正解的存在唯一性，同时获得了疾病灭绝和在均值意义下持久的充分条件，得到了没有随机干扰时模型的阈值。【结论】通过分析可知调节系统的参数，即可以采取某些策略来调节疾病的动态，抑制疾病的爆发。

关键词:多群体 SIRI 传染病模型;灭绝性;持久性;Markov 切换
中图分类号:O175 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2023)03-0086-08

由于传染病的流行对社会、经济的负面影响较大，因此为了有效防控传染病，有必要对传染病发病机理和传染规律进行深入研究。数学建模是研究传染病传播和控制的重要工具，传染病模型在其中扮演着非常重要的角色，传染病模型的研究分析能为研究者提供有效的参考。

1990 年，Tudor[1]首次提出了具有复发性的 SIRI 传染病数学模型，该模型适用于对肺结核、猪伪狂犬病的研究[2-3]，然而 Tudor 在文中指出确定性传染病模型的缺陷是未考虑到传染病暴发过程中的随机性，这促使大部分学者对随机性传染病模型进行研究[4-8]。Lei 等人[4]首次研究了随机 SIRI 传染病模型，得到了该模型的动力学行为;Liu 等人[5]研究了随机 SIRI 的传染病模型，获得了白噪声强度对于疾病的影响。

大多数传染病数学模型只考虑了单个群体的情况，但事实上地理环境的不同会造成病毒宿主的差异性。因此，将病毒宿主分成不同的群体，进而研究多群体的传染病模型就显得更为重要。目前，已有部分学者研究了多群体的传染病模型[9-11]。文献[9]就首次提出了多群体 SIS 传染病模型，并用来研究淋病的传播，得到了地方病平衡点的稳定性。

现实生活中的随机扰动(如环境噪音)会对感染率、死亡率等参数产生不同的影响，从而改变传染病的动力学行为。在现实生活中，随机噪声可以划分为白色噪声和有色噪声，其中白色噪声可以用布朗运动来描述，而有色噪音可以用 Markov 链和 Levy 随机过程来描述。特别地，流行病模型很有可能会受到有色噪声的干扰，而这可能会导致系统从一种环境状态切换到另一种环境状态。因此，考虑在随机 Markov 干扰因素下的传染病数学模型，并且分析随机干扰对模型动力学行为的影响非常重要。

基于上述分析，本文考虑了一类具有 Markov 切换的随机多群体 SIRI 模型，证明了系统正解的存在唯一性，通过构造恰当的 Lyapunov 函数，利用一些图论知识，得到模型解的动力学行为。

1 模型建立与准备

Tudor 等人[1]考虑了一个具有复发性的 SIRI 传染病模型，表示为:

* **收稿日期**:2022-06-30 **修回日期**:2022-11-01 **网络出版时间**:2023-04-28T16:07
资助项目:国家自然科学基金面上项目(No. 11971081);重庆市教育委员会科技研究重大项目(No. KJZD-M202000502);重庆市研究生科研创新项目(No. CYS20242)
第一作者简介:邓涵，女，研究方向为随机常微分方程，E-mail:fzymkt@163.com;**通信作者**:杨志春，男，教授，博士生导师，E-mail:yangzhch@126.com
网络出版地址:https://kns.cnki.net/kcms2/detail/50.1165.N.20230428.1406.002.html

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=b-\lambda SI-\mu S,\\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\lambda SI-(\mu+\gamma)I+aR,\\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=\gamma I-(a+\mu)R。\end{cases}\tag{1}$$

式中：S，I，R 分别表示易感者、感染者、恢复者在时刻 t 的人数，b 为出生率，λ 表示 S 和 I 之间的传染率系数，μ 是死亡率，γ 表示恢复率，a 表示免疫失去率，这里的 b，a，μ，λ，γ 都是正常数。

上述模型(1)只考虑了单群体的传染病模型。为了弥补上述模型的缺陷，本文考虑了具有 Markov 的随机多群体 SIRI 传染病模型：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S_k}{\mathrm{d}t}=b_k-\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_{kj}(r(t))S_kI_j-\mu_kS_k,\\ \dfrac{\mathrm{d}I_k}{\mathrm{d}t}=\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_{kj}(r(t))S_kI_j-(\mu_k+\gamma_k)I_k+a_kR_k,\\ \dfrac{\mathrm{d}R_k}{\mathrm{d}t}=\gamma_kI_k-(a_k+\mu_k)R_k。\end{cases}\tag{2}$$

这里将总人数分为 n 个群体，将第 k 个群体分为 3 类，即 $S_k(t)$，$I_k(t)$，$R_k(t)$分别表示 t 时刻第 k 个群体的易感者、感染者、治愈者数量，b_k 为第 k 个群体的人口输入率，β_{kj} 是 $S_k(t)$，$I_j(t)$之间的传染率系数，μ_k，γ_k，a_k 分别是第 k 个群体的死亡率、恢复率和免疫失去率，并且它们都是正常数。$r(t)$是一条在有限空间 $S=\{1,2,\cdots,N\}$ 中连续的 Markov 链，在一定条件下，$r(t)$有唯一的平稳分布 $\pi=(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_N)$，有 $\sum\limits_{j=1}^{N}\pi_h=1,\pi_j>0,j\in S$。

如果系统(2)是一个确定性方程，可以得到无病平衡点和地方病平衡点分别记作：

$$q_0=(b_1/\mu_1,0,0,b_2/\mu_2,0,0,\cdots,b_n/\mu_n,0,0),q_*=(S_1^*,I_1^*,R_1^*,S_2^*,I_2^*,R_2^*,\cdots,S_n^*,I_n^*,R_n^*)。$$

如果 $\boldsymbol{B}=(\beta_{kj})_{n\times n}$ 是不可约的并且 $R_0\leqslant1$，那么 q_0 是全局渐近稳定的；如果 $R_0>1$，那么地方病平衡点 q_* 是全局渐近稳定的。这里，$R_0=\rho(\boldsymbol{A})$，$\boldsymbol{A}=\left(\dfrac{(a_k+\mu_k)\beta_{kj}b_k}{\mu_k^2(\mu_k+\gamma_k+a_k)}\right)_{n\times n}$，$\rho(\boldsymbol{A})$为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径。

2　系统正解的存在唯一性

对于传染病模型(2)，首先应该考虑的是系统是否存在唯一的正解并且是全局的，因此本节将利用 Laypunov 函数的知识证明系统(2)正解的存在唯一性。

定义系统(2)的解$(S_1,I_1,R_1,\cdots,S_n,I_n,R_n,r(t))$为 $Y(t)$，初值为 $Y(0)=(S_1(0),I_1(0),R_1(0),\cdots,S_n(0),I_n(0),R_n(0),r(0))$，$\mathbf{R}_+^{3n}=\{y\in\mathbf{R}^{3n}\mid y_i>0,1\leqslant i\leqslant n\}$，对任意的向量 $\boldsymbol{h}=(h(1),h(2),\cdots,h(N))$，定义 $\breve{\boldsymbol{h}}=\max\limits_{j\in S}h(j)$，$\hat{h}=\min\limits_{j\in S}h(j)$。

定理 1　对于系统(2)任意给定的初值 $Y(0)\in\mathbf{R}_+^{3n}$，当 $t\geqslant0$ 时，系统都存在唯一的正解 $Y(t)$，并且该解以概率 1 位于 $\mathbf{R}_+^{3n}$ 中。

证明　由于系统(2)的系数满足局部 Lipschitz 条件并且连续，故系统(2)对于任意给定的初值条件 $Y(0)\in\mathbf{R}_+^{3n}$，存在唯一的局部解 $Y(t)$，$t\in[0,\tau_e)$，其中 τ_e 表示爆破时间。即只需证明 $\tau_e=\infty$，a. s. 。设 m_0 足够大，使 $S_k(0)$，$I_k(0)$，$R_k(0)(k=1,2,\cdots,n)$均属于$[1/m_0,m_0]$，对于任意的正整数 $m\geqslant m_0$，定义停时：

$$\tau_m=\inf\{t\in[0,\tau_e):\min\{S_k(t),I_k(t),R_k(t),k=1,2,\cdots,n\}\leqslant1/m\text{ 或 }\max\{S_k(t),I_k(t),R_k(t),k=1,2,\cdots,n\}\geqslant m\}。$$

规定 $\inf\varnothing=\infty$，显然随着 m 的增加，τ_m 是单调递增的。令 $\tau_\infty=\lim\limits_{m\to\infty}\tau_m$，如果能证明 $\tau_\infty=\infty$，那么解 $Y(t)$以概率 1 位于 $\mathbf{R}_+^{3n}$ 中。

采用反证法。假如 $\tau_\infty<\infty$，则存在常数 $T>0$ 和 $\varepsilon\in(0,1)$使得 $P\{\tau_\infty\leqslant T\}>\varepsilon$，则存在正整数 $a_0\geqslant m_0$ 使得 $m>a_0$，$P\{\tau_\infty\leqslant T\}\geqslant\varepsilon$。此外，对于 $t\leqslant\tau_m$，对系统(3)有：

$$\frac{\mathrm{d}(S_k+I_k+R_k)}{\mathrm{d}t}=b_k-\mu_k(S_k+I_k+R_k),$$

因此,有:

$$S_k(t)+I_k(t)+R_k(t)\leqslant H_k:=\begin{cases}\dfrac{b_k}{\mu_k}, S_k(0)+I_k(0)+R_k(0)\leqslant\dfrac{b_k}{\mu_k},\\ S_k(0)+I_k(0)+R_k(0), S_k(0)+I_k(0)+R_k(0)>\dfrac{b_k}{\mu_k}。\end{cases}$$

同样地,有:

$$\frac{\mathrm{d}(S_k+I_k+R_k)}{\mathrm{d}t}=b_k-\mu_k(S_k+I_k+R_k)\geqslant b_k-(\mu_k+a_k+\gamma_k)(S_k+I_k+R_k),$$

$$S_k(t)+I_k(t)+R_k(t)\geqslant P_k:=\begin{cases}\dfrac{b_k}{\mu_k+a_k+\gamma_k}, S_k(0)+I_k(0)+R_k(0)\geqslant\dfrac{b_k}{\mu_k+a_k+\gamma_k},\\ S_k(0)+I_k(0)+R_k(0), S_k(0)+I_k(0)+R_k(0)<\dfrac{b_k}{\mu_k+a_k+\gamma_k}。\end{cases}$$

在 $\mathbf{R}_+^{3n}\to[0,+\infty)$ 上定义 Lyapunov 函数 $V=\sum_{k=1}^n[(S_k-1-\ln S_k)+(I_k-1-\ln I_k)+(R_k-1-\ln R_k)]$。对函数 V 采用伊藤公式得:

$$\begin{aligned}LV=&\sum_{k=1}^n\left(1-\frac{1}{S_k}\right)\left(b_k-\sum_{j=1}^n\beta_{kj}S_kI_j-\mu_kS_k\right)+\sum_{k=1}^n\left(1-\frac{1}{I_k}\right)\left(\sum_{j=1}^n\beta_{kj}S_kI_j-(\mu_k+\gamma_k)I_k+a_kR_k\right)+\\&\sum_{k=1}^n\left(1-\frac{1}{R_k}\right)(\gamma_kI_k-(a_k+\mu_k)R_k)\leqslant\\&\sum_{k=1}^n\left(b_k+3\mu_k+\gamma_k+a_k+\sum_{j=1}^n\beta_{kj}I_j-\sum_{j=1}^n\beta_{kj}\frac{S_kI_j}{I_k}-\mu_k(S_k+I_k+R_k)-\frac{a_kR_k}{I_k}-\frac{\gamma_kI_k}{R_k}-\frac{b_k}{S_k}\right)\leqslant\\&\sum_{k=1}^n\left[b_k+3\mu_k+\gamma_k+a_k+\sum_{j=1}^n\beta_{kj}I_j\right]\leqslant\sum_{k=1}^n\left[b_k+3\mu_k+\gamma_k+a_k+\sum_{j=1}^n\breve{\beta}_{kj}H_j\right]:=M。\end{aligned}$$

式中:M 是一个正常数。余下证明方法与文献[12]类似,故略。 证毕

3 系统的灭绝性

关于传染病的研究,最重要的问题之一是疾病的消失时间。本节将在随机系统(2)中建立疾病灭绝的充分条件。由定理1的证明知,若 $\frac{b_k}{\mu_k+a_k+\gamma_k}<(S_k(0)+I_k(0)+R_k(0))<\frac{b_k}{\mu_k}$,则 $\frac{b_k}{\mu_k+a_k+\gamma_k}<(S_k(t)+I_k(t)+R_k(t))<\frac{b_k}{\mu_k}$ a.s.,则称:

$$\Gamma=\{(S_1,I_1,R_1,S_2,I_2,R_2,\cdots,S_n,I_n,R_n)\in\mathbf{R}_+^{3n}:b_k/(\mu_k+a_k+\gamma_k)<(S_k+I_k+R_k)<b_k/\mu_k\}$$

是系统(2)的正不变集,且 $R_0^s=\rho(\mathbf{A}_0^s)$ 为 $\mathbf{A}_0^s=\left(\dfrac{b_k(a_k+\mu_k)\sum_{i=1}^N\beta_{kj}(i)\pi_i}{\mu_k^2(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\right)_{n\times n}$ 的谱半径。

定理2 假设 $\boldsymbol{B}^*=\left(\sum_{i=1}^N\pi_i\beta_{kj}(i)\right)_{n\times n}$ 不可约,若:

$$-\frac{\min\{\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{(1-R_0^s)\omega_k-\alpha_k\gamma_k\},\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{\alpha_k(a_k+\mu_k)\}\}}{\max\left\{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{\dfrac{\omega_k(a_k+\mu_k)}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\right\},\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{\dfrac{\omega_ka_k}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}+\alpha_k\right\}\right\}}+\sum_{i=1}^N\pi_iD(i)<0,$$

那么对于任意的初值解,疾病会以概率为1呈指数灭绝。其中:

$$D(l)=\frac{n\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{\dfrac{b_k\omega_k(a_k+\mu_k)}{\mu_k^2(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\left|\beta_{kj}(l)-\sum_{i=1}^N\beta_{kj}(i)\pi_i\right|\right\}}{\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{\dfrac{\omega_k(a_k+\mu_k)}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\right\}},\alpha_k\in\left(0,\frac{(1-R_0^s)\omega_k}{\gamma_k}\right)。\tag{3}$$

且 $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$ 是 $\mathbf{A}_0^s$ 的左特征向量。

证明　由于矩阵 $\boldsymbol{B}^{*}=\left(\sum_{i=1}^{N}\pi_{i}\beta_{kj}(i)\right)_{n\times n}$ 是不可约的，$\boldsymbol{A}_{0}^{s}$ 是不可约的且为正定矩阵，从文献[13]可得到：

$$(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)\rho(\boldsymbol{A}_0^s)=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)\boldsymbol{A}_0^s。\tag{4}$$

定义 Lyapunov 函数 $V=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\omega_k(a_k+\mu_k)}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}I_k+\frac{\omega_k a_k}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}R_k\right]+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k R_k$，再对它使用伊藤公式可得：

$$\begin{aligned}
L(\ln V)=&\frac{1}{V}\Bigg\{\sum_{k=1}^{n}\frac{\omega_k(a_k+\mu_k)}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\Big[\sum_{j=1}^{n}\beta_{kj}(l)S_kI_j-(\mu_k+\gamma_k)I_k+a_kR_k\Big]+\\
&\sum_{k=1}^{n}\frac{\omega_k a_k}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}[\gamma_kI_k-(a_k+\mu_k)R_k]+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k[\gamma_kI_k-(a_k+\mu_k)R_k]\Bigg\}=\\
&\frac{1}{V}\Bigg\{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\omega_k(a_k+\mu_k)}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\beta_{kj}(l)S_kI_j-\sum_{k=1}^{n}\omega_kI_k+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k[\gamma_kI_k-(a_k+\mu_k)R_k]+\\
&\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{b_k(a_k+\mu_k)\sum_{i=1}^{N}\beta_{kj}(i)\pi_i}{\mu_k^2(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\omega_kI_j-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{b_k(a_k+\mu_k)\sum_{i=1}^{N}\beta_{kj}(i)\pi_i}{\mu_k^2(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\omega_kI_j\Bigg\}=\\
&\frac{1}{V}\Bigg\{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\omega_k(a_k+\mu_k)}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\beta_{kj}(l)\left(N_k-I_k-R_k-\frac{b_k}{\mu_k}\right)I_j-\sum_{k=1}^{n}\omega_kI_k+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{b_k(a_k+\mu_k)\beta_{kj}(l)}{\mu_k^2(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\omega_kI_j+\\
&\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{b_k(a_k+\mu_k)\sum_{i=1}^{N}\beta_{kj}(i)\pi_i}{\mu_k^2(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\omega_kI_j-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{b_k(a_k+\mu_k)\sum_{i=1}^{N}\beta_{kj}(i)\pi_i}{\mu_k^2(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\omega_kI_j+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k[\gamma_kI_k-(a_k+\mu_k)R_k]\Bigg\}\leqslant\\
&\frac{1}{V}\Bigg\{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{b_k(a_k+\mu_k)\sum_{i=1}^{N}\beta_{kj}(i)\pi_i}{\mu_k^2(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\omega_kI_j-\sum_{k=1}^{n}\omega_kI_k+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\omega_k(a_k+\mu_k)}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\beta_{kj}(l)\left(N_k-\frac{b_k}{\mu_k}\right)I_j+\\
&\sum_{k=1}^{n}\alpha_k[\gamma_kI_k-(a_k+\mu_k)R_k]+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{b_k(a_k+\mu_k)\omega_k}{\mu_k^2(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\left|\beta_{kj}(l)-\sum_{i=1}^{N}\pi_i\beta_{kj}(i)\right|I_j\Bigg\}\leqslant\\
&\frac{1}{V}\Bigg\{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{b_k(a_k+\mu_k)\sum_{i=1}^{N}\beta_{kj}(i)\pi_i}{\mu_k^2(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\omega_kI_j-\sum_{k=1}^{n}\omega_kI_k+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k[\gamma_kI_k-(a_k+\mu_k)R_k]+\\
&\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{b_k(a_k+\mu_k)\omega_k}{\mu_k^2(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\left|\beta_{kj}(l)-\sum_{i=1}^{N}\pi_i\beta_{kj}(i)\right|I_j\Bigg\}。
\end{aligned}\tag{5}$$

由式(3)，(4)，(5)得：

$$\begin{aligned}
L(\ln V)\leqslant&\frac{\omega(\boldsymbol{A}_0^sI-I)}{V}+\frac{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k[\gamma_kI_k-(a_k+\mu_k)R_k]}{V}+D(l)=\\
&\frac{(\rho(\boldsymbol{A}_0^s)-1)\sum_{k=1}^{n}\omega_kI_k}{V}+\frac{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k[\gamma_kI_k-(a_k+\mu_k)R_k]}{V}+D(l)\leqslant\\
&-\frac{\min\{\min_{1\leqslant k\leqslant n}\{(1-R_0^s)\omega_k-\alpha_k\gamma_k\},\min_{1\leqslant k\leqslant n}\{\alpha_k(a_k+\mu_k)\}\}}{\max\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{\frac{\omega_k(a_k+\mu_k)}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\right\},\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{\frac{\omega_ka_k}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}+\alpha_k\right\}\right\}}+D(l),
\end{aligned}\tag{6}$$

对式(6)积分得：

$$\begin{aligned}
&\frac{\ln V(t)}{t}\leqslant\\
&-\frac{\min\{\min_{1\leqslant k\leqslant n}\{(1-R_0^s)\omega_k-\alpha_k\gamma_k\},\min_{1\leqslant k\leqslant n}\{\alpha_k(a_k+\mu_k)\}\}}{\max\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{\frac{\omega_k(a_k+\mu_k)}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\right\},\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{\frac{\omega_ka_k}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}+\alpha_k\right\}\right\}}+\frac{\ln V(0)}{t}+\frac{1}{t}\int_0^tD(r(s))\mathrm{d}s,
\end{aligned}\tag{7}$$

对式(7)取上极限得：

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\ln V(t)}{t}\leqslant$$

$$-\frac{\min\{\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{(1-R_0^s)\omega_k-\alpha_k\gamma_k\},\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{\alpha_k(a_k+\mu_k)\}\}}{\max\left\{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{\frac{\omega_k(a_k+\mu_k)}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\right\},\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{\frac{\omega_k a_k}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}+\alpha_k\right\}\right\}}+\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t D(r(s))\mathrm{d}s=$$

$$-\frac{\min\{\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{(1-R_0^s)\omega_k-\alpha_k\gamma_k\},\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{\alpha_k(a_k+\mu_k)\}\}}{\max\left\{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{\frac{\omega_k(a_k+\mu_k)}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\right\},\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{\frac{\omega_k a_k}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}+\alpha_k\right\}\right\}}+\sum_{i=1}^{N}\pi_i D(i)<0,\text{a.s.}。$$

上式说明$\lim\limits_{t\to\infty}I_k=0$,a.s.,$k=1,2,\cdots,n$。 证毕

4 系统的持久性

定理3 假设$\boldsymbol{B}^*=\left(\sum\limits_{i=1}^{N}\pi_i\beta_{kj}(i)\right)_{n\times n}$是不可约的,若$-R+W<0$,则对系统(2)任意初值下的解,都有$\liminf\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t I_m(s)\mathrm{d}s\geqslant\frac{R-W}{Q_m}>0$,a.s.,$m=1,2,\cdots,n$成立,这表明疾病会长时间持久。其中：

$$R=\frac{\min\{\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{(R_0^s-1)\omega_k-c_k\gamma_k\},\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{c_k(a_k+\mu_k)\}\}}{\max\left\{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{\frac{\omega_k(a_k+\mu_k)}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\right\},\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{\frac{\omega_k a_k}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}-c_k\right\}\right\}},$$

$$W=\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t D(r(s))\mathrm{d}s,D(l)=\frac{n\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{\frac{b_k\omega_k(a_k+\mu_k)}{\mu_k^2(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\left|\beta_{kj}(l)-\sum\limits_{i=1}^{N}\beta_{kj}(i)\pi_i\right|\right\}}{\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{\frac{\omega_k(a_k+\mu_k)}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\right\}},$$

$$Q_m=\frac{\max\limits_{1\leqslant k,j\leqslant n}\left\{\frac{(a_k+\mu_k)\omega_k}{\mu_k(a_k+\mu_k+\gamma_k)}\breve{\beta}_{kj}\right\}}{\min\left\{\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{\frac{\omega_k(a_k+\mu_k)}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\right\},\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{\frac{\omega_k a_k}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}-c_k\right\}\right\}}\times$$

$$\left\{1+\frac{\sum\limits_{j=2}^{n}\breve{\beta}_{kj}\frac{b_j}{\mu_j}\left(\frac{\mu_m+a_m+\gamma_m}{\mu_m+a_m}\right)+\mu_m+\gamma_m}{\min\limits_{2\leqslant j\leqslant n}\left\{\frac{b_m\hat{\beta}_{mj}}{\mu_m+a_m+\gamma_m}\right\}}\right\},m=1,2,\cdots,n,c_k\in\left(0,\min\left\{\frac{\omega_k a_k}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)},\frac{\omega_k(R_0^s-1)}{\gamma_k}\right\}\right)。$$

证明 由$\boldsymbol{B}^*$不可约,$\boldsymbol{A}_0^s$是不可约的且为正定矩阵,$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$是$\boldsymbol{A}_0^s$的左特征向量,定义：

$$V_1=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\omega_k(a_k+\mu_k)}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}I_k+\frac{\omega_k a_k}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}R_k\right]-\sum_{k=1}^{n}c_k R_k,$$

则：

$$\mathrm{L}(-\ln V_1)=-\frac{1}{V_1}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{\omega_k(a_k+\mu_k)}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\left[\sum_{j=1}^{n}\beta_{kj}(l)S_kI_j-(\mu_k+\gamma_k)I_k+a_kR_k\right]+\right.$$

$$\left.\sum_{k=1}^{n}\frac{\omega_k a_k}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}[\gamma_kI_k-(a_k+\mu_k)R_k]-\sum_{k=1}^{n}c_k[\gamma_kI_k-(a_k+\mu_k)R_k]\right\}\leqslant$$

$$-\frac{1}{V_1}\left\{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\omega_k(a_k+\mu_k)}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\beta_{kj}(l)\left(N_k-I_k-R_k-\frac{b_k}{\mu_k}\right)I_j-\sum_{k=1}^{n}\omega_kI_k+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{b_k(a_k+\mu_k)\beta_{kj}(l)}{\mu_k^2(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\omega_kI_j+\right.$$

$$\left.\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{b_k(a_k+\mu_k)\sum\limits_{i=1}^{N}\beta_{kj}(i)\pi_i}{\mu_k^2(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\omega_kI_j-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{b_k(a_k+\mu_k)\sum\limits_{k=1}^{n}\beta_{kj}(i)\pi_i}{\mu_k^2(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\omega_kI_j-\sum_{k=1}^{n}c_k[\gamma_kI_k-(a_k+\mu_k)R_k]\right\}\leqslant$$

$$-\frac{1}{V_1}\left\{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{b_k(a_k+\mu_k)\sum\limits_{i=1}^{N}\beta_{kj}(i)\pi_i}{\mu_k^2(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\omega_k I_j-\sum_{k=1}^{n}\omega_k I_k+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\omega_k(a_k+\mu_k)}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\beta_{kj}(l)\left(N_k-\frac{b_k}{\mu_k}\right)I_j-\right.$$

$$\left.\sum_{k=1}^{n}c_k[\gamma_k I_k-(a_k+\mu_k)R_k]\right\}+\frac{n\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{\dfrac{b_k\omega_k(a_k+\mu_k)}{\mu_k^2(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\mid\beta_{kj}(l)-\sum\limits_{i=1}^{N}\beta_{kj}(i)\pi_i\mid\right\}}{\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{\dfrac{\omega_k(a_k+\mu_k)}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\right\}}+$$

$$\frac{1}{V_1}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{(a_k+\mu_k)\omega_k}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\beta_{kj}(l)(I_k+R_k)I_j\leqslant$$

$$-\frac{1}{V_1}\left\{\sum_{k=1}^{n}((R_0^s-1)\omega_k-c_k\gamma_k)I_k+\sum_{k=1}^{n}c_k(a_k+\mu_k)R_k\right\}+D(l)+$$

$$\frac{1}{V_1}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\omega_k(a_k+\mu_k)}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\beta_{kj}(l)\left(\frac{b_k}{\mu_k}-N_k\right)I_j+\frac{1}{V_1}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{(a_k+\mu_k)\beta_{kj}(l)\omega_k}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}(I_k+R_k)I_j\leqslant$$

$$-R+D(l)+\frac{\max\limits_{1\leqslant k,j\leqslant n}\left\{\dfrac{\omega_k(a_k+\mu_k)}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\breve{\beta}_{kj}\right\}}{\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{\dfrac{\omega_k(a_k+\mu_k)}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\right\}}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{b_k}{\mu_k}-N_k\right)+\frac{1}{V_1}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{(a_k+\mu_k)\beta_{kj}(l)\omega_k}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}(I_k+R_k)I_j\leqslant$$

$$-R+D(l)+\frac{\max\limits_{1\leqslant k,j\leqslant n}\left\{\dfrac{\omega_k(a_k+\mu_k)}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\breve{\beta}_{kj}\right\}}{\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{\dfrac{\omega_k(a_k+\mu_k)}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\right\}}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{b_k}{\mu_k}-N_k\right)+$$

$$\frac{\max\limits_{1\leqslant k,j\leqslant n}\left\{\dfrac{\omega_k(a_k+\mu_k)}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\breve{\beta}_{kj}\right\}\sum\limits_{j=1}^{n}I_j}{\min\left\{\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{\dfrac{\omega_k(a_k+\mu_k)}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\right\},\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{\dfrac{\omega_k a_k}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}-c_k\right\}\right\}}。\tag{8}$$

定义函数 $V_2=-\sum\limits_{k=1}^{n}N_k$，则：

$$LV_2=-\sum_{k=1}^{n}[b_k-\mu_k(S_k+I_k+R_k)]=-\sum_{k=1}^{n}\mu_k\left(\frac{b_k}{\mu_k}-N_k\right)\leqslant-\min_{1\leqslant k\leqslant n}\{\mu_k\}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{b_k}{\mu_k}-N_k\right),\tag{9}$$

定义函数 $V_3=-I_1+\dfrac{1}{\mu_1+a_1}\left(\sum\limits_{j=2}^{n}\dfrac{b_j}{\mu_j}\breve{\beta}_{1j}-a_1\right)R_1$，则：

$$LV_3=-\sum_{j=1}^{n}\beta_{1j}(l)S_1I_j+(\mu_1+\gamma_1)I_1-a_1R_1-\frac{a_1}{\mu_1+a_1}[\gamma_1I_1-(\mu_1+a_1)R_1]+$$

$$\sum_{j=2}^{n}\frac{b_j}{\mu_j}\frac{[\gamma_1I_1-(\mu_1+a_1)R_1]}{\mu_1+a_1}\breve{\beta}_{1j}\leqslant$$

$$-\sum_{j=2}^{n}\beta_{1j}(l)(N_1-I_1-R_1)I_j+(\mu_1+\gamma_1)I_1+\sum_{j=2}^{n}\frac{b_j}{\mu_j}\frac{[\gamma_1I_1-(\mu_1+a_1)R_1]}{\mu_1+a_1}\breve{\beta}_{1j}\leqslant$$

$$-\sum_{j=2}^{n}\beta_{1j}(l)N_1I_j+\sum_{j=2}^{n}\beta_{1j}(l)(I_1+R_1)I_j+(\mu_1+\gamma_1)I_1+\sum_{j=2}^{n}\frac{\breve{\beta}_{1j}b_j}{\mu_j}\frac{\gamma_1I_1}{\mu_1+a_1}-\sum_{j=2}^{n}\frac{\breve{\beta}_{1j}b_j}{\mu_j}R_1\leqslant$$

$$-\min_{2\leqslant j\leqslant n}\left\{\frac{b_1\hat{\beta}_{1j}}{\mu_1+a_1+\gamma_1}\right\}\sum_{j=2}^{n}I_j+\sum_{j=2}^{n}\breve{\beta}_{1j}(I_1+R_1)\frac{b_j}{\mu_j}+(\mu_1+\gamma_1)I_1+\sum_{j=2}^{n}\frac{\breve{\beta}_{1j}b_j}{\mu_j}\frac{\gamma_1I_1}{\mu_1+a_1}-\sum_{j=2}^{n}\frac{\breve{\beta}_{1j}b_j}{\mu_j}R_1=$$

$$-\min_{2\leqslant j\leqslant n}\left\{\frac{b_1\hat{\beta}_{1j}}{\mu_1+a_1+\gamma_1}\right\}\sum_{j=2}^{n}I_j+\left[\sum_{j=2}^{n}\frac{\breve{\beta}_{1j}b_j}{\mu_j}\left(1+\frac{\gamma_1}{\mu_1+a_1}\right)+\mu_1+\gamma_1\right]I_1。\tag{10}$$

记

$$V:=\left(-\ln V_1+\frac{\max\limits_{1\leqslant k,j\leqslant n}\left\{\frac{\omega_k(a_k+\mu_k)}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\breve{\beta}_{kj}\right\}}{\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{\frac{\omega_k(a_k+\mu_k)}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\right\}\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{\mu_k\}}V_2+\frac{1}{\min\limits_{2\leqslant j\leqslant n}\left\{\frac{b_1\hat{\beta}_{1j}}{\mu_1+a_1+\gamma_1}\right\}}\times\right.$$

$$\left.\frac{\max\limits_{1\leqslant k,j\leqslant n}\left\{\frac{\omega_k(a_k+\mu_k)}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\breve{\beta}_{kj}\right\}}{\min\left\{\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{\frac{\omega_k(a_k+\mu_k)}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\right\},\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{\frac{\omega_k a_k}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}-c_k\right\}\right\}}V_3\right),$$

则由式(8),(9),(10)得:

$$\mathrm{L}V\leqslant -R+D(l)+\frac{\max\limits_{1\leqslant k,j\leqslant n}\left\{\frac{\omega_k(a_k+\mu_k)}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\breve{\beta}_{kj}\right\}}{\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{\frac{\omega_k(a_k+\mu_k)}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\right\}\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{\frac{\omega_k a_k}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}-c_k\right\}}\times$$

$$\left[1+\frac{1}{\min\limits_{2\leqslant j\leqslant n}\left\{\frac{b_1\hat{\beta}_{1j}}{\mu_1+a_1+\gamma_1}\right\}}\sum_{j=2}^{n}\frac{\breve{\beta}_{1j}b_j}{\mu_j}\left(1+\frac{\gamma_1}{\mu_1+a_1}\right)+\mu_1+\gamma_1\right]I_1=-R+D(l)+Q_1I_1,\tag{11}$$

对式(11)进行 $0\to t$ 的积分,得:

$$\frac{V(t)}{t}\leqslant\frac{V(0)}{t}-R+\frac{1}{t}\int_0^t D(r(s))\mathrm{d}s+\frac{Q_1}{t}\int_0^t I_1(s)\mathrm{d}s。\tag{12}$$

由 $\frac{b_k}{\mu_k+a_k+\gamma_k}<S_k+I_k+R_k<\frac{b_k}{\mu_k},k=1,2,\cdots,n$,可得:

$$V>-\ln\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{\mu_k}\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{\frac{\omega_k(a_k+\mu_k)}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)},\frac{\omega_k a_k}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}-c_k\right\}\right)-$$

$$\frac{\max\limits_{1\leqslant k,j\leqslant n}\left\{\frac{\omega_k(a_k+\mu_k)}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\breve{\beta}_{kj}\right\}}{\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{\frac{\omega_k(a_k+\mu_k)}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\right\}\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{\mu_k\}}\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{\mu_k}-\frac{1}{\min\limits_{2\leqslant j\leqslant n}\left\{\frac{b_1\hat{\beta}_{1j}}{\mu_1+a_1+\gamma_1}\right\}}\times$$

$$\frac{b_1\max\limits_{1\leqslant k,j\leqslant n}\left\{\frac{\omega_k(a_k+\mu_k)}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\breve{\beta}_{kj}\right\}}{\mu_1\min\left\{\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{\frac{\omega_k(a_k+\mu_k)}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}\right\},\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{\frac{\omega_k a_k}{\mu_k(\mu_k+a_k+\gamma_k)}-c_k\right\}\right\}}=\text{常数}。$$

则有:

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{V(t)}{t}\geqslant 0。\tag{13}$$

结合式(13),对式(12)取下极限,得:

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t I_1(s)\mathrm{d}s\geqslant\frac{\left(R-\liminf\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t D(r(s))\,\mathrm{d}s\right)}{Q_1}=\frac{R-W}{Q_1}>0。$$

于是,得到了疾病 I_1 是均值持久的。

同样可得:$\liminf\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t I_m(s)\mathrm{d}s\geqslant\frac{R-W}{Q_m}>0$,a.s.,$m=2,3,\cdots,n$。 证毕

5 总结

本文在 Tudor 提出的 SIRI 传染病模型基础上,考虑了具有 Markov 切换的随机多群 SIRI 模型。首先给出了确定性模型的无病平衡点和地方病平衡点、基本再生数,然后利用随机微分方程解的知识证明了模型正解的存在唯一性,通过构造合适的新的 Lyapunov 函数、结合一些图论知识和不等式放缩技巧,对疾病灭绝和持久的

条件进行了研究。为了能使传染病消亡,分析定理 2 的条件得到:可以通过改善地区卫生条件,确保传染病的防护知识宣传到位,减少易感者和感染者的接触等措施来降低传染率系数 β_{kj};通过加大对医疗机构的投入,提高医疗水平,增加医院病床数量等措施使恢复率系数 γ_k 增加。同时发现,当系统(2)没有随机干扰,即 $\boldsymbol{A}_0^s=\boldsymbol{A}$,$R_0^s=R_0$ 时,定理 2 能被叙述为如果 $\boldsymbol{B}=(\beta_{kj})_{n\times n}$ 是不可约且 $R_0\leqslant 1$ 时,这就是系统(2)的确定性方程的疾病灭绝条件;$\boldsymbol{A}_0^s=\boldsymbol{A}$,$R_0^s=R_0$ 时,定理 3 能被叙述为如果 $\boldsymbol{B}=(\beta_{kj})_{n\times n}$ 是不可约且 $R_0>1$ 时,这就是系统(2)的确定性方程的疾病持久条件。

参考文献:

[1] TUDOR D. A deterministic model for herpes infections in human and animal populations[J]. SIAM Review,1990,32(1):136-139.

[2] SMITH G,GRENFELL B T. Population biology of pseudorabies in swine[J]. American Journal of Veterinary Research,1990,51(1):148-155.

[3] BLOWER S. Modelling the genital herpes epidemic[J]. Herpes:the Journal of the IHMF,2004,11(suppl. 3):138-146.

[4] LEI Q,YANG Z C. Dynamical behaviors of a stochastic SIRI epidemic model[J]. Applicable Analysis,2016,96(16):1-13.

[5] LIU Q,JIANG D Q,HAYAT T,et a1. Intifuence of stochastic perturbation on an SIRI epidemic model with relapse[J]. Applicable Analysis,2020,99(4):549-568.

[6] ZHANG X B,HUO H F,HONG X,et al. The threshold of a stochastic SIQS epidemic model[J]. Physica A,2017,482:362-374.

[7] LIU Q,JIANG D Q,HAYAT T,et al. Dynamics of a stochastic SIR epidemic model with distributed delay and degeneratediffusion[J]. Journal of the Franklin Institute,2019,356(13):7347-7370.

[8] 牟晓洁,张启敏,王宗. 随机 SIRS 模型拟最优控制存在的充分条件[J]. 应用数学学报,2019,42(4):442-454.
MU X J,ZHANG Q M,WANG Z. Sufficient condition for near-optimal control of a stochastic SIRS epidemic model[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica,2019,42(4):442-454.

[9] LAJMANOVICH A,YORKE J A. A deterministic model for gonorrhea in a nonhomogeneous population[J]. Mathematical Biosciences,1976,28(3/4):221-236.

[10] JI C Y,JIANG D Q,YANG Q S,et a1. Dynamics of a multigroup SIR epidemic model with stochastic perturbation[J]. Automatica,2012,48(1):121-131.

[11] FU J,HAN Q X,LIN Y G,et al. Asymptotic behavior of a multigroup SIS epidemic model with stochastic perturbation[J]. Advances in Difference Equations,2015,2015(1):84-93.

[12] JI C Y,JIANG D Q,SHI N Z. Multigroup SIR epidemic model with stochastic perturbation[J]. Physica A,2011,390:1747-1762.

[13] BERMAN A,PLEMMONS R J. Negative matrices in the mathematical Science[M]. New York:Academic Press,1979.

Dynamical Behavior of a Multigroup SIRI Epidemic Model with Markovian Switching

DENG Han, ZHANG Zhicheng, YANG Zhichun

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [**Purposes**]A stochastic multigroup SIRI model with markovian switching is studied. [**Methods**]Firstly, by using the basic theory of stochastic differential equations, the model solution is obtained to be positive, existing and unique. Secondly, by constructing some appropriate new Lyapunov functions and applying the knowledge of graph theory and the inequality scaling skills, the sufficient conditions for the extinction and persistence of the epidemic model are obtained. [**Results**]The existence and uniqueness of the positive solution of the stochastic system are obtained. At the same time, the sufficient conditions for disease extinction and persistence in the mean of the disease are obtained. The threshold for the model without random disturbance is obtained. [**Conclusions**]By analyzing theorem 1, the parameters of the adjustment system can be adjusted, that is, some strategies can be adopted to adjust the dynamics of the disease and suppress the outbreak of the disease.

Keywords: multigroup SIRI epidemic model; extinction; persistence; Markovian switching

(责任编辑　黄　颖)